МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8

1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3?

3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D. Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω, отличная от D. Найдите AF, если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.

4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарику. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + {}$ $+ a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.

6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leqslant 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M, которое замела фигура Φ при этом повороте.

7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D, для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90°$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46°$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

$$\begin{cases} xy=-6z+z^2 & (1) \\ yz=-6x+x^2 & (2) \\ zx=-6y+y^2 & (3) \end{cases}$$

$(2)-(1)$: $yz-xy=-6x+x^2+6z-z^2$; $(x+y+z-6)(x-z)=0$

аналогично: $(x+y+z-6)(y-z)=0$

$(x+y+z-6)(y-x)=0$

Сл1: $x+y+z-6\neq 0 \Rightarrow x=y=z$ $\varnothing$

$x^2=-6x+x^2$; $x=0$ – не удовл усл

$(x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=x^2-12x+36+y^2-12y+36+z^2-12z+36=$

$=x^2+y^2+z^2-12(x+y+z)+108=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz)-12(x+y+z)+108=$

$(1)+(2)+(3)$: $x^2+y^2+z^2-6(x+y+z)-xy-yz-zx=0$ ☆

$=6^2-2\cdot 0-12\cdot 6+108=72$

Сл2: $x+y+z-6=0$

☆ $\Leftrightarrow \underbrace{(x+y+z)^2}_{6}-2(xy+yz+zx)-6\underbrace{(x+y+z)}_{6}-$

$-(xy+yz+zx)=0$

$xy+yz+zx=0$

Ответ: 72

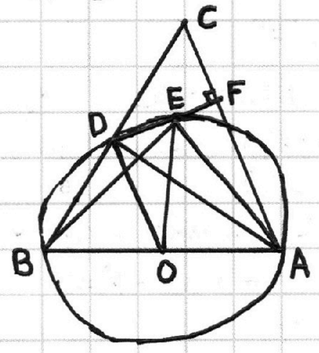
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3



Дано: ΔABC; $AC=20$; $AB=10$

окружность ω: $\omega \cap BC \equiv D$

AB-диам

т. F: $F \in AC$; $DF \perp AC$; $DF \cap \omega \equiv E$; $BE=9$; $E \not\equiv D$

Найти: AF-?

Решение: O-середина AB; $OB=OA=5$; $OD=OE=OA=5$ (радиус ω)

Пусть $\gamma=\angle BCA$; из ΔCDF: $\angle CDF=90-\gamma$; $\angle BDF=90+\gamma$ (как смежн)

$\angle EAB=180^\circ-\angle BDF=90-\gamma$ (т.к. $AEDB$-вписан);

ΔOEA: $OE=OA$ (как рад.), $\angle OAE=90-\gamma$ $\Rightarrow \angle EOA=180^\circ-2(90-\gamma)=2\gamma$;

$\angle EOB=180^\circ-\angle EOA=180^\circ-2\gamma$ (как смежн)

ΔEBO: $OE=OB$ (как рад), $\angle EOB=180^\circ-2\gamma$ $\Rightarrow$ $\angle OBE=\angle BEO=\frac{180^\circ-\angle EOB}{2}=\gamma$;

$\angle ADE=\angle EBA=\gamma$ (как опир на дугу AE)

$\angle ABC=\angle ADF+\angle CDF=90^\circ$

по т. cos ΔOBE:

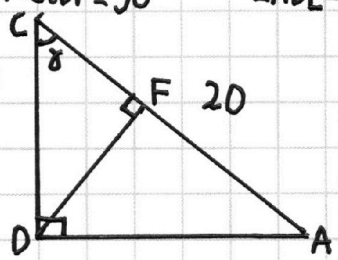
$OB^2+OE^2-2OB\cdot OE\cdot\cos\angle BOE=BE^2$

$-\cos\angle BOE=\frac{BE^2-OB^2-OE^2}{2OB\cdot OE}=\frac{9^2-5^2-5^2}{2\cdot5\cdot5}=\frac{31}{50}$

$\cos(180-2\gamma)=-\frac{31}{50}$; $\cos2\gamma=\frac{31}{50}$;

$2\cos^2\gamma-1=\frac{31}{50}$; $\cos^2\gamma=\frac{81}{100}$; $\cos\gamma=\frac{9}{10}$ (т.к. по усл $\gamma<90^\circ$)

ΔCDA:



$\angle DCA=\gamma$; $AC=20$

$DC=AC\cos\gamma=18$

$CF=CD\cos\gamma=16,2$

$AF=20-CF=3,8$

Ответ: 3,8

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

пусть игрок открывает последовательно, а всего коробок x; тогда вероятность, что при открытии коробки в ней будет шар $= \frac{3}{x}$, а что не будет $= \frac{x-3}{x}$

вероятность выигрыша в первом случае: $\left(\frac{3}{x}\right)^3\left(\frac{x-3}{x}\right)^2 \cdot C_5^3 = \frac{270(x-3)^2}{x^5}$

во втором случае: $\left(\frac{3}{x}\right)^3\left(\frac{x-3}{x}\right)^7 \cdot C_{10}^3 = \cancel{\frac{270(x-3)^2}{x^5} \cdot \frac{(x-3)^4}{x} \cdot 12}$

$\frac{270(x-3)^2}{x^5} \cdot 12\frac{(x-3)^5}{x^5}$

Ответ: в $\frac{12(x-3)^5}{x^5}$ раз, где x – количество коробок

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5

пусть $x_1; x_2$ – корни первого, $x_3; x_4$ – корни второго, a_i – арифм прог из условия

$x_1 = a_6 = a_1 + 5d$

$x_2 = a_7 = a_1 + 6d \Rightarrow x_1 + x_2 = x_3 + x_4$ ☆

$x_3 = a_5 = a_1 + 4d$

$x_4 = a_8 = a_1 + 7d$

по т. Виета: $x_1 + x_2 = a^2 - 4a$

$x_3 + x_4 = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$

☆ $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$

$\Rightarrow$ $\cancel{a^3 - 4a^2 = a^2 - 4a \quad a(a-1)(a-4)=0 \quad a=0,\ a=1,\ a=4}$

$a^3 - 4a^2 = 5a^2 - 20a$

$a^3 - 9a^2 + 20a = 0$

$a(a-4)(a-5) = 0$

$\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=4 \\ a=5 \end{array}\right.$

$a=0$: 1) $x^2 + 4 = 0$ $\varnothing$

2) $5x^2 - 15 = 0$

$\cancel{a=1: \ 1)\ x^2 + 3x - 1 = 0 \quad 2)\ 5x^2 + 3x - 23 = 0 \quad x_1 = \frac{-3-\sqrt{13}}{2} \quad x_3 = -2{,}6 \quad x_4 = 2 \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{13}}{2}}$

$a=4$: 1) $x^2 - 4 = 0$ $\quad x_1 = -2$, $x_2 = 2$

2) $5x^2 - 167 = 0$ $\quad x_3 = -\sqrt{\frac{167}{5}}$, $x_4 = \sqrt{\frac{167}{5}}$ $\quad \varnothing$

$a=5$: 1) $x^2 - 5x\ 1 = 0$ $\quad x_1 = \frac{5\ \sqrt{29}}{2}$, $x_2 = \frac{5+\sqrt{29}}{2}$

2) $5x^2 - 25x\ 295 = 0$

$x^2 - 5x\ 59 = 0$ $\quad x_3 = \frac{5-3\sqrt{29}}{2}$, $x_4 = \frac{5+3\sqrt{29}}{2}$

$\cancel{x_3 = \frac{5-\sqrt{9 \cdot 29}}{2} \quad x_4 = \frac{5+\sqrt{9 \cdot 29}}{2}}$

$d = \sqrt{29}$ $\quad +$

Ответ: 5

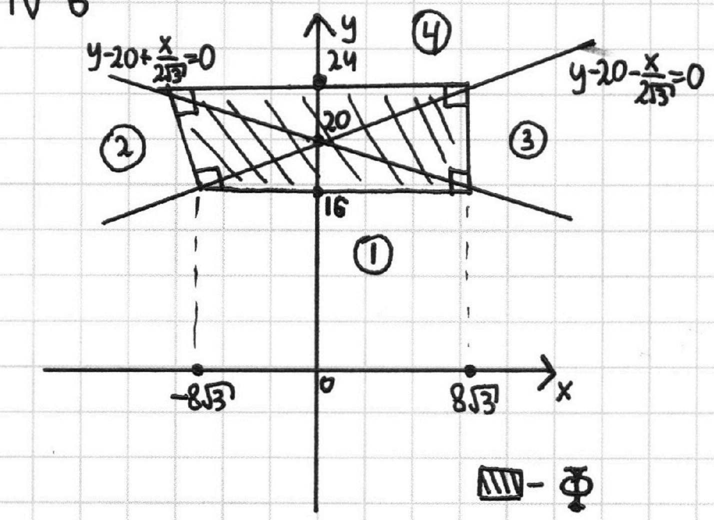
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6



1) $y-20-\frac{x}{2\sqrt3}<0;\ y-20+\frac{x}{2\sqrt3}<0$

$20-y-\frac{x}{2\sqrt3}+20-y+\frac{x}{2\sqrt3}\le 8$

$y\ge 16$

2) $y-20-\frac{x}{2\sqrt3}\ge 0;\ y-20+\frac{x}{2\sqrt3}<0$

$20-y-\frac{x}{2\sqrt3}+y-\frac{x}{2\sqrt3}-20\le 8$

$x\ge -8\sqrt3$

3) $y-20-\frac{x}{2\sqrt3}<0;\ y-20+\frac{x}{2\sqrt3}\ge 0$

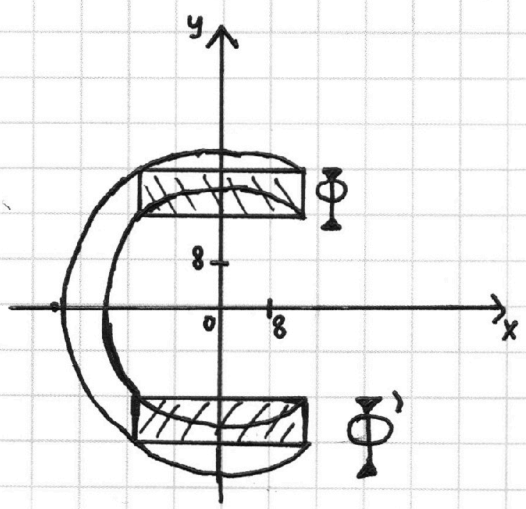
$y-20-\frac{x}{2\sqrt3}+20-y-\frac{x}{2\sqrt3}\le 8$

$x\le 8\sqrt3$

4) $y-20-\frac{x}{2\sqrt3}\ge 0;\ y-20+\frac{x}{2\sqrt3}\ge 0$

$y-20-\frac{x}{2\sqrt3}+y-20+\frac{x}{2\sqrt3}\le 8$

$y\le 24$



$S = \bigcirc - \bigcirc + 3\cdot(\ldots) - (\ldots) = 768\pi - 448\pi + 3(448\pi - 256) - 256\pi + 64\sqrt3 =$

$\bigcirc = \pi R^2$, $\bigcirc = \pi r^2$

$= \cancel{2056}\ 1608\pi - 768 + 64\sqrt3$

$R=\sqrt{24^2+(8\sqrt3)^2}=8\sqrt{12}$

$r=\sqrt{16^2+(8\sqrt3)^2}=8\sqrt7$

$\pi R^2 = 768\pi$

$\pi r^2 = 448\pi$

$= \pi r^2 - 16^2 = 448\pi - 256$

$= \frac{\pi R^2}{3} - \frac{16\cdot 8\sqrt3}{2} = 256\pi - 64\sqrt3$

$3 = \frac{360}{2\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt3}{3}}$

Ответ: $1608\pi - 768 + 64\sqrt3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

ЧЕРНОВИК

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy=-6z+z^2 \\ yz=-6x+x^2 \\ zx=-6y+y^2 \end{cases} \Big| + \Rightarrow xy+yz+zx=-6x-6z-6y+x^2+y^2+z^2$$

$$(x+y+z)^2-\underbrace{xy+yz+zx}_{xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=6(x+y+z)$$

$$x^2-z^2=6x-6z+yz-xy$$

$$(x-z)(x+z)=6(x-z)-y(x-z)$$

$$(x+z-6+y)(x-z)=0$$

$$\begin{cases} (x+y+z-6)(x-z)=0 \\ (x+y+z-6)(y-x)=0 \\ (x+y+z-6)(y-z)=0 \end{cases}$$

Сл1: $x+y+z=6$

$x=y=z$

$x^2=-6x+x^2$

$x=0$

$128+24+15=39+128=167$

$$x^2+y^2+z^2-6x-6y-6z=xy+yz+zx$$

$6^2-2\cdots-36=\cdots$

$3\cdots=0$

$\cdots=0$

$xy+yz+zx=0$

$(x-6)^2+(y-6)^2+(z-6)^2=x^2+y^2+z^2-12x-12y-12z-$

$-36\cdot3$

$999\ldots$

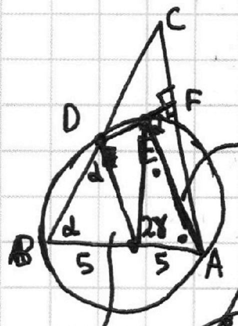
$\angle A=\alpha$

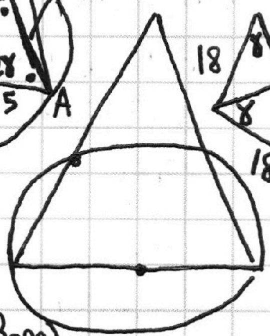
$\angle \beta=\beta$

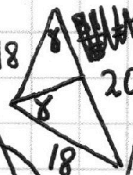
$\angle CDF=\alpha-(90-\beta)=\alpha+\beta-90°$

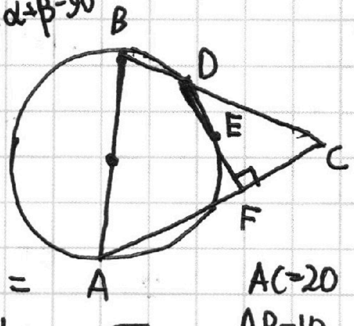
$18 \times 9 = 162$

99×99









$\frac{18\cdot9}{10}=$

$=\frac{81}{5}=16{,}2;\ \boxed{3{,}8}$

$AC=20$

$AB=10$

$\cancel{90-\gamma+\beta}$

$180-90-\gamma+\beta$

$=90+\gamma+\beta$

$180-90+\gamma-\beta=$

$72\quad 108-36=$

$=72\quad 90+$

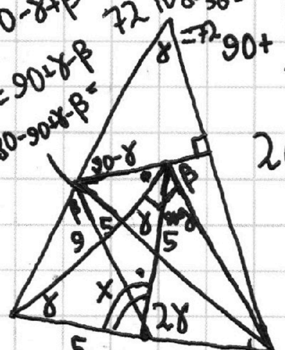
$180-\beta-$

$-(90-\gamma)$

18

20

$90-\beta+\gamma$



$AE=\sqrt{19}$

$90-\beta$

$\beta-\gamma$

10^2-81

19

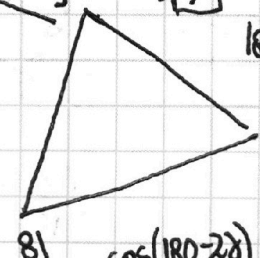
$\beta-\gamma+90-\beta$

$90-\gamma$

$180-(180-2\alpha)-2\gamma=2\alpha-2\gamma$

$180-2(\alpha+\beta-90)=$

$90-\gamma\quad 90-\gamma$



$5^2+5^2-2\cdot\cos x\cdot5^2=9^2$

$\boxed{\cos\gamma=\frac{9}{10}}$

$\cos2\gamma=\frac{31}{50}$

$2\cos^2\gamma-1=\frac{31}{50}$

$\frac{81}{50}$

$\cos(180-2\gamma)$

$\frac{50-81}{50}=$

$=\frac{-31}{50}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4

X-коробок

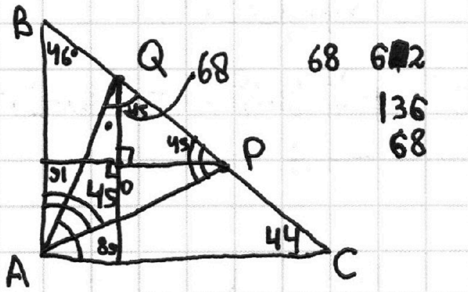
$\frac{3}{x}\cdot\frac{3}{x}\cdot\frac{3}{x}\cdot$

p – в коробке лежит шар

q – в коробке не лежит шар

$A^pB^q\cdot C^p_{p+q}=\frac{27(x-3)^3}{x^{\cancel{5}}}\cdot\frac{5\cdot4\cdot3}{6}=\frac{270(x-3)^3}{x^6}$

$p_1=3$ $q_1=7$ $p_2=3$ $q_2=7$ $\frac{27}{x^3}\cdot\frac{(x-3)^7}{x^7}\cdot C^3_{10}=\frac{10\cdot9\cdot8}{6}=120\cdot27(x-3)$



68 6[illegible]2 136 68

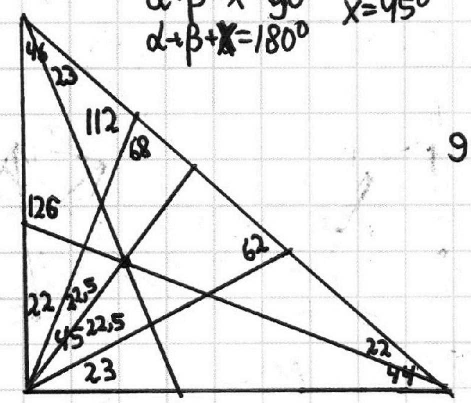
$x^2-(a^2-4a)x+a^2-6a+4$

b;d x_1 x_2 x_3 x_4

$\alpha+\beta-x=90^0$ $x=45^0$

$\alpha+\beta+\cancel{x}=180^0$

$$\begin{cases} x_1+x_2=a^2-4a \\ x_1x_2=a^2-6a+4 \\ x_3+x_4=a^3-4a^2 \\ x_3x_4=-2a^3-6a-15 \\ x_1+x_2=x_3+x_4 \end{cases}$$



$9+4=\sqrt{13}$

$\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

$a^2-4a=a^3-4a^2$

$a(a^2-4a)=0$

$$\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-2 \\ a=2 \end{array}\right.$$

$9+\ 469|13\ \ -39|3\ \ 79$

$9+460$

$469|23 \ \ 23$

$469|19\ \ -38|2\ \ 89$

$a^2-4a=a^3-4a^2$

$a^3-4a^2-a^2+4a$

a(

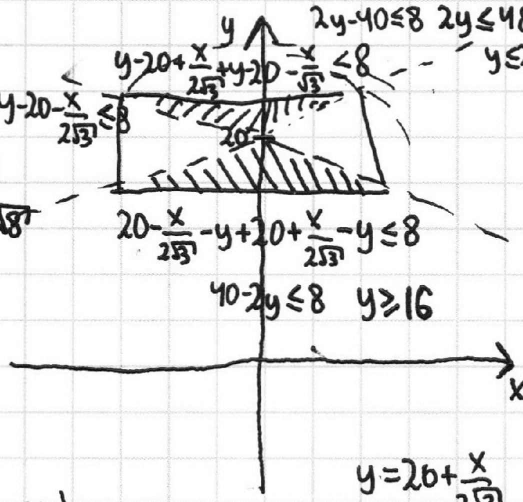
$\frac{-3+23}{10}=-2,6$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

ЧЕРНОВИК

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$2y-40\le 8 \quad 2y\le 48$

$y\le 24$

$y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}+y-20-\frac{x}{\sqrt{3}}\le 8$

$20-y-\frac{x}{2\sqrt{3}}+y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}}\le 8$

$-\frac{x}{\sqrt{3}}\le 8$

$x\ge -3\sqrt{8}$

$20-\frac{x}{2\sqrt{3}}-y+20+\frac{x}{2\sqrt{3}}-y\le 8$

$40-2y\le 8 \quad y\ge 16$

$y=20+\frac{x}{2\sqrt{3}}$

$\left|y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}\right|+\left|y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}}\right|\le 8$

$\frac{\sqrt{3}}{6}$

$16=20+\frac{x}{2\sqrt{3}}$

$-8\sqrt{3}$

$448 \times 3 = 1344$

$1344 - 768 = 2212$ ... $- 256$, $2056 - 448 = 1608$

$3\cdot 256=512+256=768$

$n=\underbrace{99999\ldots9}_{20001}$

$n^2=$

9999999 × 9999999 = 9999991, 9999999, 99999919, 9999919, 999, 9

8...... 8

20000000009

$64\cdot 12$

$768 \,|\, 3$ ... 256

$64 \times 12 = 128 + 64 = 768$

$64 \times 7 = 448$

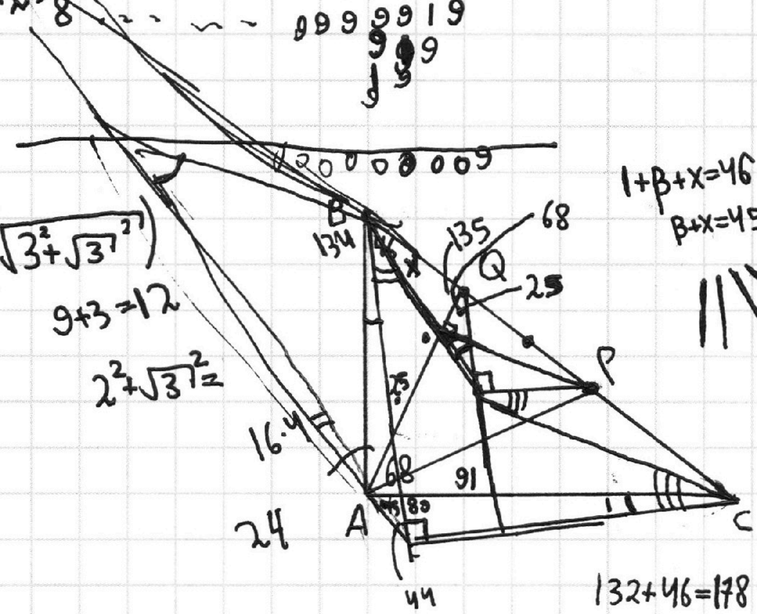
$8\left(\sqrt{3^2+\sqrt{3}^2}\right)$

$9+3=12$

$2^2+\sqrt{3}^2=$

$1+\beta+x=46$

$\beta+x=45$



$134+45=$

$132+46=178$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!