

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot a, a \in [1, 9] \cap \mathbb{Z}$$

$$1111 = 101 \cdot 11, 101 - \text{простое}, 11 - \text{простое} \Rightarrow A \cdot BC : 101^2 \text{ и } A \cdot BC : 11^2$$

и.к. ~~101 кратно 11~~:

и.к. $C < 100$, $B : 101$, B в будем ~~использовать~~ 6
множко если $B = 606$.

и.к. $606 : 11$, $C : 11$, C с будем ~~использовать~~ 3
множко если $C = 33$.

$$\text{тогда } A \cdot B \cdot C = 33 \cdot 606 \cdot 1011 \cdot a = (101 \cdot 3 \cdot 11)^2 \cdot 2a$$

$$(101 \cdot 3 \cdot 11)^2 \cdot 2a \text{ квадрат} \Leftrightarrow 2a \text{ квадрат} \quad 2a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$2a = 9 \Rightarrow a \notin \mathbb{Z}$$

$$2a = 16 \Rightarrow a = 8$$

$$\text{ибо } 2a \geq 25, a \notin [1, 9]$$

~~ибо~~ а Ответ: $(2222, 606, 33), (8888, 606, 33)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$$

$$k = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x > 0, y > 0 \Rightarrow x+y+5 > 0$$

т.к.

$$xy = (x-2)(y+2), x \neq 2$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$x - y = 2, x \neq 2 \Leftrightarrow y \neq 0 \text{ (указь вспомогательно)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy = x^2 - 4xy + y^2 =$$

$$= 2(x-y)^2 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$\text{Пример: } x = 5, y = 3. \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

$$M = 125 - 27 - 90 = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Число решений уравнения $x + 2y = 32$~~ ~~М.к. если наложено 12~~
~~то $x \geq 0$~~
 ~~$x + 2y \leq 32$~~
 ~~$x + 2y = 32$~~

М.к. можно наложить $n = k + 2x$ или $k = n - 2x$

тогда рассматриваются только $y = -x + 16$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq -\frac{x}{2} + 16 \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -6 \leq x \leq 6 \\ -1 + \frac{x}{2} \leq n \leq 1 + \frac{x}{2} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -6 \leq x \leq 6 \\ -1 + \frac{x}{2} \leq n \leq 1 + \frac{x}{2} \end{array} \right.$$

при чётном x есть решения $n = -1 + \frac{x}{2}$
 $n = \frac{x}{2}$
 $n = 1 + \frac{x}{2}$

при нечётном x есть решения

$$\left\{ \begin{array}{l} n = -1 + \frac{x+1}{2} \\ n = \frac{x+1}{2} \end{array} \right.$$

нечётных x от -6 до 6 ровно 7, чётных 7, $7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 35$
 \Rightarrow Максимальное количество решений (35) это 35, где
 $x=6, y=1, m.c. x=6, n=4$. Тогда всего 32 решения

Ответ: 32

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \bar{u}x + \sin \bar{u}y) \sin \bar{u}x = (\cos \bar{u}x - \cos \bar{u}y) \cos \bar{u}x$$

$$\sin \bar{u}y \cdot \sin \bar{u}x + \cos \bar{u}y \cdot \cos \bar{u}x = \cos^2 \bar{u}x - \sin^2 \bar{u}x$$

$$\cos(\bar{u}(y-x)) = \cos(2\bar{u}x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \bar{u}(y-x) = 2\bar{u}x + 2\bar{u}k, k \in \mathbb{Z} \\ \bar{u}(y-x) = -2\bar{u}x + 2\bar{u}n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} y = 3x + 2k \\ y = -x + 2n \end{array} \right] \text{ или}$$

~~$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{6} \leq \bar{u}$~~

~~$\arcsin \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \text{если } \arcsin \varphi + \arcsin \psi = \bar{u}, \text{ то}$~~

~~$\arcsin \varphi = \frac{\pi}{2}$~~
 ~~$\arcsin \psi = \frac{\pi}{2}$~~

~~Но это φ и ψ~~

$$d) \arcsin \frac{x}{6} \leq \frac{\pi}{2} \quad \arcsin \frac{y}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \bar{u}, \text{ при этом}$$

правильного доказательства, когда $\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}$
 $\arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$, т.е.

$$\text{при } x = 6, y = 2$$

значимое значение только проверить, что $\frac{x}{6} \in [-1; 1]$

$$\text{и } \frac{y}{2} \in [-1; 1] \text{ и действительно } x = 6, y = 2.$$

Замечание, что поскольку $x, y, n, k \in \mathbb{Z}$ ~~уравнение~~
 $y = 3x + 2k$ ~~задаёт~~ не все окн-бо x, y , что и ~~уравнение~~
 $y = -x + 2n$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Вероятность, что Валера и Тима сдали какадумы на конкурс, если раздадут А билетов N участникам,

$$\text{равна } \frac{\binom{N-2}{A}}{\binom{N}{A}} = \frac{A(A-1)}{N(N-1)}$$

X-оличество в конце конкурса

$$\frac{S(N, A)}{S(N, x)} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{A(A-1)}{x(x-1)} = \frac{1}{6}$$

$$7x = x(x-1)$$

изм. носки

$$\begin{cases} x=9 \\ x=-8 \end{cases} x \in \mathbb{N}$$

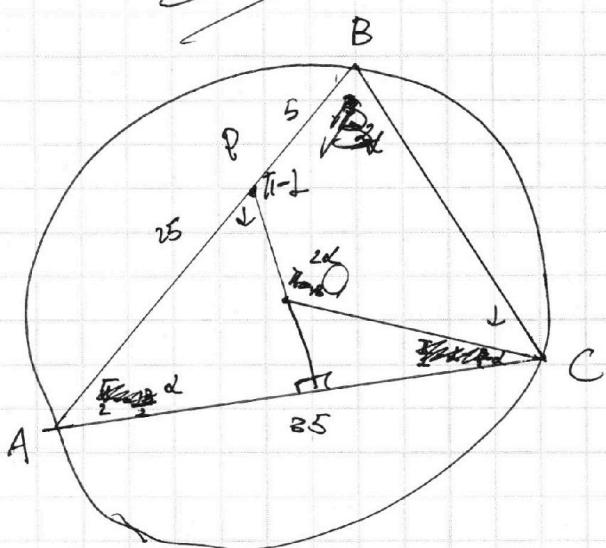
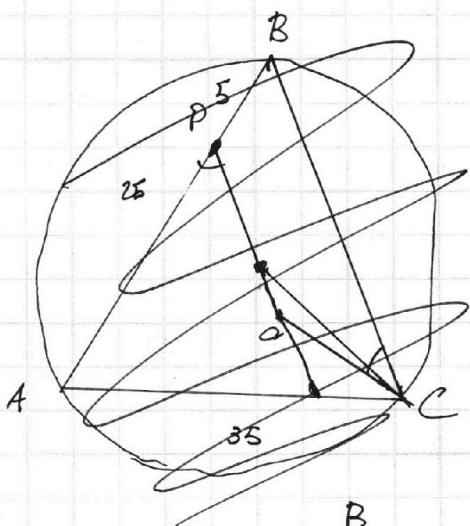
Ответ: 9

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Пусть $\angle ABC = \beta$
 $\angle BCO = \alpha$
 тогда $\angle BPO = \pi - \alpha \Rightarrow \angle APO = \alpha$
 $\angle COB = \pi - \beta \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle BAC = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$

н.к. $\angle BCO = \angle COC$, $\angle PBO =$
 $= \beta - \alpha$

н.к. $\angle BOA = \angle COC$, $\angle PBO =$
 $\angle PAO = \beta - \alpha \Rightarrow$

з)

тогда $\angle POA = \pi - \beta \Rightarrow$
 $\Rightarrow PO \text{ биссектриса } \angle AOC \Rightarrow$
 $\Rightarrow PO \perp AC (AO = OC)$

тогда

$\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} = \alpha \Rightarrow \beta = \pi - \pi - 2\alpha \Rightarrow \angle BAC = \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BCA = \alpha = \angle BCO \Rightarrow$ ~~точка~~ лемма ~~ко~~ $AC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ABC = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\angle BAC = \angle BCA \Rightarrow AB = BC = 30 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = 450$

~~тогда~~ $\angle BAC = \angle BCA \Rightarrow AB = BC = 30 \Rightarrow 30 \sqrt{2} = 35 \Rightarrow$
 \Rightarrow ~~точка~~ α ~~задача~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

(2) задаём ~~небольшое~~ окружность с радиусом 13 с центром в $(0, 0)$

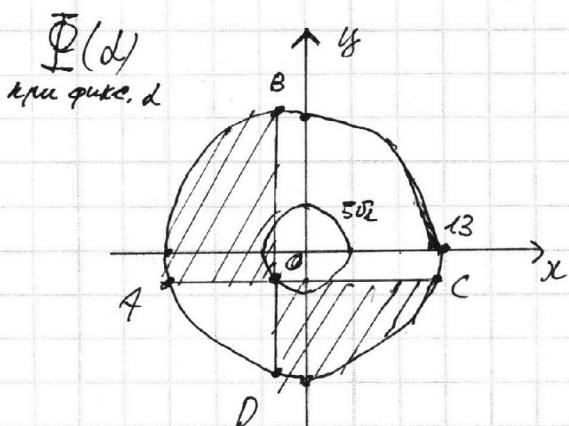
(1). ~~Найдем~~ при фикс α задаём обласи, ограниченные

предметами $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha$
 $y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$.

При изображении

д. изображения мяча, в которой проходит пересечение мяча ~~сферы~~ с плоскостью $x^2 + y^2 = (5\sqrt{2})^2$

Ось $O(0,0)$ - касательная к плоскости мяча пересекает предмет мяча в точке (x_0, y_0) . Тогда ~~мяч~~ ~~пересекает~~ предмет ~~мяч~~ в точках $A(\sqrt{169-y_0^2}, y_0)$, $B(x_0, \sqrt{169-x_0^2})$, $C(\sqrt{169-y_0^2}; y_0)$, $D(x_0, -\sqrt{169-x_0^2})$



~~найдем~~ $CD^2 = x_0^2 + y_0^2 - 169$

$$x_0^2 + y_0^2 - 169 = 169 - y_0^2 + x_0^2 + 2\sqrt{169-y_0^2} \cdot x_0 + y_0^2 + 169 - x_0^2 - 2\sqrt{169-x_0^2} \cdot y_0$$

$$CD^2 = 169 + 169 - 2\sqrt{169-x_0^2} \cdot y_0 + 169 - y_0^2 - x_0^2$$

но и. Косинус $OC^2 + OD^2 - CD^2 = 2 \cdot OC \cdot OD \cos \angle COD$

$$\cos \angle COD = \frac{x_0 \sqrt{169-x_0^2} \cdot y_0 - 2 \sqrt{169-y_0^2} \cdot x_0}{\sqrt{169}}$$

из аналогично $\angle AOB = 2 \arccos \frac{-\sqrt{169-x_0^2} \cdot y_0 + \sqrt{169-y_0^2} \cdot x_0}{\sqrt{169}}$

наша предложенная модель доказана $\arccos \alpha + \arccos(-\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin d = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ т.е. при } d = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Решение: $M_{\max} = 48 + 13\pi$, $d = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что $\arccos a = \pi - \arccos(-a)$, т.к. $\cos(\phi) = \cos(\pi - \phi)$
 $\arccos a \in [0; \pi]$,
 $\arccos(-a) \in [0; \pi]$

найдем ~~Максимальная длина~~ ~~длины~~ $AC + BD + \sqrt{13} =$

т. Задача ~~записана~~ ~~на~~ ~~один~~ ~~страницу~~ $AC + BD + \sqrt{13} =$

нужна ~~сумма~~ ~~максимальная~~ ~~длина~~ ~~из~~ ~~трех~~ ~~сторон~~ $\sqrt{13}$ ~~сторон~~ $AC + BD$.

$$|AC| = 2\sqrt{163 - y_0^2}$$

$$|BD| = 2\sqrt{169 - x_0^2}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = 25 \Rightarrow 2\sqrt{169 - y_0^2} + 2\sqrt{163 - y_0^2}$$

$$|AC| + |BD| = 2(\sqrt{163 - y_0^2} + \sqrt{169 - x_0^2})$$

$$f(y_0) = \sqrt{163 - y_0^2} + \sqrt{169 - x_0^2}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow y_0^2 = 50 - x_0^2$$

$$f(y_0) = \sqrt{169 - y_0^2} + \sqrt{113 + y_0^2}$$

$$(f(y_0))^2 = 289 + 2\sqrt{(169 - y_0^2)(113 + y_0^2)}$$

И максимально, когда $f(y_0)$ максимально, то, когда $(f(y_0))^2$ максимально, т.е. когда максимально $(169 - y_0^2)(113 + y_0^2)$ т.е.

$$(169 - y_0^2)(113 + y_0^2) = 169 \cdot 113 + 60y_0^2 - y_0^4$$

также это выражение от y_0 является всплеск \Rightarrow

$$\Rightarrow \text{максимум } y_0^2 = \frac{50}{2} = 25.$$

$$\text{нужна } M_{\max} = (VAB + VCD) \cdot 13 + 2\sqrt{163 - 25} + 2\sqrt{169 + 25} =$$

$$= 13\pi + 4 \cdot 25 = 52\pi + 100 \approx 48 + 13\pi$$

так получается при $y_0 = \pm 5$, т.е. кра



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \bar{x} + \sin \bar{y}) \sin \bar{x} = (\cos \bar{x} - \cos \bar{y}) \cos \bar{x}$$

≈ 3

$$\sin \bar{y} \cdot \sin \bar{x} + \cos \bar{y} \cos \bar{x} = \cos 2\bar{x}$$

$$\cos(\bar{x} - \bar{y}) = \cos 2\bar{x}$$

$$\begin{cases} \bar{x} - \bar{y} = 2\bar{x} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \bar{x} - \bar{y} = -2\bar{x} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 2\pi k \\ 3x = \frac{y}{2} + 2k \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \left(-\frac{x}{2} + k \right) \leq \pi$$

≈ 8

~~хорошо~~

$$\arcsin \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow$$

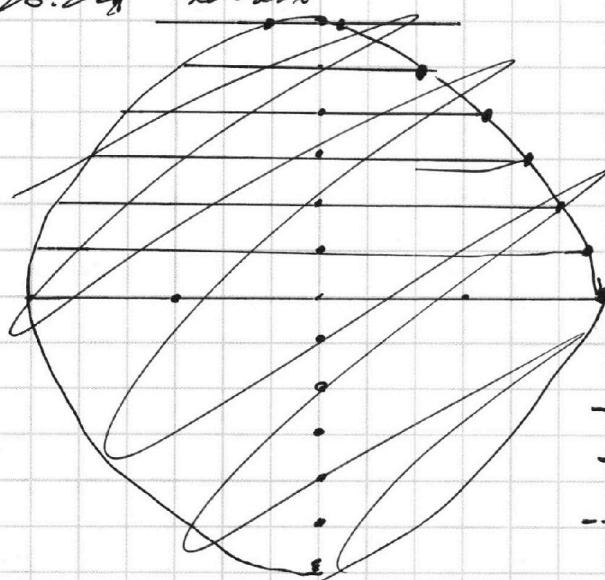
$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \left(-\frac{x}{2} + k \right) \leq \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \left(-\frac{x}{2} + k \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{6} = 1 \\ -\frac{x}{2} + k = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ -x + 2k = 2 \end{cases} \Rightarrow k = 4$$



$$-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$-1 + \frac{x}{2} \leq k \leq 1 + \frac{x}{2}$$

$$x : x = 2k \text{ (так как } x/2 \text{ - целое)} \Rightarrow \begin{cases} k = -1 + \frac{x+2}{2} \\ k = \frac{x}{2} \\ k = 1 + \frac{x-2}{2} \end{cases}$$

Назад 0 1 2 3 4 5 6

$$2 \cdot 6 + 3 \cdot 6 + 3 = 33$$

реш.

$$33 - 1 = 32$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot a, a \in [0; 9] \cap \mathbb{Z}$$

$$\text{Будем } C = 30 + c \text{ или } C = 10c + 3, c \in [0; 9] \cap \mathbb{Z}$$

$$1111 = 101 \cdot 11$$

$$\begin{array}{r} 191 \\ \times 7 \\ \hline 133 \\ -28 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 101 - \text{крайнее} \\ A : 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = 606 \Rightarrow C : 11 \Rightarrow \\ \Rightarrow C = 33 \end{array}$$

$$33 \cdot 606 \cdot 1111 \cdot a = p^2$$

$$112 \cdot 3^2 \cdot 101^2 \cdot 2a = p^2$$

$$2a - \text{квадрат} \quad \begin{cases} a=2 \\ a=8 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{или} \\ (2222; 606; 33) \\ (8888; 606; 33) \end{array}$$

12

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\cancel{\frac{x+y+5}{xy}} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \quad x+y+5 \neq 0 \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$\begin{aligned} xy &= xy - 2y + 2x - 4 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = x^2 + xy + y^2$$

$$\cancel{(x^2 + xy + y^2)} \cdot x^2 - 2xy + y^2 - 3xy = 1 - 3xy = 1 - 3(y+1)y =$$

$$= -3y^2 - 3y + 1 \in (1, -\infty)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$PB = 2R \sin(\alpha - \beta)$$

$$BC = 2R \sin \alpha$$

$$BC = 2R \cos \alpha$$

$$AB = 2R \sin \beta$$

$$AC = 2R \sin(\alpha + \beta)$$

$$\alpha R \cos \alpha = \beta R \sin \alpha$$

$$\cdot R = 2R \sin \alpha$$

$$PB = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha}$$

$$xy + x^2 \sin^2 \alpha +$$

$$\frac{\cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{6}{7}$$

$$\cancel{\sin \alpha} \cancel{\sin \alpha} - \cancel{\sin \alpha} \cos \beta - \cancel{\sin \alpha} \cos \alpha$$

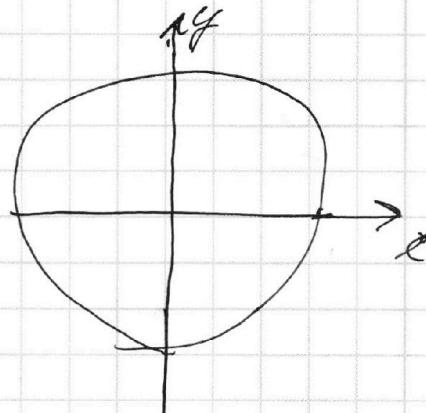
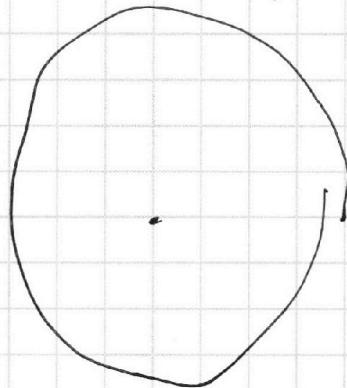
$$\frac{PB}{AB} = \frac{\cancel{\sin \alpha} \cos \beta - \cancel{\sin \alpha} \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{2 \cancel{\sin \alpha} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(2\beta))}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sin \beta \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \beta}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{\sin \beta \cos \alpha}{2 \sin \alpha \cos \beta}$$

$$\begin{aligned} x &= -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y &= -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{aligned}$$

нужна кв
округ
радиуса $5\sqrt{2}$



I-

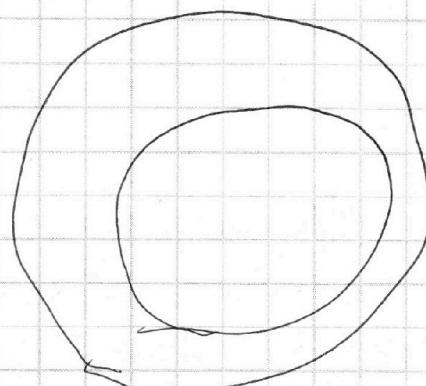
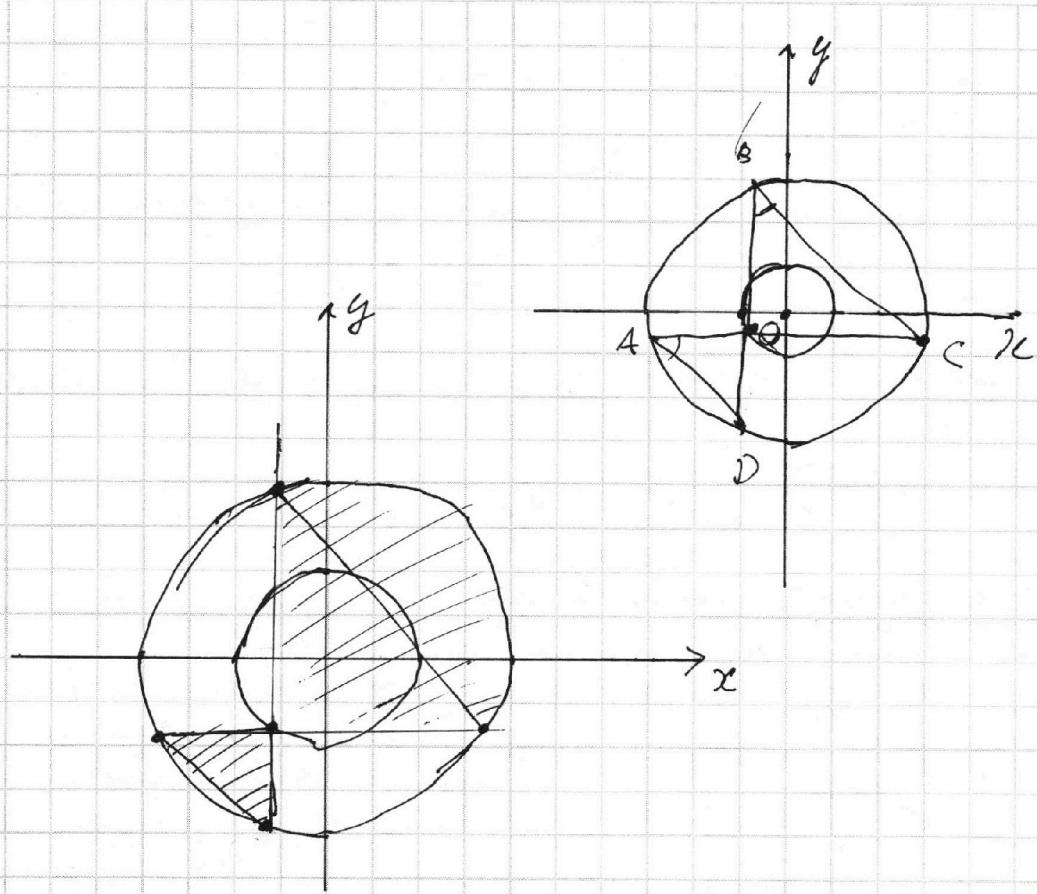
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

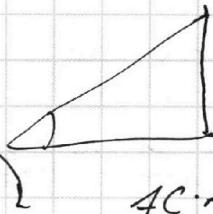
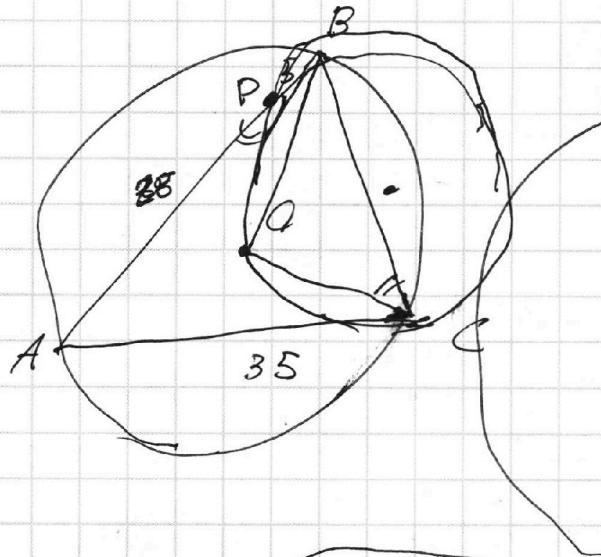


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

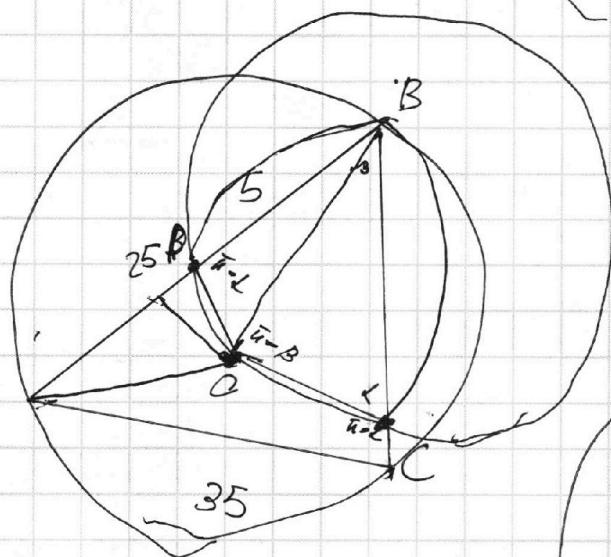


$$4C \cdot AB \cdot \sin \angle C$$

$$\frac{R}{\sin \angle C} = \frac{5}{\sin(2+3)}$$

$$\frac{2R}{\sin(2+3)} = \frac{R}{\sin \angle C}$$
~~$$4C = \frac{\sin(2+3)}{\sin(2-3)}$$~~

$$4 = \frac{\sin(2+3)}{\sin(2-3)}$$



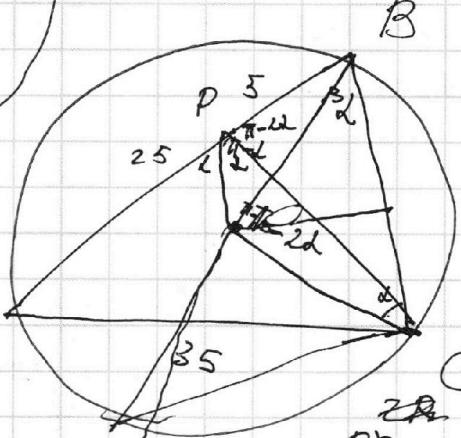
$$\frac{2R}{\sin \angle B} = 35$$

$$\frac{2R}{\sin \angle B}$$

$$BC = 2R \cos \angle B$$

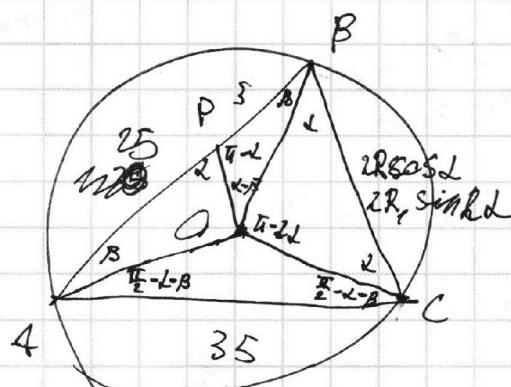
$$\sin \angle B = \frac{2R}{35}$$

$$\sin(2+3) = \frac{2R}{35}$$



$$2x + 2l + 2B = \pi$$

$$PB = 2R \cdot \sin(\angle B)$$



• Решение

$$\frac{2R}{35} = 4$$

$$\frac{2R}{\sin(\angle B)} = 4$$

$$\frac{R}{\sin \angle B \cos \angle B} = 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

~~Установка~~
~~Установка~~
~~Схема~~
~~Число~~

$$\frac{C_{N-2}^{A-2}}{C_N^A} = \frac{(A-1)!}{(A-2)!(A+1)!}$$

$$= \frac{(A-1)(A)}{(A-1+1)(A-1+2)}$$

$$\frac{(B-1) \cdot B}{(B-1+1)(B-1+2)}$$

$$= \frac{(N-2)!}{\frac{(A-2)!(N-A)!}{A!(N-A)!}} = \frac{(A-1) \cdot A}{(N-1) \cdot N}$$

$$6A(A-1) = B(B-1)$$

~~A = 12, B = 26~~

$$1 \rightarrow 0$$

$$B := x$$

$$2 \rightarrow 1$$

$$x^2 - x - 6y(y-1) = 0$$

$$3 \rightarrow 6$$

$$D = 1 + 24y(y-1)$$

$$5 \rightarrow 20$$

~~D = 20~~

$$6 \rightarrow 30$$

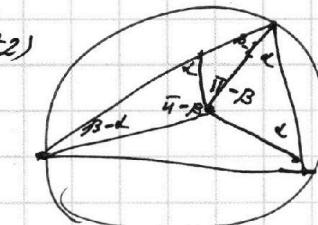
$$7 \rightarrow 42$$

$$8 \rightarrow 56$$

$$9 \rightarrow 72$$

$$6A(A-1) - B(B-1) = 6 \cdot 2 \cdot (2-1) - 4 \cdot (4-1)$$

$$6(A(A-1) - 2 \cdot (2-1)) = B(B-1) - 4 \cdot (4-1)$$



$$B - L + \dots = \frac{\pi - \beta}{2} - \frac{\beta}{2}$$

$$L + \frac{\pi}{2} - \frac{3\beta}{2}$$

$$X Y - 1$$

$$X^2 - x$$

$$(x+t)(x+t-y)$$

$$= \frac{x^2 - x}{x^2 + 2xt + t^2 - (x+y)} =$$

$$6x^2 + 6x - x^2 + 2xy + y^2 - x - y$$

$$5x^2 - 5x = 2tx + t^2 - y$$

$$5x^2 - 5(5+2t) - t^2 + y = 0$$

$$\begin{aligned} & (t - 5 - 2t) = 24y(y-1) \\ & 5(t-5) = 24y(y-1) \quad x = \end{aligned}$$