



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

10 КЛАСС. Вариант 8



1. [4 балла] Ненулевые числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} xy = -6z + z^2, \\ yz = -6x + x^2, \\ zx = -6y + y^2. \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $(x-6)^2 + (y-6)^2 + (z-6)^2$, если известно, что система имеет хотя бы одно решение в ненулевых числах.

2. [2 балла] Десятичная запись натурального числа n состоит из 20 001 девятки. Сколько девяток содержит десятичная запись числа n^3 ?
3. [5 баллов] Окружность ω с диаметром AB пересекает сторону BC остроугольного треугольника ABC в точке D . Точка F выбрана на отрезке AC так, что $DF \perp AC$, а E — точка пересечения отрезка DF с окружностью ω , отличная от D . Найдите AF , если $AC = 20$, $AB = 10$, $BE = 9$.
4. [4 балла] В телеигре ведущий берет несколько коробок и ровно в три из них кладет по одному шарiku. Игрок может указать на пять коробок и открыть их. Если в этих коробках лежат все три шарика, то игрок выигрывает. Игроку разрешили открыть девять коробок. Во сколько раз увеличилась вероятность выигрыша игрока?
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения $x^2 - (a^2 - 4a)x + a^2 - 6a + 4 = 0$ являются шестым и седьмым членами некоторой непостоянной арифметической прогрессии, а корни уравнения $5x^2 - (a^3 - 4a^2)x - 2a^3 - 6a - 15 = 0$ являются пятым и восьмым членами этой прогрессии.
6. [5 баллов] На координатной плоскости построена фигура Φ , состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют неравенству $\left|y - 20 + \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| + \left|y - 20 - \frac{x}{2\sqrt{3}}\right| \leq 8$. Фигуру Φ непрерывно повернули вокруг начала координат на угол π против часовой стрелки. Найдите площадь множества M , которое замела фигура Φ при этом повороте.
7. [6 баллов] На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $AB = BP$, $AC = CQ$. Внутри треугольника ABC выбрана точка D , для которой $DP = DQ$, а $\angle PDQ = 90^\circ$. Найдите $\angle DCB$, если известно, что $\angle CBA = 46^\circ$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = 2(2-g) \\ y^2 = x(x-g) \\ 2x = y(y-g) \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{N1} \\ x, y, 2 \neq 0 \end{matrix}$$

$$2(2-g) = xy$$

$$\frac{2}{x} 2(2-g) = \frac{2}{x} xy = 2y = x(x-g)$$

$$2(2-g) \frac{2}{x} = x(x-g)$$

N2

$$n = \underbrace{999 \dots 99}_{20001 \text{ циф.}} = 10^{20001} - 1$$

$$n^3 = (10^{20001} - 1)^3 = 10^{3 \cdot 20001} - 3 \cdot 10^{2 \cdot 20001} + 3 \cdot 10^{20001} - 1$$

$$10^{1 \cdot 20001} - 3 \cdot 10^{1 \cdot 20001} = 10^{2 \cdot (20001)} (10^{20001} - 3)$$

$$\begin{matrix} 11 \\ 9999 \dots 97 \\ 20000 \end{matrix}$$

$$3 \cdot 10^{20001} - 1 = \underbrace{29999 \dots 9}_{20001}$$

$$10^{2 \cdot 20001} \cdot \left(\underbrace{9999 \dots 97}_{20000} + \underbrace{29999 \dots 9}_{20001} \right) = n^3$$

Всего 40001 цифра

Ответ: 40001 цифра

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

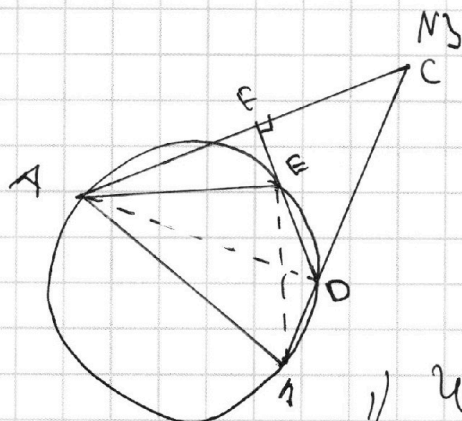
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано: $AC = 20$
 $AB = 10$
 $BE = 9$

Найти:
 $AF = ?$

$$1) \text{ Чем: } \angle EDB \in W \Rightarrow \angle ADB = 180^\circ - \angle AED = \angle AEF$$

$$AB \text{ - диаметр } \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ = \angle AFB \quad \left| \Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle ADB \Rightarrow \right.$$

$$\Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AF = AD \cdot \frac{AE}{AB}$$

$$2) \angle EAB = 180^\circ - \angle EDB = \angle PDC = 180^\circ - 90^\circ - \angle C$$

$$\angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \angle ADC = 90^\circ \Rightarrow \angle CAD = 180^\circ - 90^\circ - \angle C =$$

$$= \angle PDC = \angle EAB$$

$$\angle ADC = 90^\circ = \angle AEB \quad \left| \Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle AEB \Rightarrow \right.$$

$$\angle CAD = \angle EAB$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AD = \frac{AC}{AB} \cdot AE$$

$$3) AF = \frac{AC}{AB} \cdot AB \cdot \frac{AE}{AB} = \frac{AC \cdot AB^2}{AB^2} \cdot \frac{AC \cdot AE^2}{AB^2}$$

$$4) \angle AEB = 90^\circ \Rightarrow \text{по т. Пифагора } AE^2 = AB^2 - BE^2 = 19$$

$$5) AF = \frac{20 \cdot 19}{100} = \frac{38}{10} = 3,8$$

Ответ: $AF = 3,8$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) 5 шаров

Пусть всего шаров a

$P_1 = \frac{\frac{(a-5)!}{2! \cdot (a-5)!} \cdot \frac{a!}{5! \cdot (a-5)!}}{a!} = \frac{(a-5)! \cdot 5!}{2! \cdot a!}$

количество шаров, содержащих шарик * 1

2) 9 шаров

$P_2 = \frac{\frac{(a-9)!}{6! \cdot (a-9)!} \cdot \frac{a!}{9! \cdot (a-9)!}}{a!} = \frac{(a-9)! \cdot 9!}{6! \cdot a!}$

количество шаров с шариком * 2

всего шаров

$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{(a-9)! \cdot 9!}{6! \cdot a!}}{\frac{(a-5)! \cdot 5!}{2! \cdot a!}} = \frac{9! \cdot 2!}{5! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 2 \cdot 3}{5} = \frac{42}{5} = 8,4$

- *1 9 шаров можно выбрать 5-5 шаров из всех шаров с шариком
- *2 9 шаров можно выбрать 9-0 шаров из всех шаров с шариком

Ответ: $\frac{P_2}{P_1} = 8,4$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По н. Поня

$$\begin{cases} p_6 + p_7 = a^2 - 4a \\ p_5 + p_6 = \frac{a^2 - 4a^2}{5} \end{cases}$$

$$p_6 + p_7 = p_5 + p_6$$

$$a^2 - 4a = (a^2 - 4a^2) \frac{1}{5}$$

$$a^2(a-4) = a^2(a-4)$$

$$0 = (a-4)(a^2 - a) = (a-4) \cdot a(a-1)$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=4 \\ a=1 \end{cases}$$

$$a(a-4) = a^2(a-4) \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{1}{5}a^2 - a\right)(a-4) = 0$$

$$a\left(\frac{1}{5}a - 1\right)(a-4) = 0$$

$$a(5a-5)(a-4) = 0$$

$$\begin{cases} a=0 \\ a=5 \\ a=4 \end{cases}$$

$$1) x^2 - (a^2 - 4a)x^2 - 0x + 4 = 0 \quad x^2 + 4 \geq 0 \quad x^2 = -4 - \text{противоречие}$$

$$2) x^2 + 16 - 24 + 4 \geq x^2 - 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2 \Rightarrow p_5 = -6 \quad p_6 = 2 \quad p_7 = 12$$

$$p_8 = 6$$

$$5x^2 - 2 \cdot 64 - 24 - 15 \geq 0$$

$$5x^2 - 126 - 24 - 15 \geq 0 \Rightarrow 5x^2 \geq 167 \Rightarrow x \geq \pm \sqrt{\frac{167}{5}} \neq \pm 6 - \text{противоречие}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3) \quad x^2 - 5x + 25 - 20 + 4 = 0 \quad D = 25 + 4 = 29$$

$$x^2 - 5x - 120$$

$$p_{0,2} = x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2} \approx 2,5 \pm \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$5x^2 - 25x - 250 - 30 - 10 = 0$$

$$x^2 - 5x - 80 - 6 - 2 = 0$$

$$x^2 - 5x - 89 = 0$$

$$D = (25 + 58 \cdot 4) =$$

$$= 25 + 232 = 257$$

$$p_{0,2} = x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{257}}{2} \approx 2,5 \pm \frac{\sqrt{257}}{2}$$

~~не входит в арифметическую прогрессию~~

Ответ: $a = 25$ ~~не входит в арифметическую прогрессию~~

- противоречие

Ответ: $a \in \emptyset$



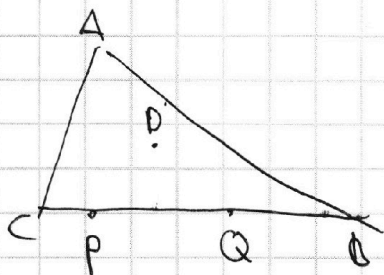
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

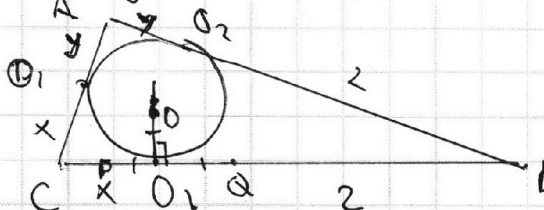
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7



Даны $\triangle ABC$ остроугольные



$$CQ = QA$$

$$x + O_3Q = x + y$$

$$O_3Q = y$$

$$BP = PA$$

$$z + O_3P = z + y$$

$$O_3P = y$$

$$D_1, DP = DQ \Rightarrow D \in \text{перп к } CA \text{ и } CB$$

O_3

$$O_3P = O_3Q \Rightarrow O_3D = O_3Q = y$$

$$\text{Известно } \triangle DO_3C \sim \triangle DAC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle DC O_3 = \angle CAD = 46^\circ$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик: 4

$$x^2 - 12x + 36$$

$$2(2-6) \cdot \frac{2}{x} = x(x-6)$$

$$x^2 - 6x + 36 - 12x$$

$$2(2-6)2 = x(x-6)x$$

$$xy = 2(2-6)$$

$$y^2 + 12$$

$$2-6 = \frac{xy}{2}$$

$$xy = 2(2-6)$$

$$xxxy = x^2(2-6) = y(y-6)(2-6)$$

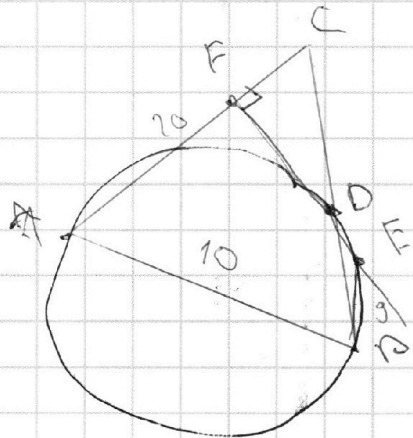
$$\left(\frac{xy}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y^2}{x}\right)^2$$

$$(y-6)(2-6)(x-6) = \frac{xy \cdot y^2 - 2x}{xy \cdot 2}$$

$$= xy \cdot 2$$

$$x^4 y^4 + x^4 y^2 + y^2 y^2$$

$$\geq 36$$



$$\frac{x}{2} \cdot \frac{y^2}{x} = y^2$$

$$(x+y+2)^2 = x^2 + y^2 + 2^2 + 2(xy$$

$$(x-6)^2 + (y-6)^2 + x^2 + y^2 + 2^2$$

$$\frac{x}{2}(2-6) = xy - 6 \frac{xy}{2}$$

$$(x+y+2)^2 - 6(x+y+2-16)$$

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + xy =$$

$$= 2(2-6) \cdot x(y-6) + (2-6)(x-6) +$$

$$+ (2-6)2 = (2-6)(y-6) + (x-6) + 2$$

$$\frac{2y}{x-6} = x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(y^2+6x)(2x+6y)$
 $x(x-6) - 6(x-6) = 2xy$
 $\sqrt{100-81} = 6.5 = AE$

$\frac{x^2y^2}{2^2} = 2$
 $(x+y+2)^2 = 3(x+y+2) + (x+y+2)$
 $2y - 6 \frac{2y}{x} = (2y)^2$
 $\frac{2}{1 + \frac{6}{x}} = 2$
 $2y(1 - \frac{6}{x}) = (2y)^2$
 $1 - \frac{6}{x} = 2y$
 $x(6-x) = 1 - \frac{6}{x}$
 $1 - \frac{6}{x} = \frac{2y}{x^2}$
 $x^2(6-x) = x-6$

$\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$
 $AF = AD \cdot \frac{AE}{AB}$
 $\frac{AF}{AE} = \frac{AD}{AB}$
 $AF = AE \cdot \frac{AD}{AB}$
 $ACD \sim FCD \sim AEB$
 $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB}$
 $AD = AE \cdot \frac{AC}{AB}$
 $AB = \frac{2y \cdot \sin 46^\circ}{2y \cdot xy \cdot \sin 46^\circ} = \frac{2y \cdot x^2}{2y \cdot xy \cdot \sin 46^\circ} = \frac{x^2}{x \cdot \sin 46^\circ} = \frac{x}{\sin 46^\circ}$

$2x \cdot (x+y+2)$
 $(x+y+2)h$

$2y \cdot \sin 46^\circ$
 $2y \cdot xy \cdot \sin 46^\circ = x+y+2 \cdot h$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$\frac{\frac{(a-5)!}{2! \cdot (a-5)!}}{a!} = \frac{(a-5)! \cdot 5!}{2! \cdot a!}$$

$$\frac{\frac{(a-3)!}{6! \cdot (a-3)!}}{a!} = \frac{(a-5)! \cdot 8!}{6! \cdot a!} \quad \frac{(a-4)! \cdot 9!}{6! \cdot a!}$$

$$(x+y+z-16)^2 = (x-6)^2 + (y-9)^2 + (z-6)^2 + 2(x^2+y^2+z^2)$$

$$x-6 = \frac{2y}{x}$$

$$62x - \frac{2y}{x} = \frac{x^2 - 2x}{x} \quad (x-6)(y-6) = \frac{y^2}{x} \cdot \frac{x^2}{y} = 2^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx)$$

$$(y-6)(z-6) = y(y-6)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 - 0x + 4 = 0$$

$$x^2 + 4 = 0 - np$$

$$x^2 + 3x - 12 = 0$$

$$q^2 + 3qh = q(q+3h) = -\frac{2a^2 + 6a + 15}{5}$$

$$q^2 + 3qh + h^2 = (q+h)(q+2h) = (q^2 - 6a + 4)$$

$$D = 9 + 4 = 13$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x^2 + 16 - 24 + 4 = x^2 - 4 \quad x = \pm 2$$

$$5x^2 - 2 \cdot 64 - 6 \cdot 4 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 128 - 24 - 15 = 0$$

$$5x^2 - 167 - 15 = 0$$

$$x^2 - 5x + 25 - 30 + 4 = 0 \quad x^2 - 5x - 1 = 0$$

$$D = 25 + 4 = 29$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

$$5x^2 - 5x - 250 - 30 - 15 = 0$$

$$x^2 - 5x - 50 - 6 - 15 = 0$$

$$x^2 - 5x - 61 = 0$$

$$D = 25 + 244 = \sqrt{269}$$

$$= 5 \pm \sqrt{269}$$

$$-450$$

$$-50 - 6 - 3 = -58$$

$$\frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{29}}{2} \times 2 =$$

$$\sqrt{29}$$

$$\times 2$$

$$2\sqrt{29}$$

$$112$$

$$200 + 32$$

$$232 + 25 = 257$$

$$59 \times 4 = (200 + 36) \cdot 4 = 876$$

$$206 + 25 = 231$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик

$$(\ast 6) x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0 \rightarrow$$

$$2(x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2)$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2$$

$$2(x^2 + y^2 + 2x) - x^2 - y^2 - 2 = 0$$

$$2x^2 - x^2 = x^2$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 - 6x + 36 = (x-6)^2 + 6(6-x) = 6y^2 - 6y + 9$$

$$y^2 + 2x + xy + 6(6-x-y-2)$$

$$x^2 + xy + y^2 =$$

$$xy - y^2 - \frac{6}{x}$$

$$= (x^2 + y^2 + 6y) + 6(2-x) + y^2 + 6x =$$

$$= 6(x+y) + 2(x+y+2-6)$$

$$D = (a^2 - 4a)^2 - 4(a^2 - 6a + 4) = a^4 - 4a^3 - 4a^2 + 24a - 16$$

x_0

$$a^4 - 4a = a^3 - 4a^2$$

$$a^3 - 5a^2 + 4a = 0$$

$$a \geq 0$$