



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$a, b_1, b_2, c, -$ Числа

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7b_1b_2 \\ b_1 + b_2 \\ b_1b_2 + 7 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ 1C_1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N}$$

$$A = 10^3a + 10^2a + 10a + a = 1111a$$

$$B = 700 + \overline{b_1b_2}$$

$$B = b_1b_2 + 70$$

$$B = \overline{b_1b_2} \cdot 10 + 7$$

$$C = 10C_1 + 1$$

$$C = 10 + C_1$$

6 Вариантов
(3 · 2 = 6)

Две вер. упр.: $1111 \cdot a \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N}$

~~$A = 10^3a + 10^2a + 10a + a$~~

~~$B = 700 + \overline{b_1b_2}$~~

~~$C = 10C_1 + 1$~~

~~$A \cdot B \cdot C = x^2, x \in \mathbb{N}$~~

~~$\begin{array}{r} 1111 \mid 11 \\ \hline 11 \quad 11 \\ \hline 0 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 1 \end{array}$~~

~~$101 \mid 11$~~

~~$(10^3a + 10^2a + 10a + a)(700 + \overline{b_1b_2})(10C_1 + 1) =$~~

~~$= x^2$~~

~~$a \nmid 1111 (700 + \overline{b_1b_2})($~~

$$101 \cdot 11 \cdot a \cdot B \cdot C = x^2, 101 - \text{простое число}$$

C - др.члн., $C \nmid 101$, a - оснозн., $a \nmid 101$ и эл. издр. члн.

Чтобы произв. $A \cdot B \cdot C$ было 101^k члн., чтобы в разл. на множители 101 быть 1 члн. степеней, т.е. ~~одинаковы~~ среди чисел $B, a, C, 11$ должно быть как минимум 1 члн.: 101, и методом искл. это члн. - члн. B .

разл. на члн., члн.

т.е. члн. B ^{в члн.} 101 делено ⁶ члн. члн.

число 101^3 - члн. и трехзначное число \Rightarrow т.к. B - трёхзначное, то число 101 в члн. разл. на члн. ⁶ члн. члн.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$B = 105 \cdot y$, $y \in \mathbb{N}$. $y < 10$, т.к. иначе B - не трехзначное, в нем должно быть две цифры ненулевые.

ОСАДО ТОРГА^b ЧИСЛО В боязь 2 огнестрельные группы,

Г.е. күнис B күнег таң $B = \overline{yoy}$ (екел 105 · y, мәденият. күнис таңы
таңын. күнис таңы
түрк. таңы таңы
 $y \in \mathbb{N}$)

III.к. B күнис B котағын 2 үшінша =?

$\Rightarrow y = 7$. Т. о. наименьшее возможное значение y равно 7.

$A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot C \cdot a = x^2$, $x \in \mathbb{N}$.
ПАЗЛ. на множ.

Т.о. в нашем производстве с.и. Входит на участок 74 11

6-нр. генерал (капитан) В. А. В. С. Ворошиловский и морской пехоты.

А.В. (как квага) наст. врем.) в могу бояти грунта
щастя б'єт мій соняч.

Число $a \neq 11$, т.е. $a < 10$, $a \in \mathbb{N}$
 кратно числу A

$\Rightarrow C = 11$. J.l.u. (- gelyxznamne mno, u b ero vcelje ^{mop} troyev
xota da legenja \Leftrightarrow t.u. $C = 11 \Rightarrow C = 11$.

(Все двузнач. числа : 11 имеют вид \overline{ab} или \overline{ba} ,
т.е. 2-значное число \overline{ab} в записи \overline{ba} не может быть членом).

Mark J.I.O., T.U. C=11 \Rightarrow a \neq 7. T.K. a \neq 0

(Умова А - не залежить від a) \Rightarrow a=7, т.к. $a=7$ є розв.

T.O. Polymers having benzyl bozusokay so many times used:

$A = 7777$; $B = 707$; $C = 11$. Other: $(7777; 707; 11)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении** каждой задачи отдельно.



 СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = K & (1) \\ \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = K & (2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} x>0 \\ y>0 \\ x\neq 4 \end{array}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$M = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy$$

$$\text{Делим выражение } (1) \text{ на } xy:$$

$$(y+4) \cdot (x-4) + 3 = Kxy$$

Делим выражение на $(x-4)(y+4)$:

$$y + x + 3 = K(y+4)(x-4)$$

$$K(y+4)(x-4) = Kxy$$

$$\begin{cases} K=0 & (3) \\ (y+4)(x-4) = xy & B(4) \end{cases}$$

$$(4): yx - 4y + 4x - 16 = xy$$

$$16 = 4(x-y) \Rightarrow x-y=4$$

$$\rightarrow M = 4(x^2 + xy + y^2) - 12xy$$

$$M = 4x^2 + 4y^2 - 8xy$$

$$M = 4(x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$M = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64$$

$$(3): K=0:$$

$$x+y+3=0 \Rightarrow x+y=-3, \text{ но } x>0 \text{ и } y>0 \Rightarrow x+y>0 \Rightarrow$$

$$K \neq 0, \text{ т.к. } -3 < 0.$$

$$\text{т.о. } M \text{ существует и } M = 64.$$

$$\text{Ответ: } 64.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решениии которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
4 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

($x, y \in \mathbb{R}$; $x \neq y$).

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\underbrace{\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y}_{\text{коэффициент двойного угла}} + \underbrace{\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y}_{\text{коэффициент разности}}$$

$$\cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

$$\cos(\pi y) = -\cos(\pi x - \pi y)$$

$$\alpha = 2\pi y; \beta = \pi x - \pi y.$$

$$\cos \alpha = 1$$

$$\alpha \in \mathbb{Z} \pi n$$

$$\alpha = \pm \arccos 1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \beta = -\cos \alpha$$

$$\cos \beta = -\cos(2\pi y)$$

$$\beta = \pm \arccos(-\cos \alpha) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\beta =$$

$$\begin{aligned} \cos 2\pi y &= \cos(\pi - (\pi x - \pi y)) \\ \cos 2\pi y &= \cos((\pi x - \pi y) + \pi) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \cos \beta \Rightarrow \alpha = \beta + 2\pi k \\ \alpha = 2\pi y; \beta = \pi x - \pi y + \pi. \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \cos \beta \Rightarrow \\ \alpha &= \beta + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \alpha + 2\pi k &= \pi x - \pi y + \pi \end{aligned}$$



$$\cos 2\pi y = \cos((\pi x - \pi y) + \pi)$$

$$\begin{aligned} 2\pi y &= \pi x - \pi y + \pi + 2\pi k, \\ 2\pi y &= \frac{\pi x}{2} - \frac{\pi y}{2} + \pi + 2\pi k, \\ 2\pi y &= -(\pi x - \pi y + \pi) + 2\pi k \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} 2\pi y = \pi_1 x - \pi_0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi y = -(\pi_1 x - \pi_0) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\pi y = \pi_1 x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi y = -\pi_1 x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

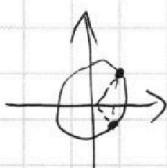
$$\begin{cases} 3y = x + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ y = -x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

т.о. существует бесконечно много таких пар.

$$\omega s 2\pi y = \cos((\pi_1 x - \pi_0) + \pi_1)$$

$$\omega s \beta = \omega s d$$

$$\begin{cases} \beta = \angle + 2\pi k \\ \beta = -\angle + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} 2\pi y = \pi_1 x - \pi_0 + \pi_1 + 2\pi k \\ 2\pi y = \pi_0 - \pi_1 x + \pi_1 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = x + 1 + 2k \\ y = -x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+1+2k}{3} \\ y = -x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

т.о. существует бесконечно много таких пар, таких, чтобы выполнялось

$$\text{т.о.: } \begin{cases} y = \frac{x+1+2k}{3} \\ y = -x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (1)$$

(2)

$$\delta) \begin{cases} \arccos \frac{x}{r} - \arcsin \frac{y}{r} > -\frac{\pi}{2} \\ (\sin \pi_0)(\sin \pi_0 - \sin \pi_1) \sin \pi_0 = (\omega s \pi_0 + \cos \pi_0) \cos \pi_0 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~ХОДОВЫЕ ОБЯЗАТЕЛЬСТВА~~

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

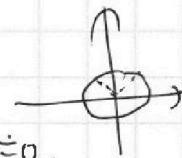
$$\arccos \frac{x}{7} - \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{y}{4} \right) > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$$

При этом мы знаем, что все любых любых чисел, чисел x и $y \in \text{QDZ}$

(сверху написано) $\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} \geq 0$, т.н.

$$\arccos \frac{x}{7} \in [0; \pi], \arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi]$$



Т.о. Выбираем лишь случай, где ~~не~~ $\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} = 0$,

т.е. ~~если~~ $\arccos \frac{x}{7} = 0$ и $\arccos \frac{y}{4} = 0$, т.е. $\frac{x}{7} = 1$ и $\frac{y}{4} = 1$.

т.е. когда $x = 7$ и $y = 4$ не подходит. \Rightarrow $y = \frac{8+2k}{3}$ - не подходит, т.е. $k \neq 2$ и $k \neq 6$

III. о. (учитаем QDZ и первого ур-я и оба получим систему
некоторых следующих линейных уравнений числа:

$$\begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \\ y = \frac{x+1+2k}{3} \\ y = -x-1+2k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 2, k \neq 6 \end{cases}$$

Решение

Ответ: а) $\begin{cases} y = \frac{x+1+2k}{3} \\ y = -x-1+2k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 2, k \neq 6 \end{cases}$

$$\begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \\ y = \frac{x+1+2k}{3} \\ y = -x-1+2k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 2, k \neq 6. \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~11. Упростите выражение~~

~~Было 4 билета, 1 из них - в кинотеатре, и остальные 3 были на концерт в концертном зале.~~

~~$$11 \# P_{B_0} \cdot P_{B_1} = P_{B_1} \cdot P_{B_2} - \text{погреш.}$$~~

~~При этом было 2 билета, 1 из которых идет в кинотеатр, и остальные 2 на концерт.~~

~~При этом было 3 билета, все на концерт.~~

~~При этом было 1 билет на концерт, остальные 3 в кинотеатре.~~

~~При этом было 2 билета на концерт, остальные 2 в кинотеатре.~~

~~$$11 \# \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$$~~

x - количество билетов в концертном зале

P_1 - вероятность того, что 1 из N билетов на концерт в кинотеатре.

~~При этом было 2 билета, 1 из которых на концерт, и остальные 2 в кинотеатре.~~

~~$$11 \# P_0 = P_1$$~~

~~$$P_0 = \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$$~~

~~$$P_1 = \frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1}, x > 4$$~~

здесь 1-ое из двух м.
здесь 2-ое из двух м. (ст.надо
здесь
менять)

~~$$11 \# \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} = \frac{x}{N} \cdot \frac{x-1}{N-1}$$~~

аналогично

~~$$11 \# 12 = x(x-1)$$~~

~~$$11 \# 132 - x^2 + x = 0$$~~

~~$$\mathcal{D} = 1+4 \cdot 132 = 529 = 23^2$$~~

~~$$x_1 = \frac{-1-23}{-2} = -12$$~~

$$\begin{array}{r} 132 \\ \cdot 4 \\ \hline 528 \\ \begin{array}{l} \cdot 23 \\ \hline 69 \\ \begin{array}{l} \cdot 16 \\ \hline 529 \end{array} \end{array} \end{array}$$

~~$$x_2 = \frac{1+23}{-2} = -12 - \text{невып.}, x \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 12$$~~

Ответ: 12.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Dано:

\odot -чтврт w_1 , окнц.
точка осногрд. ΔABC .

w_2 - окнц. окна ΔABC ,
 $w_2 \cap AB = P$.

Найти

$$AP = 16$$

$$BP = 8$$

$$AC = 22$$

Сделать?

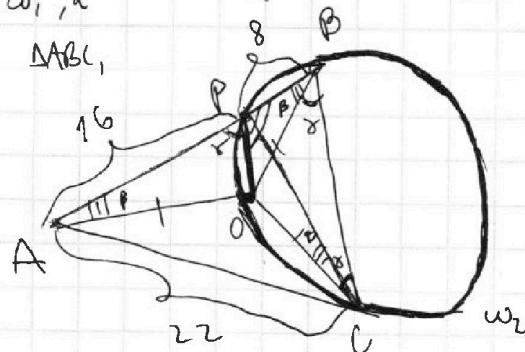
т.к. ΔABC -
осногрд. \Rightarrow т.окнц. окнц-
также второго ряда.

т.к. \odot -чтврт w_1 , а

w_1 , окнц. окна ΔABC ,
 $\Rightarrow OB = OC = AO$.

Решение: $\angle OBC = \gamma$,

также $\angle OBC = \angle OCB = \gamma$
 $\text{по д-ю } \triangle$,
 $\text{по } \triangle OBC - \text{пр}$,
 $\text{т.к. } OB = OC$.



т.к. $P \in w_2 \Rightarrow \angle OPB$ - т.кнц. б w_2 чётврткругоделкин \Rightarrow то д-ю
также чётврткругоделкин $\Rightarrow \angle OPB + \angle OCB = 180^\circ$ - сумма прилес. угл.
ратанки.

т.к. $\angle OPB = 180^\circ - \gamma$. $\angle APO + \angle OPB = 180^\circ$ - смежные,

$\Rightarrow \angle APO = \gamma$. $\angle (CPB + \angle OBC) = \angle OPB$ - это все те же углы

также. б w_2 и $\angle CPB$ вместе с $\angle OBC$ дополняют 180° друг до

друг, но идут разные углы. $\angle OPB$ (сумма углов $= 180^\circ$ друг).

$\Rightarrow \gamma + \angle CPB = 180^\circ - \gamma \Rightarrow \angle CPB = 180^\circ - 2\gamma \Rightarrow \Delta \gamma$.

$\angle (CPB + \angle APC) = 180^\circ$ (смежные) \Rightarrow а $\angle APC = \gamma + \angle OPB \Rightarrow \angle APC = \gamma$.

$\angle OCP = \angle PBO$ - тоже. б w_2 , окнц. на OP друг друг. (показано выше)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$OB = AO \Rightarrow \angle OBA = \angle AOB = \beta \quad \text{из-за } \angle B = \angle A.$$

$\angle B = 60^\circ \text{ и } \angle A = 60^\circ.$

$$\Rightarrow \angle OBA = \angle OCP. \Rightarrow \text{из суммы угл. } \Delta \text{ (которая } = 180^\circ\text{)} \Rightarrow$$

$$\angle AOP = \angle COP$$

$$(180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - \gamma - \beta).$$

Т.к. $\Delta APO = \Delta OPC$ по 2 угл. и стороне между ними ($\angle AOP = \angle COP$,

$$\angle POA = \angle POC, PC - \text{одна линия}$$

Т.к. PC как катет. к гипотен. 6 равных линий $PC = AP \Rightarrow PC = 16.$

$$\begin{array}{r} 1633515 \\ \times 13 \\ \hline 1633515 \\ 1633515 \\ \hline 21267 \\ \times 56 \\ \hline 12267 \\ 12267 \\ \hline 363 \\ \times 3 \\ \hline 109 \\ \times 6 \\ \hline 60 \\ \hline 111 \\ \times 1 \\ \hline 111 \\ \hline \end{array}$$

$$\cancel{(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\cancel{\frac{a+b+c-a}{2}, \frac{a+c-b}{2}, \frac{a+b-c}{2}}$$

$$\cancel{(a+b+c)^2 - (a-b)^2}$$

$$\sqrt{8}$$

$$\begin{array}{c} APC \quad ABC \\ \Delta \cancel{ABC} \sim \Delta \cancel{APC} \text{ по угл. } \angle C \Rightarrow \end{array}$$

Их площади относятся

как одна сторона,

к которой проведена

то высота, (т.к. $S = \frac{1}{2}ah$)

$h = 16, a = 8,$
 $h = 16, a = 8,$
 $h = 16, a = 8,$
 $h = 16, a = 8,$

$$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{16}{16+8} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{16+8}{16} \cdot S_{APC} = \frac{2+1}{2} \cdot S_{APC}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{3}{2} S_{APC}.$$

Запишем т.ко ΔAPC :

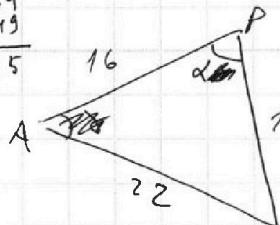
$$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2wsd \cdot AP \cdot PC$$

$$22^2 = 16^2 \cdot 2 - 2wsd \cdot 16^2$$

$$\frac{22^2}{16^2 \cdot 2} = 2 - 2wsd$$

$$\frac{22^2}{16^2 \cdot 2} = 1 - wsd$$

$$\frac{16384}{16335} = \frac{16}{16+8} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$



$$\begin{array}{r} 16384 \\ \times 13 \\ \hline 16384 \\ 16384 \\ \hline 128 \\ \times 12 \\ \hline 128 \\ 128 \\ \hline 0 \\ \end{array}$$

$\angle APC = \alpha.$

$$\cos \alpha = \frac{16^2 \cdot 2 - 22^2}{16^2 \cdot 2} = \frac{16 \cdot 8 - 11^2}{16 \cdot 8} = \frac{128 - 121}{128} = \frac{7}{128}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{49}{128^2}} = \sqrt{\frac{128^2 - 49}{128^2}} = \frac{\sqrt{128^2 - 49}}{128}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \angle = \frac{33\sqrt{15}}{128} \Rightarrow S_{APC} = \frac{1}{2} \sin \angle \cdot AP \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot \frac{33\sqrt{15}}{128} \cdot 16 \cdot 16 =$$

$$= \cancel{\frac{1}{128}} \cdot \frac{1}{256} \cdot 33\sqrt{15} \cdot 256 = 33\sqrt{15} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{3}{2} S_{APC} = \frac{288\sqrt{15}}{2} = \frac{99\sqrt{15}}{2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 16 \\ - 16 \\ \hline 96 \\ - 16 \\ \hline 80 \\ - 16 \\ \hline 64 \\ - 16 \\ \hline 48 \\ - 16 \\ \hline 32 \\ - 16 \\ \hline 16 \\ - 16 \\ \hline 0 \end{array}$$

Ответ: $8m \frac{99\sqrt{15}}{2}$.



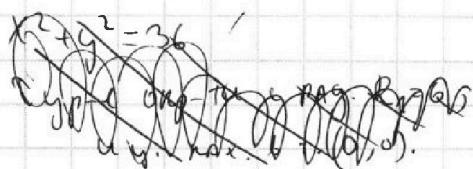
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

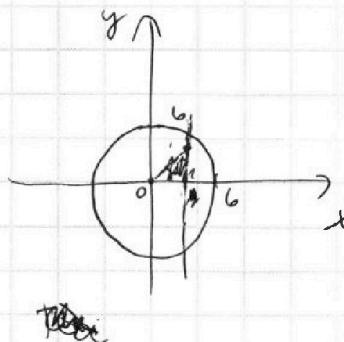
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$



$$x^2 + y^2 \leq 36$$

7. Bile turun dekat
6 kijipen wap-thi pagycer G
y. B +. (0;10).



$$d_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

7 *Julma cognata*.

$$\begin{cases} x + 4 \sin d \leq 0 \\ y - 4 \cos d \geq 0 \\ x + 4 \sin d \geq 0 \\ y - 4 \cos d \leq 0 \end{cases}$$

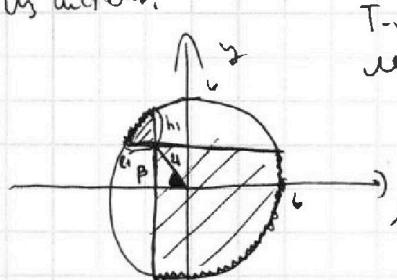
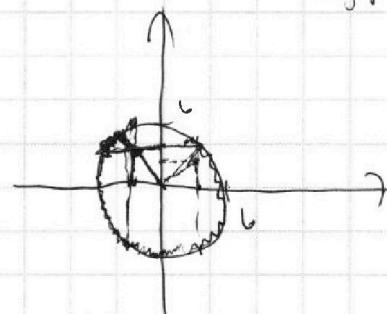
✓ T.M. MX approach. \leftarrow \Rightarrow
+ The 2nd condition
PAB_{n-1} \times g names

$$\begin{cases} x+4 \sin d \geq 0 \\ y-4 \cos d \leq 0 \end{cases}$$

$$L_0 \in [0; \pi] \quad \beta = \theta \frac{\pi}{2} - d_0$$

$$d_{12} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2}$$

$$d_{23} = \sqrt{x_2^2 + x_3^2 + y_2^2 + y_3^2 - 2y_2 y_3 - 2x_2 x_3}$$



$$\begin{cases} x \leq -4w\sin\beta \\ y \geq 4\sin\beta \\ x \geq -4w\sin\beta \\ y \leq 4w\sin\beta \end{cases}$$

~~1000 B-45
GOT MAX.
REMOVED~~

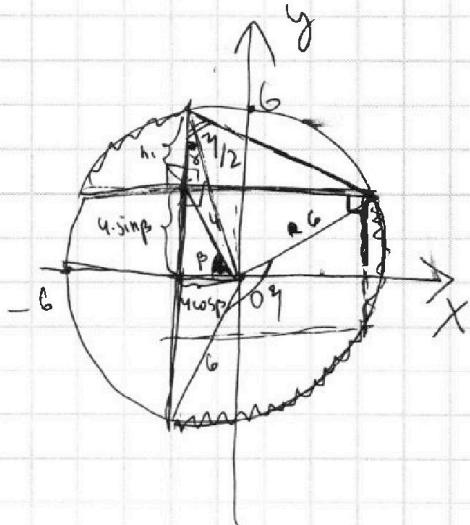


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \gamma = \frac{4 \cos \beta}{6}$$

$$\frac{h_1 + 4 \sin \beta}{6} = \cos \gamma$$

$$1 - \frac{16 \cos^2 \beta}{36} = \left(\frac{h_1 + 4 \sin \beta}{6} \right)^2$$

$$36 = h_1^2 + 16 \sin^2 \beta + 16 \cos^2 \beta + 8 h_1 \cdot 4 \sin \beta$$

$$8 h_1 \cdot 4 \sin \beta = 35 - h_1^2$$

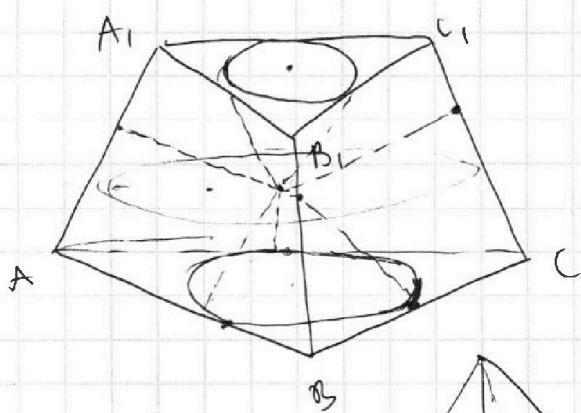
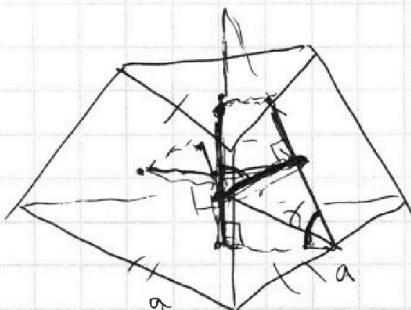
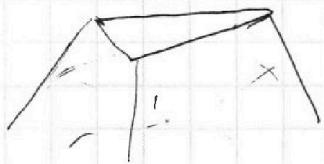


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

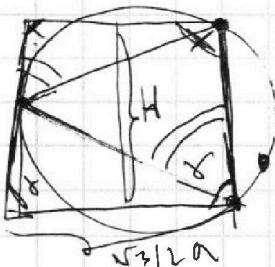
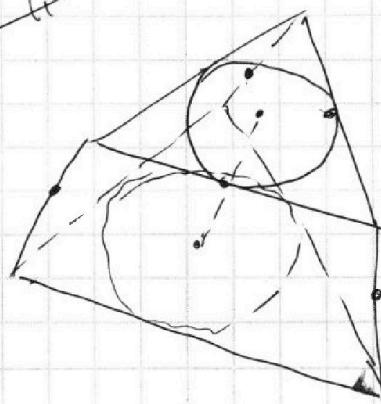
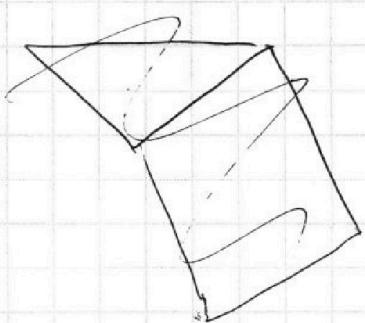
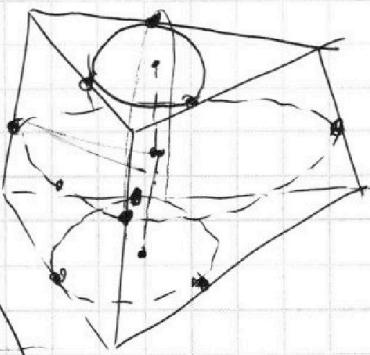
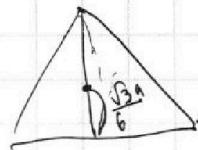
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$H = 2R_{\text{вписан}}$$

$$\frac{\sqrt{3}a}{2} \cdot \frac{r}{2} = \frac{R_{\text{вписан}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{H}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}H}{a}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

анализ

$$1. \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{2}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\left\{ y = \frac{x+1+2k}{12}, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arccos \frac{x+1+2k}{12} > -\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos \frac{x+1+2k}{12} - \arccos \frac{x}{7} < \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{если } 3+4 > \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{x+1+2k}{12} = \arccos(3) \end{aligned}$$

$$\frac{x}{7} = \cos 3$$

$$\frac{x+1+2k}{12} = \cos y$$

$$\sin y = \sqrt{1 - x^2/49}$$

$$\frac{x}{7} = \cos 3$$

$$\sin 3 = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}}$$

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - 3) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}} \\ \cos(\frac{\pi}{2} - y) = -\sqrt{1 - \frac{(x+1+2k)^2}{144}} \\ \cos y = \frac{x+1+2k}{12} \end{cases}$$

$$\pm \arccos \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}} + \arccos \frac{x}{7} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x+1+2k}{12} -$$

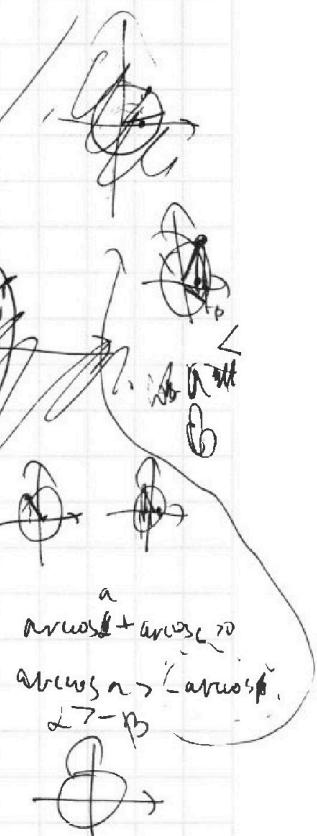
анал

$$\frac{x+1+2k}{12} = \cos \theta$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{x+1+2k}{12}\right)^2}$$

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sqrt{1 - \left(\frac{x+1+2k}{12}\right)^2} \\ \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = -\sqrt{1 - \left(\frac{x+1+2k}{12}\right)^2} \end{cases}$$

$$\arccos \sqrt{1 - \left(\frac{x+1+2k}{12}\right)^2} + \arccos \sqrt{\left(\frac{x+1+2k}{12}\right)^2} > \arccos \left(\left(\frac{x+1+2k}{12} \right)^2 - \sin^2 \theta \right)$$



$\arccos \theta + \arccos \varphi > \arccos \theta$
 $\arccos \theta > \arccos \varphi$
 $\theta > \varphi$

$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \sqrt{\left(\frac{x+1+2k}{12}\right)^2} >$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из ____

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~1~~ $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

~~2~~ $\arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{y}{4} \Rightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arccos \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2} > -\frac{\pi}{2}$

~~3~~ $\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$

~~4~~ $\arccos \frac{x}{7} > -\arccos \frac{y}{4}$

~~5~~ $\arccos \frac{x}{7} \in [0, \pi]$

~~6~~ $\arccos \frac{y}{4} \in [0, \pi]$

~~7~~ $\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} \geq 0$ при $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$.

т.к. $\arccos \alpha_1 + \arccos \beta_1 \geq 0$ при $\forall \alpha_1, \beta_1 \in \mathbb{R}$.

$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ \frac{y}{4} = 1 \end{array} \right.$ ТАКИЕ ЧИСЛА НЕ М.Д. т.к. $\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} \geq 0$, а \rightarrow так чи

i.e. пара $(0,0)$ ~~не подходит~~.

T.O. Но реш. удалено синхрониз. из пункта 6) ил. б/c грех. числа, y_0 . след. получим что:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) -4Kx^2 + x(8+6K) - 4 = 0$$

$$\mathcal{D} = (8+6K)^2 - 4 \cdot 4K \cdot 4 = 4((4+3K)^2 - 16K) = 4(16+9K^2+24K-16K)$$

$$= 4(16+9K^2+8K)$$

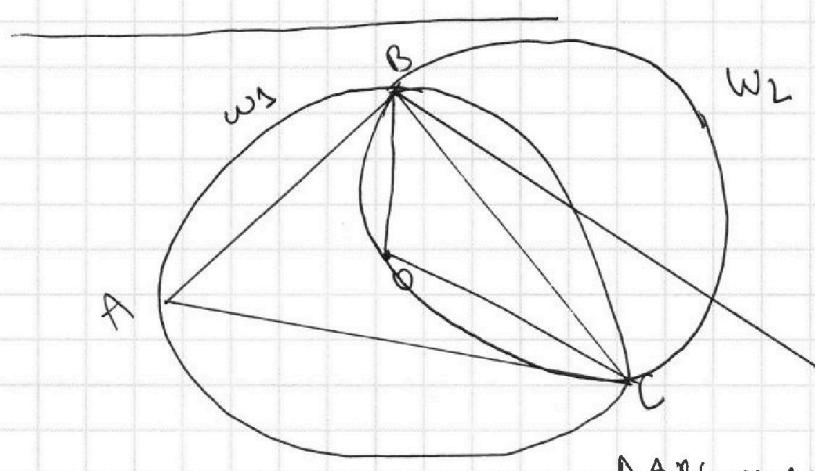
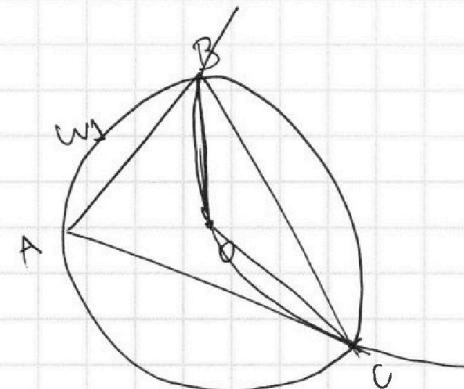
$$\mathcal{D}_2 = 64 - 4 \cdot 9 \cdot 16 < 0 \Rightarrow \mathcal{D} > 0 \text{ при любых } K \in \mathbb{R}.$$

$$x_1 = \frac{-8-6K-2\sqrt{16+9K^2+8K}}{-8K} = \frac{4+3K+\sqrt{16+9K^2+8K}}{4K} > 0.$$

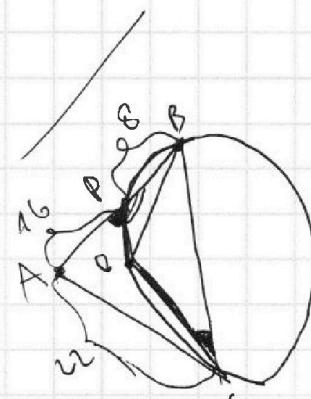
$$x_2 = \frac{-8-6K+2\sqrt{16+9K^2+8K}}{-8K} = \frac{-4-3K+\sqrt{16+9K^2+8K}}{-4K} = \\ = \frac{4+3K-\sqrt{16+9K^2+8K}}{4K}$$

$$(4+3K)^2 = 16+9K^2+24K \Rightarrow x_2 > 0$$

$$y = \frac{x+3}{Kx-1} =$$



т.к. ΔABC остроуг.,
то $\angle ABC$ остр.
след. $\angle ABC$.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$$

$$x, y > 0$$

$$K = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy - ?$$

Левые возможные значения

Решение: $x, y \neq 0$

$$Kxy = y + x + 3$$

$$y(Kx - 1) = x + 3$$

$$y = \frac{x+3}{Kx-1}$$

$$K(x-4)(y+4) = y+4 + x-4 + 3$$

$$Kx(y+4) - 4K(y+4) = y+x+3$$

$$Kxy + 4Ky - 4Kx - 16K = y+x+3$$

$$y(Kx - 4K - 1) = y+3 + 16K - 4Kx$$

$$y = \frac{x-4Kx + 16K + 3}{Kx - 4K - 1} = \frac{x+3 + 16K - 4Kx}{Kx - 1 - 4K}$$

$$y = \frac{x+3}{Kx-1}$$

$$\frac{x+3}{Kx-1} = \frac{x+3 + 16K - 4Kx}{Kx - 1 - 4K}$$

$$(x+3)(Kx-1-4K) = (Kx-1)(x+3 + 16K - 4Kx)$$

$$8Kx^2 - x - 4Kx + 3Kx - 3 - 12Kx = Kx^2 + 3Kx + 16K^2x - 4K^2x^2 - \\ \cancel{-x} - \cancel{3Kx} - 4Kx$$

$$8Kx - 4K + 16K^2x - 4K^2x^2 = 0$$

$$k(8x - 4 + 6Kx - 4Kx^2) = 0$$

$$\begin{cases} k=0 \\ -4Kx^2 + 6Kx + 8x - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ -4Kx^2 + x(8+6K) - 4 = 0 \end{cases} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$