



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа  $x, y, z$  удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $(x - 6)^2 + (y - 6)^2 + (z - 6)^2$ , если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа  $n$  состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа  $n^3$ ?
3. [5 баллов] Окружность  $\omega$  с диаметром  $AB$  пересекает сторону  $BC$  остроугольного треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Точка  $F$  выбрана на отрезке  $AC$  так, что  $DF \perp AC$ , а  $E$  — точка пересечения отрезка  $DF$  с окружностью  $\omega$ , отличная от  $D$ . Найдите  $AF$ , если  $AC = 20$ ,  $AB = 10$ ,  $BE = 9$ .
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарик. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых корни уравнения  $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$  являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения  $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$  являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура  $\Phi$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют неравенству  $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$ . Фигуру  $\Phi$  непрерывно повернули вокруг начала координат на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Найдите площадь множества  $M$ , которое замела фигура  $\Phi$  при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе  $BC$  прямоугольного треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что  $AB = BP$ ,  $AC = CQ$ . Внутри треугольника  $ABC$  выбрана точка  $D$ , для которой  $DP = DQ$ , а  $\angle PDQ = 90^\circ$ . Найдите  $\angle DCB$ , если известно, что  $\angle CBA = 46^\circ$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Итак число представим в виде  $10^{20001} - 1$ .

$$n^3 = (10^{20001} - 1)^3 = 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1.$$

$$\begin{array}{r} 99 \dots 9700 \dots 0 \\ \hline 20000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,99 \dots 9 \\ \hline 20001 \end{array}$$

+

=

$$\begin{array}{r} 99 \dots 97000 \dots 029 \dots 9 \\ \hline 20000 \quad 20000 \quad 20001 \end{array}$$

Всего ребро  $20000 + 20001 =$

$$= 40001$$

Ответ: 40001



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вероятность быть провон в 1 секунду для  
каждого элементарного случая  $\rightarrow 1/10$

$$\frac{3}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{n-3}{d} \cdot \frac{n-4}{e} \quad \text{где}$$

$a, b, c, d, e$  — это числа от 1 до  $n-4$ .

Элементарных случаев  $C_5^3$ .

значит всю вероятность

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)} \cdot C_5^3 = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_5^3$$

Аналогично во второй раз

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) \cdot (n-7) \cdot (n-8)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) \cdot (n-7) \cdot (n-8)} \cdot C_9^3 =$$

$$= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_9^3. \quad \text{Вероятность увеличилась}$$

$$\frac{\frac{6}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_9^3}{\frac{6}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_5^3} = \frac{C_9^3}{C_5^3} = \frac{\frac{9!}{3! \cdot 6!}}{\frac{5!}{3! \cdot 2!}} = \frac{9! \cdot 3!}{5! \cdot 6!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 9}{5} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 9}{10} = \frac{63 \cdot 4}{10} = \frac{252}{10} = 25,2.$$

Ответ: в 25,2 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что  $6 \Rightarrow$  член в сумме равен

$5$  и  $8$ . но  $7$  вне  $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

и  $3$  1 уравнение:  $-\frac{b}{a} = \frac{a^2 - 4a}{5}$

и  $3$  2 уравнение:  $-\frac{b}{a} = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$  или равен

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$(a^2 - 4a) \cdot (5 - a) = 0$$

$$a(a-4)(5-a) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 & \textcircled{1} \\ a = 4 & \textcircled{2} \\ a = 5 & \textcircled{3} \end{cases}$$

Последовательно от

$a_1, a_2, a_3 \dots$

пусть для удобства  
последовательность  
возрастающая  
удобнее - это  
логично.

① проверим:  $x^2 - 0x + 4 = 0$   $x^2 + 4 = 0$  корней нет.

② проверим:  $x^2 - 0x + 16 - 24 + 4 = 0$   $(x-2)(x+2) = 0$   
значит  $4a = 4$ .

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$5x^2 - 0x - 2 \cdot 64 - 6 \cdot 4 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 167 = 0 \quad x = \sqrt{\frac{167}{5}} \quad \text{или} \quad x = -\sqrt{\frac{167}{5}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что числа  $-2$  и  $-\sqrt{\frac{167}{5}}$  отличаются не на 4.  
прямоборение.

$$\textcircled{B} \quad x^2 - 5x + 25 - 20 + 4 = x^2 + 5x - 1 \quad D = 25 + 4 = 29$$

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} \quad \text{и лг} \quad \frac{-5 + \sqrt{29}}{2} = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2} = \frac{2\sqrt{29}}{2} = \sqrt{29} = \sqrt{29}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{29}}{2}$$

$$5x^2 - 5 \cdot 5x - 5 \cdot (2 \cdot 25 + 6 + 3) = 0$$

$$x^2 - 5x - 59 = 0$$

$$D = 25 + 4 \cdot 59 = 25 + 236 = 261 = (3\sqrt{29})^2$$

~~и~~ Аналогично разность  $3\sqrt{29}$  и  $3\sqrt{29}$  и  $3\sqrt{29}$  и  $3\sqrt{29}$ . Значит лг  $3\sqrt{29}$ .

$$\rightarrow \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}; \frac{5 - \sqrt{29}}{2}; \frac{5 + \sqrt{29}}{2}; \frac{5 + 3\sqrt{29}}{2}$$

являются членами арифм. прогрессии

с шагом  $\sqrt{29}$  и ~~перым~~ элементом

$$a_5 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2}; \quad a_1 = \frac{5 - 3\sqrt{29}}{2} - 4\sqrt{29}$$

~~и~~ Ответ:  $a = 5$ .

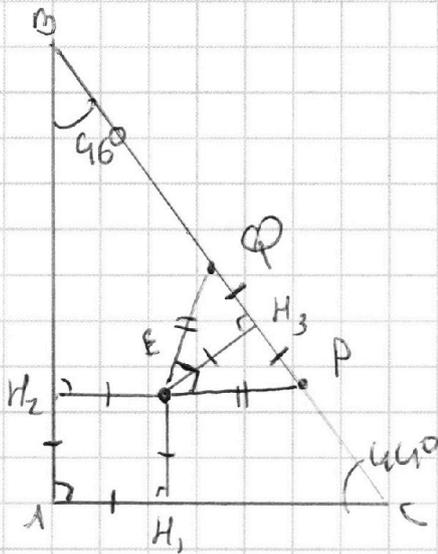


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Возьмем угол вписанной окружности  $E$ .  $EH_1 = EH_2 = EH_3$ .

$AH_2 EH_1$  - квадрат  $\Rightarrow EH_1 = AH_2$ .

По св-ву равенства касательных из окружности из одной точки

$BH_2 = BH_3$ ;  $CH_3 = CH_1$

ортогонально углу.  $BA = BP$

$\Downarrow$   
 $AH_2 = PH_3$

Аналогично  $QH_3 = AH_1$ , следовательно  $QH_3 = EH_3 = PH_3$ .

$EH_3$  - середина  $QP$ .  $\Rightarrow EH_3$  медиана  $\triangle EQP$ .

по св-ву медианы равной половине стороны, на которую она опирается,  $\angle QEP = 90^\circ$ .

$EH_3$  - середина  $\Rightarrow QE = PE$ .

Точка  $E$  удовлетворяет всем условиям точки  $D$ . Пусть еще  $D \neq E$ . тогда: срежем срезами для  $P, Q, D_1, D_2$ .

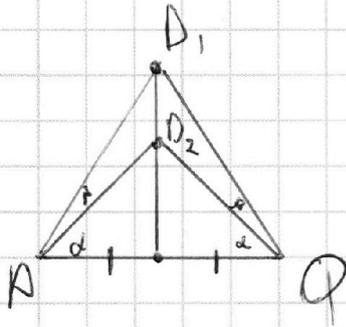


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.к.  $D_1P \perp PQ$ ;  $D_2P \perp D_2Q$ , то они лежат на перпендикулярах к  $D_2PQ$  и  $D_1PD_2$ .

Рисунок симметричен,

$$\angle PD_2Q = 180 - 2\alpha \quad \angle PD_1Q = 180 - 2\alpha - 2\beta$$

$\beta = 0^\circ$ ; следовательно  $D_1$  и  $D_2$  совпадают.

Значит, хорда  $CD$  — точка  $O$  на  $CD$  и  $E$ .

$E$  лежит на биссектрисах, т.к. центр вписанной.

$$\angle ECB = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} (90^\circ - 44^\circ) = \frac{1}{2} (44^\circ) = 22^\circ$$

Ответ:  $22^\circ$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

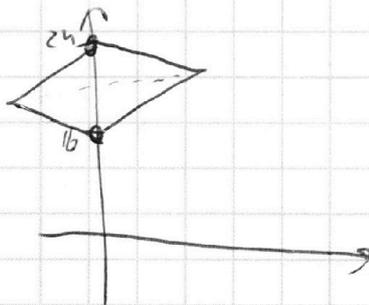
СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 + z^2 + 108 - 12(x + y + z)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 108 + 2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2 =$$

$$= \frac{2xy + 2yz + 2zx}{x^2 y^2 z^2} = k$$



$$\frac{2y - z^2}{z} = \frac{2z - x^2}{x} = \frac{2x - y^2}{y}$$

$$x^2 y - z^2 x = y z^2 - x^2 z$$

$$xy(x - y) = z^2(x - z)$$

$$(1 - 6)^2 + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{(x - 6)x^2 + 1}{x^2}$$

$$xy = -6z + z^2$$

$$z^2 - 6z - xy = 0$$

$$\frac{x^2 y^3}{z^2} + \frac{x^2 z^3}{y^2} + \frac{z^2 y^2}{x^2} = k$$

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

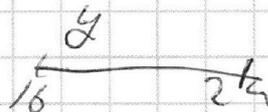
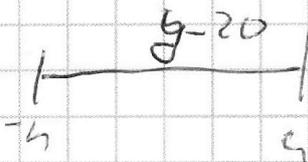
$$\left(y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right) =$$

$$2(y - 20)^2 + 2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left((y - 20)^2 - \left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2\right) =$$

$$= 4(y - 20)^2 + 2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2, \text{ при условии что}$$

$$(y - 20)^2 \leq 16$$

$$|y - 20| \leq 4$$



$$\begin{aligned} 128 - 24 &= 104 & \sqrt{3} & \approx 1.732 \\ & & & \approx 96 \\ 32 & & & \\ 32 & \sqrt{15} & & \end{aligned}$$

$$-128 - 24 - 15 =$$

2 -

$$\begin{array}{r} 261 \phantom{0} \\ - 78 \phantom{0} \\ \hline 183 \phantom{0} \\ - 81 \phantom{0} \\ \hline 102 \phantom{0} \end{array}$$

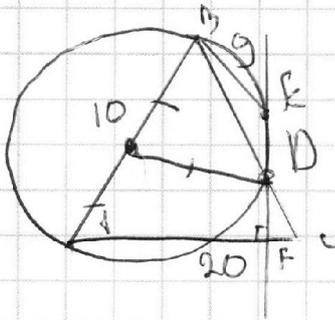


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



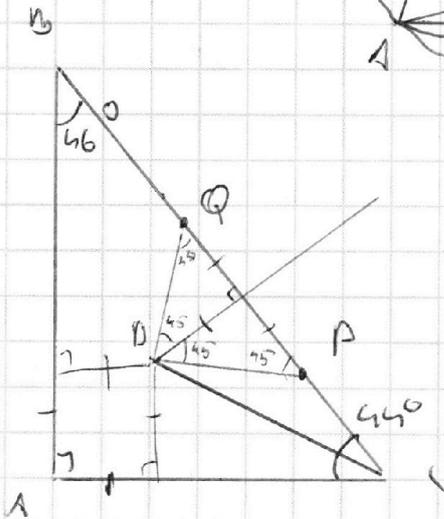
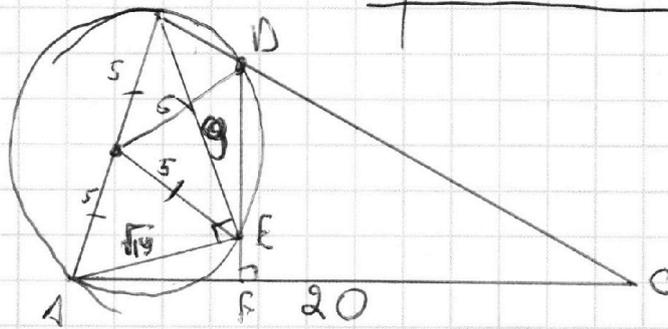
$$y - 20 > 0$$

$$2y - 40 \leq 8$$

$$\frac{-6}{2}$$

$$x^2 - 5x + 1 \leq 0$$

$$5x^2 - 25x - 415 < 0$$



$$\frac{-a^2 + 4a}{4} = \frac{-a^2 + 4a^2}{5}$$

$$Q = 5$$

$$y^2 + x^2 + z^2 + 2xy - 2z^2 + 2xz + 2yz - 2y^2 - 2x^2 + 10z$$

$$= 2(xy + xz + yz) - (x^2 + y^2 + z^2) + 10z$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

коробок n h-3 -плохих.

$$27x - 2y^2$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 = 1000000 - 300000 + 300 - 1$$

$$= 970000 + 300 - 1 = 970299$$

$$xy + yz + zx + 108 - 6x - 6y - 6z + 108$$

$$\frac{xy}{z^2} = z - 6$$

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_3^3$$

$$\frac{x^2 z^2}{y^2} + \frac{z^2 y^2}{x^2}$$

$$(a-b)^3 = \frac{63 \cdot 4}{12} = \frac{24}{252}$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} =$$

$$\frac{6}{n(n-1)(n-2)}$$

$$(10^{20001} - 1)^3 =$$

$$= 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1$$

$$b^2 - \text{час} =$$

$$= (a^2 - 4a)^2 -$$

$$= 4a^2 + 24a - 16$$

$$\frac{9 \quad 9}{60003}$$

$$a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 =$$

$$= a^4 - 8a^3 + 8a^2 + 24a - 16 =$$

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) \cdot C_3^3$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) \cdot C_3^3$$

$$= a^4 - 8a^3 + 4a^2 + 4(a^2 + 6a - 4)$$