



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



- 1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
- 3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
- 4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
- 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
- 6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ **1**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Nº1

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2 & ① \\ yz = -6x + x^2 & ② \\ zx = -6y + y^2 & ③ \end{cases}$$

$$② - ①: yz - xy = -6x + x^2 + 6z - z^2; (x+y+z-6)(x-z) = 0$$

$$\text{аналогично: } (x+y+z-6)(y-z) = 0$$

$$(x+y+z-6)(y-x) = 0$$

$$\text{Сл1: } x+y+z-6 \neq 0 \Rightarrow x=y=z$$

$$x^2 = -6x + x^2; x=0 - \text{не удовл усл}$$

$$\text{Сл2: } x+y+z-6=0$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2 = x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - 12(x+y+z) + 108 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) - 12(x+y+z) + 108$$

$$① + ② + ③: x^2 + y^2 + z^2 - 6(x+y+z) - xy - yz - zx = 0$$

$$= 6^2 - 2 \cdot 0 - 12 \cdot 6 + 108 = 72$$

Ответ: 72

Omben: 3,8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N^o4

пусть шрок открывает последовательно, а всего коробок x ; тогда вероятность, что при открытии коробки в ней будет шар $= \frac{3}{x}$, а что не будет $= \frac{x-3}{x}$

вероятность выигрыша в первом случае: $\left(\frac{3}{x}\right)^3 \left(\frac{x-3}{x}\right)^2 \cdot C_5^3 = \frac{270(x-3)^2}{x^5}$

во втором случае: $\left(\frac{3}{x}\right)^3 \left(\frac{x-3}{x}\right)^7 \cdot C_{10}^3 = \frac{270(x-3)^2}{x^5} \cdot \frac{120}{12} = \frac{270(x-3)^2}{x^5} \cdot 10$

Ответ: в $\frac{12(x-3)^5}{x^5}$ раз, где x — количество коробок

$$\frac{270(x-3)^2}{x^5} \cdot 10 = \frac{2700(x-3)^2}{x^5}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из **1**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N^o 5

пусть x_1, x_2 - корни первого, x_3, x_4 - корни второго, a_i - арифм прогр из условия

$$x_1 = a_5 = a_1 + 4d$$

$$x_2 = a_7 = a_1 + 6d$$

$$x_3 = a_5 = a_1 + 4d$$

$$x_4 = a_8 = a_1 + 7d$$

по т. Виета: $x_1 + x_2 = a^2 - 4a$

$$x_3 + x_4 = a^3 - 4a^2$$

$$\star x_1 + x_2 = x_3 + x_4$$

$$\begin{aligned} a^3 - 4a^2 &= a^2 - 4a \\ a(a-4)(a-4) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a^3 - 4a^2 &= 5a^2 - 20a \\ a^3 - 9a^2 + 20a &= 0 \\ a(a-4)(a-5) &= 0 \end{aligned} \quad \begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=5 \end{cases}$$

$$a=0: \begin{aligned} 1) x^2 + 4 &= 0 \quad \emptyset \\ 2) 5x^2 - 15 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a=1: \begin{aligned} 1) x^2 + 3x - 1 &= 0 & x_1 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \\ 2) 5x^2 + 3x - 23 &= 0 & x_3 = \frac{-3 + \sqrt{469}}{10} \\ & & x_4 = \frac{-3 - \sqrt{469}}{10} \end{aligned} \end{aligned}$$

$$a=4: \begin{aligned} 1) x^2 - 4 &= 0 & x_1 = -2 \\ & & x_2 = 2 \\ 2) 5x^2 - 167 &= 0 & x_3 = -\sqrt{\frac{167}{5}} \\ & & x_4 = \sqrt{\frac{167}{5}} \end{aligned}$$

$$a=5: 1) x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$2) 5x^2 - 25x - 95 = 0$$

$$x^2 - 5x - 19 = 0$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2} \quad x_3 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \quad x_4 = \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{5 - 19\sqrt{29}}{2} \\ x_4 &= \frac{5 + 19\sqrt{29}}{2} \end{aligned}$$

$$d = \sqrt{29} \quad +$$

Ответ: 5



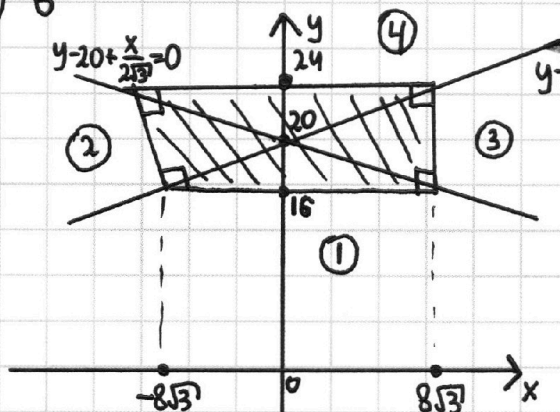
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

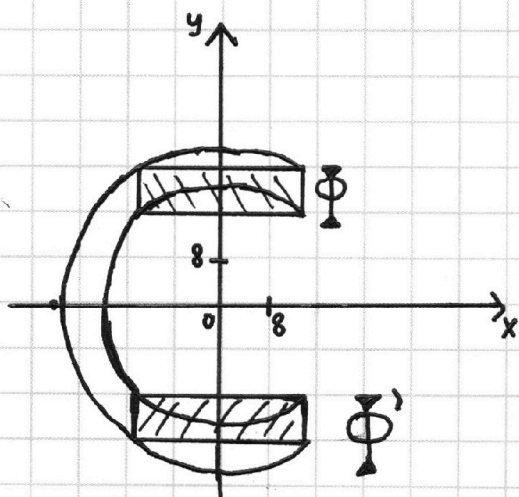
СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°6



▨ - Φ



① $y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0; y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$
 $20 - y - \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 - y + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$
 $y \geq 16$

② $y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0; y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0$
 $20 - y - \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - \frac{x}{2\sqrt{3}} - 20 \leq 8$
 $x \geq -8\sqrt{3}$

③ $y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} < 0; y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0$
 $y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} + 20 - y + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$
 $x \leq 8\sqrt{3}$

④ $y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0; y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \geq 0$
 $y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} + y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \leq 8$
 $y \leq 24$

$$S = \bigcirc - \bigcirc + 3 \bigcirc - \bigtriangleup = 768\pi - 448\pi + 3(448\pi - 256) - 256\pi + 64\sqrt{3} = 1608\pi - 768 + 64\sqrt{3}$$

$$R = \sqrt{24^2 + (8\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{12}$$

$$r = \sqrt{16^2 + (8\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{7}$$

$$\pi R^2 = 768\pi$$

$$\pi r^2 = 448\pi$$

$$\bigtriangleup = \pi r^2 - 16^2 = 448\pi - 256$$

$$\bigcirc = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{16 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 256\pi - 64\sqrt{3}$$

Ответ: $1608\pi - 768 + 64\sqrt{3}$

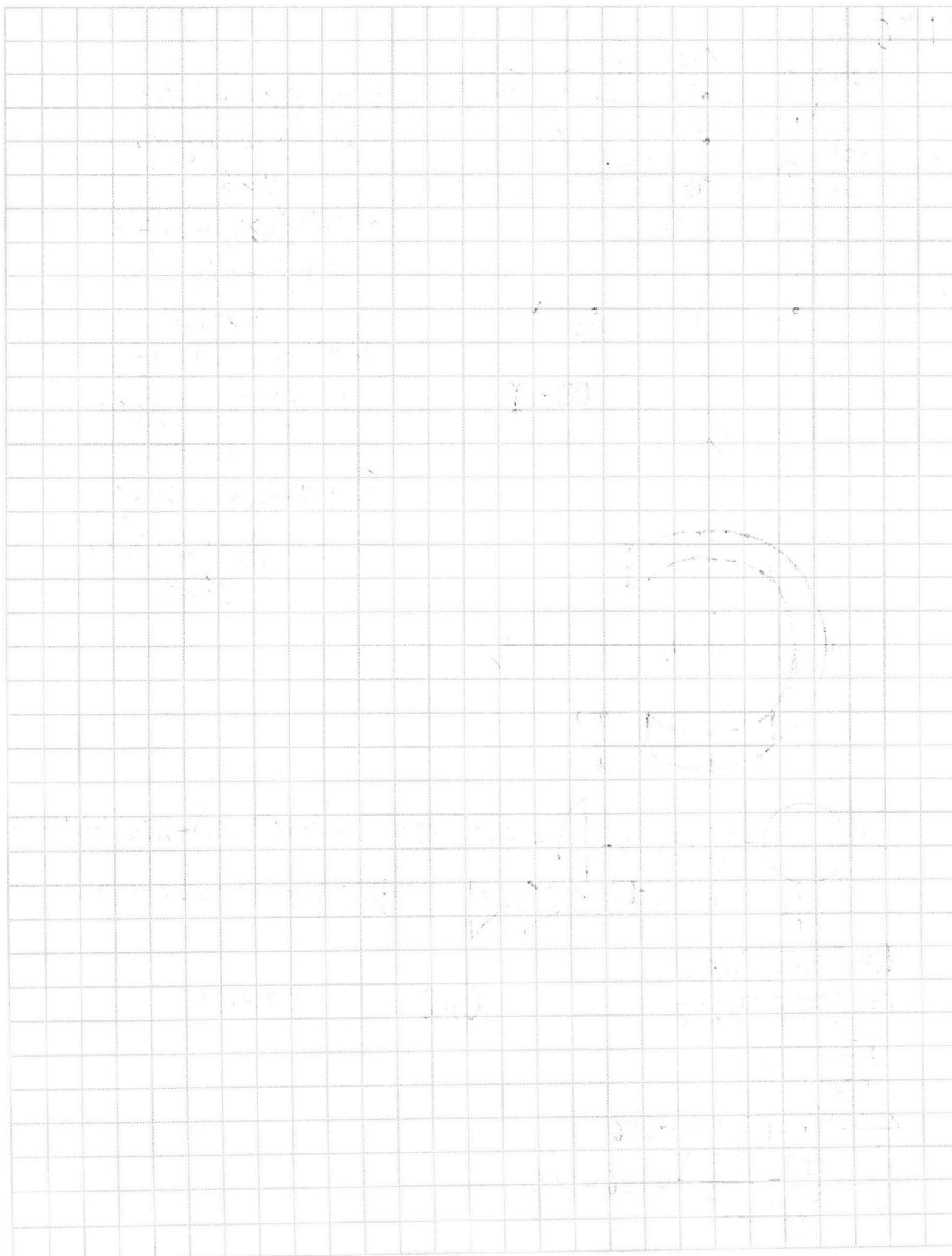


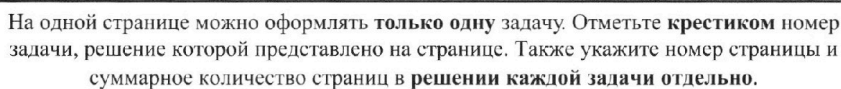
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

X-коробок

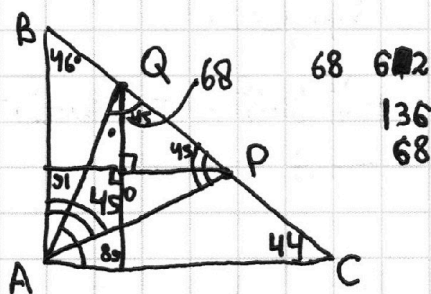
$$\frac{3}{x} \cdot \frac{3}{x} \cdot \frac{3}{x} \cdot$$

р-в коробке лежит шар

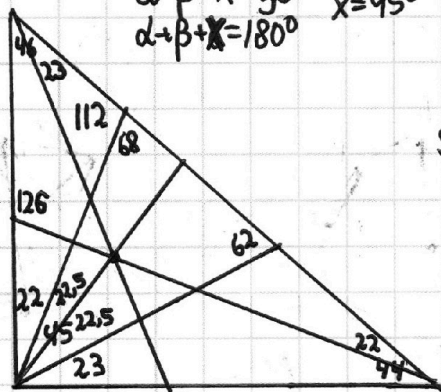
9-в коробке не летит шар

$$A^p B^q \cdot C^r_{p+q} = \frac{27(x-3)^3}{x^5} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = \frac{270(x-3)^3}{x^6}$$

$$P_1=3 \quad P_2=3 \quad \frac{27}{x^3} \cdot \frac{(x-3)^7}{x^7} \cdot C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120 \cdot 27 (x-3)$$



$$\begin{aligned} \alpha + \beta - x &= 90^\circ \\ \alpha + \beta + x &= 180^\circ \end{aligned} \quad x = 45^\circ$$



$$\begin{array}{r} 469 \overline{) 23} \\ \underline{23} \\ 0 \end{array}$$

$$9+4=\sqrt{13}$$

$$\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$9 + \frac{469}{39} \frac{13}{3}$$

9+4601

$$\begin{array}{r} 469 \overline{) 19} \\ - 38 \\ \hline 89 \end{array}$$

$$\frac{-3+23}{10} = -2,6 \quad a)$$

$$x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4$$

b; d x_1 x_2 x_3 x_4

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 + X_2 = a^2 - 4a \\ X_1 X_2 = a^2 - 6a + 4 \\ X_3 + X_4 = a^3 - 4a^2 \\ X_3 X_4 = -2a^3 - 6a - 15 \\ X_1 + X_2 = X_3 + X_4 \end{array} \right.$$

$$a^2 - 4a = a^3 - 4a^2$$

$$a(a^2 - 4a) = 0$$

$$\begin{bmatrix} a=0 \\ a=-2 \\ a=2 \end{bmatrix}$$

$$a^2 - 4a = a^3 - 4a^2$$

$$a^3 - 4a^2 - a^2 + 4a$$

a/



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

