



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left| y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| + \left| y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}} \right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нате число преобразить в виде $10^{20001} - 1$.

$$n^3 = (10^{20001} - 1)^3 = 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1.$$

$$\begin{array}{r} 99 \dots 9700 \dots 0 \\ \hline 20000 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,99 \dots 9 \\ \hline 20001 \end{array}$$

+

=

$$\begin{array}{r} 99 \dots 97000 \dots 029 \dots 9 \\ \hline 20000 \quad 20000 \quad 20001 \end{array}$$

Всего ребро $20000 + 20001 =$

$$= 40001$$

Ответ: 40001



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вероятность быть провалом в 1 ситуацию для
каждого элементарного случая $\rightarrow 1/5$

$$\frac{3}{a} \cdot \frac{2}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot \frac{n-3}{d} \cdot \frac{n-4}{e} \quad \text{где}$$

a, b, c, d, e — это числа от $n-4$.

Элементарных случаев C_5^3 .

Значит всю вероятность

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)} \cdot C_5^3 = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_5^3$$

Аналогично во второй раз

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) \cdot (n-7) \cdot (n-8)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) \cdot (n-7) \cdot (n-8)} \cdot C_9^3 =$$

$$= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_9^3. \quad \text{Вероятность увеличилась}$$

$$\frac{\frac{6}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_9^3}{\frac{6}{n(n-1)(n-2)} \cdot C_5^3} = \frac{C_9^3}{C_5^3} = \frac{\frac{9!}{3! \cdot 6!}}{\frac{5!}{3! \cdot 2!}} = \frac{9! \cdot 3!}{5! \cdot 6!} =$$

$$= \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 9}{5} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 9}{10} = \frac{63 \cdot 4}{10} = \frac{252}{10} = 25,2.$$

Ответ: в 25,2 раза.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $6 \rightarrow$ член в сумме равен

5 и 8 . но 7 вне $x_1 + x_2 = \frac{-6}{10}$

из 1 уравнения: $-\frac{6}{a} = \frac{a^2 - 4a}{5}$

из 2 уравнения: $-\frac{6}{a} = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$ Ой и равен

$$a^2 - 4a = \frac{a^3 - 4a^2}{5}$$

$$(a^2 - 4a) \cdot (5 - a) = 0$$

$$a(a-4)(5-a) = 0$$

$$\begin{cases} a = 0 & (1) \\ a = 4 & (2) \\ a = 5 & (3) \end{cases}$$

последовательно стб

$a_1, a_2, a_3 \dots$

пусть для удобства
последовательности
возрастающие.
удобнее - это
логично.

(1) проверим: $x^2 - 0x + 4 \leq 0$ $x^2 + 4 \leq 0$ корней нет.

(2) проверим: $x^2 - 0x + 16 - 24 + 4 \leq 0$ $(x-2)(x+2) \leq 0$
значит $4 \leq 4$.

$$\begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$5x^2 - 0x - 2 \cdot 64 - 6 \cdot 4 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 \leq 0$$

$$5x^2 - 167 \leq 0 \quad x \leq \sqrt{\frac{167}{5}} \quad \text{или} \quad x \leq -\sqrt{\frac{167}{5}}$$

Точка E удовлетворяет всем условиям
точки D . Пусть еще $D \neq E$. Тогда:
Средняя черта для P, Q, D_1, D_2 .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

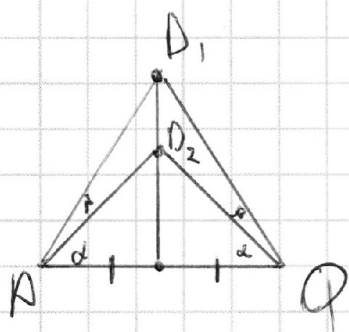
5
☐

6
☐

7
☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Т.к. $BD_1 \subset BQ$; $CD_2 \subset CQ$, то
они лежат на пересечении.

пусть $\angle D_2 B Q = 2$; $\angle D_1 P D_2 = \beta$.

Рисунок симметричен,

$$\angle P D_2 Q = 180 - 2\alpha = \angle P D_1 Q = 180 - 2\alpha - 2\beta$$

$\Downarrow$

$\Downarrow$

$\beta = 0^\circ$; следовательно

D_1 и D_2 совпадают.

Значит, пересечение точек BD_1 и CD_2 —

лежит на биссектрисах, т.е. центр вписанной,

$\Downarrow$

$$\angle ECB = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} (90^\circ - 44^\circ) = \frac{1}{2} (44^\circ) = 22^\circ.$$

Ответ: 22°



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

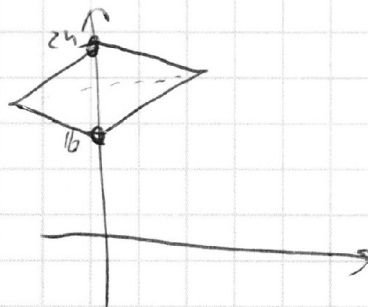
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 + z^2 + 108 - 12(x + y + z)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 108 + 2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2 =$$

$$= \frac{2xy + 2yz + 2zx}{x^2 y^2 z^2} = k$$



$$\frac{1y - z^2}{z} = \frac{yz - x^2}{x} = \frac{zx - y^2}{y}$$

$$x^2 y - z^2 x = yz^2 - x^2 z$$

$$xy(x - y) = zx(z - x)$$

$$(1 - 6)^2 + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{(1 - 6)x^2 + 1}{x^2}$$

$$xy = -6z + z^2$$

$$z^2 - 6z - xy = 0$$

$$\frac{x^2 y^2}{z^2} + \frac{x^2 z^2}{y^2} + \frac{z^2 y^2}{x^2} = k$$

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{x^2} = k$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

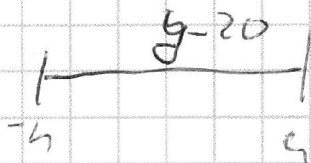
$$\left(y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left(y-20+\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)\left(y-20-\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) =$$

$$2(y-20)^2 + 2\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2 + 2\left((y-20)^2 - \left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)^2\right) =$$

$$= 4(y-20)^2 \leq 64, \text{ при условии что}$$

$$(y-20)^2 \leq 16$$

$$|y-20| \leq 4$$



$$\begin{array}{r} 128 - 24 = 104 \\ 104 : 32 = 3.25 \\ 3.25 \cdot 32 = 104 \end{array}$$

$$-128 - 24 - 15 =$$

2 -

$$\begin{array}{r} 261 / 9 \\ 18 \quad \overline{) 261} \\ 18 \quad \underline{-} \quad 81 \\ 81 \quad \underline{-} \quad 0 \end{array}$$

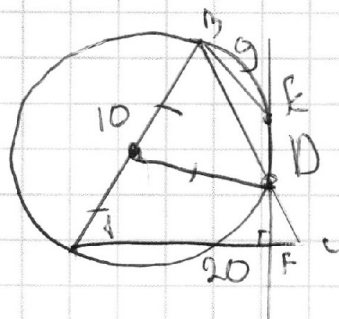


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



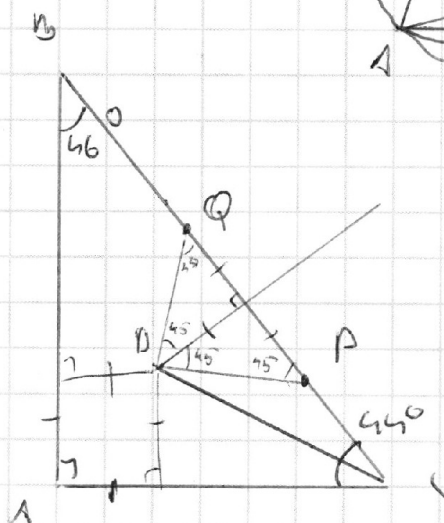
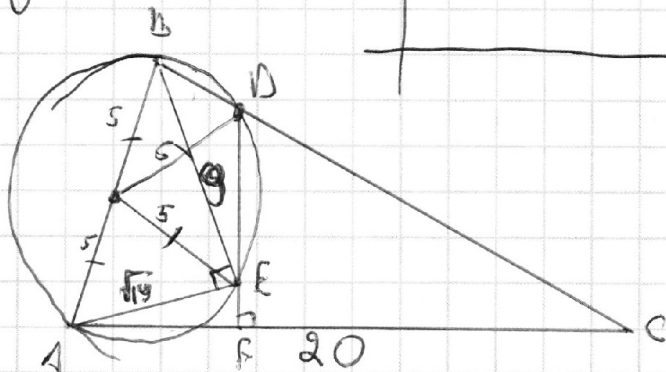
$$\frac{-6}{2}$$

$$y - 20 > 0$$

$$2y - 40 \leq 8$$

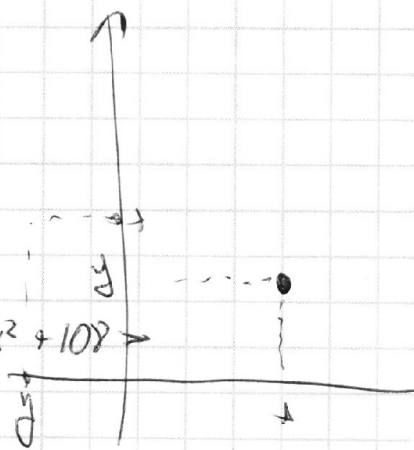
$$x^2 - 5x + 1 \leq 0$$

$$5x^2 - 25x - 415 \leq 0$$



$$\frac{-a^2 + 4a}{4} > \frac{-a^2 + 4a^2}{5}$$

$$Q \geq 5$$



$$y^2 + x^2 + z^2 + 2xy - 2z^2 + 2xz + 2yz - 2y^2 - 2x^2 + 108 >$$

$$= 2(xy + xz + yz) - (x^2 + y^2 + z^2) + 108$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

коробок n $n-3$ - плохих.

$$12x - 2y^2$$

$$x^2 - 12x + 36 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 12z + 36 = 470299$$

$$xy + yz + zx + 108 - 6x - 6y - 6z + 108$$

$$\frac{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)} \cdot C_5^3$$

$$\frac{xy}{z^2} + \frac{x^2z^2}{y^2} + \frac{z^2y^2}{x^2}$$

$$(a-b)^3 = \frac{63 \cdot 4}{12} = \frac{24}{252}$$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} =$$

$$(10^{20001} - 1)^3 =$$

$$b^2 - 4ac =$$

$$= (a^2 - 4a)^2 -$$

$$= 4a^2 + 24a - 16$$

$$= 10^{60003} - 3 \cdot 10^{40002} + 3 \cdot 10^{20001} - 1$$

$$\frac{9 \cdot 9}{60003}$$

$$a^4 - 8a^3 + 16a^2 - 4a^2 + 24a - 16 =$$

$$= a^4 - 8a^3 + 8a^2 + 24a - 16 =$$

$$3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-3) \cdot (n-4) \cdot (n-5) \cdot (n-6) \cdot (n-7) \cdot (n-8) \cdot C_9^3$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8) \cdot C_9^3$$

$$= a^4 - 8a^3 + 4a^2 + 4(a^2 + 6a - 4)$$