



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №1. Заметили, что м.к. A - натуральное число, оно не равно 0.

Тогда $A = \overline{xxxx}$, где x - некая цифра от 1 до 9. Получим A на 11:

$$\frac{A}{11} = \frac{\overline{xx00}}{11} + \frac{\overline{xx}}{11} = \overline{x00} + x = \overline{x0x}. \text{ Получим } \overline{x0x} \text{ на 101:}$$

$$\frac{\overline{x0x}}{101} = x, \text{ т.е. } A = x \cdot 11 \cdot 101. \text{ Но } x < 10 < 11, \text{ т.е. } \cancel{A \neq 11^2}, A \neq 101^2$$

($x, 11 \text{ и } 101$ взаимно просты). Тогда $B \neq 101$. Но м.к. 101 - простое,

либо $B \neq 101$, либо $C \neq 101$. Т.к. $C \neq 0, C < 100, C \neq 101$, т.е. $B \neq 101, \cancel{C \neq 101}$

~~101~~ B равно 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, ~~909~~ или 909. Но м.к.

В числе B присутствует цифра 1, $B \neq 101$, т.е. $B \neq 11$. Но м.к. ABC - квадрат, $ABC \neq 11^2$ ($A \neq 11$), $\Rightarrow C \neq 11, C = \overline{yy}$. Но м.к. В числе есть цифра 5, $C = 55$, и $ABC = (x \cdot 11 \cdot 101) \cdot [101] \cdot (5 \cdot 11) = (11 \cdot 101)^2 \cdot 5x, \Rightarrow 5x$ - это квадрат, т.е. м.к. $5x \neq 5, 5x \neq 25$, и $\neq 0$ $x \in [1; 9], x = 5, A = 5555$.

Ответ: $A = 5555, B = 101, C = 55$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №2. Из условия получаем

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}, \text{ m.e. } x \neq 3,$$

$$\text{иначе } \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0}, \text{ и } \frac{1}{3} + \frac{1}{y} + \frac{1}{3}y \neq \frac{1}{0} + \frac{1}{0} + \frac{1}{y+3}.$$

Приведём дроби слева и справа к общему

знаменателю:

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{(y+3)+(x-3)+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}. \text{ т.к. } x > 0, y > 0,$$

$x+y+1 \neq 0$, и мы можем ~~не~~ сократить наим дробь на $x+y+1$:

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}, \text{ m.e. } x \neq 0, y \neq 0, x-3 \neq 0, y+3 \neq 0,$$

$$xy = (x-3)(y+3), \quad xy = xy - 3y + 3x - 9, \quad 3x = 3y + 9, \quad x = y + 3.$$

$$\text{Тогда } M = x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = (y+3)((y+3)^2 - 9y) - y^3 =$$

$$= (y+3)(y^2 - 3y + 9) - y^3 = y^3 + 3y^2 - 3y^2 - 9y + 9y + 27 - y^3 = 27.$$

Ответ: $M = 27$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА № 3. а) Перенесем наше уравнение:

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x,$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \sin(\pi y) \sin(\pi x) + \cos(\pi y) \cos(\pi x) =$$

$$= -\cos 2\pi x = \cos(\pi y - \pi x). Но -\cos d = \cos(\pi - d),$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x).$$

А если $\cos d = \cos \beta$, то $d = \pm \beta + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$,

$$\pi y - \pi x = \pm (\pi - 2\pi x) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$y - x = \pm (1 - 2x) + 2k, k \in \mathbb{Z}, y = x \pm (1 - 2x) + 2k.$$

$$-x \pm 2x = 1 + 2k - x, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x - 1 + 2k - y}{-1+2} = \frac{1 + 2k - y}{1} \text{ либо } \frac{-y - 1 + 2k}{-1+2} =$$

~~= 2k + 1~~, m.e. ~~1~~. Итак, получим графики

этих прямых ($y = -x + 1 + 2k, y = 3x - 1 + 2k$):

б) Запишем ОДЗ: $x \in [-9; 4], y \in [-9; +9]$.

Тогда при $x = -4, y = 2k + 3, y = 2k - 13$, m.e.

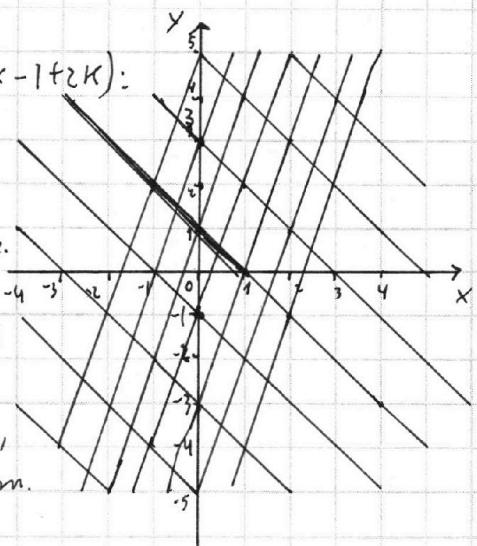
$y = 2l - 1, l \in \mathbb{Z}$, при $x = -3, y = 2k + 4, y = 2k - 10, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

m.e. $y = 2l, l \in \mathbb{Z}$. Видите, при $x = 2m - 1$

$y = -2m + 2k, y = 6m - 4 + 2k$, при $x = 2m$

$y = -2m + 2k + 1, y = 6m + 2k - 1$, итак готово,

если x чётное, y нечётное и наоборот.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Дано, если $\frac{x}{4} \leq 0$, $\arccos \frac{x}{4} \geq \pi$, и если в тоже время $\frac{y}{9} \leq 0$, то $\arccos \frac{y}{9} \geq \pi$, и $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \geq 2\pi$. При $\frac{x}{4} \leq 0, y \geq 0$, и если $y > 0$, $y \leq 0$, то $x > 0$. Где это условие подходит пары~~

~~x, y~~

~~-4 1, 3, 5, 7, 9
-3 2, 4, 6, 8
-2 1, 3, 5, 7, 9
-1 2, 4, 6, 8
0 1, 3, 5, 7, 9
1 -8, -4, -6, -2, 0, 2, 4, 6, 8~~

~~Более того, если $x > 0, y > 0$, то $\arccos x + \arccos y \geq \pi + \pi$, так что такие пары подходит всегда, а если $x = 0, y > 0$, то~~

~~$\arccos x = \pi$~~

~~Дано, м.н. $\arccos x \in [0; \pi]$ и $\arccos y \in [0; \pi]$,~~

$\arccos \left(\frac{x}{4} \right) \leq \pi$, $\arccos \left(\frac{y}{9} \right) \leq \pi$, но только при $x \in [-4; 4]$, $y \in [-9; 9]$.

Тогда всего подходящих пар

~~т.к. если x, z : $5 \cdot 10 = 50$ (5 вариантов $x: 0, 2, 4, -2, -4, 10$ вар. $y: -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9$)~~

~~* если $x/2$: $4 \cdot 9 = 36$ (4 варианта $x: -3, -1, 1, 3, 9$ вар. $y: -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8$)~~

Итого ~~50~~ ~~36~~ 86 пар.

Ответ: а) $y = 2k - x + 1$ ибо $y = 2k + 3x - 1$, $k \in \mathbb{Z}$; б) 86 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА № 4. Первым делом ~~не~~ обозначим число одиннадцати

классиков за n , а число билетов, которое им решитъ раздать в конце месяца за k . Тогда шансы и Пети, и Васи попасть на концерт равны:

• В НАЧАЛЕ МЕСЯЦА: $\frac{12}{n(n-1)}$ • В КОНЕЦ МЕСЯЦА: $\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$
 (всего вариантов раздачи q билетов n одиннадцати классикам C_n^q , но если в начале досталось Пети и Васе, то существует C_{n-2}^{q-2} способов раздать ~~и~~ оставшиеся $q-2$ билета $n-2$ классикам.)

Как, этого шанса и Пети, и Васи попасть на концерт равны

$$\frac{C_{n-2}^{q-2}}{C_n^q} = \frac{\frac{(n-2)!}{(q-2)!(n-2-(q-2))!}}{\frac{n!}{q!(n-q)!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(q-2)!(n-q)!}}{\frac{n!}{q!(n-q)!}} = \frac{q!(n-2)!}{(q-2)!(n-q)!} = \boxed{\frac{q(q-1)}{(q-2)!(n-1)!}}$$

$$= \frac{(q-2)! \cdot q \cdot (q-1)}{(q-2)!} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-2)!(n-1)!} = \frac{q(q-1)}{n(n-1)}$$

По условию шанса в конце месяца в 3.5 раз больше шансов в начале месяца, т.е.

$$\frac{12}{n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{3.5(n-1)n} . \text{ Т.к. в классе есть и Петя, и}$$

Вася, $n-1 \neq 0$, $n \neq 0$, и $42 = 12 \cdot 3.5 = k(k-1)$, т.к. $k > 4$, $k(k-1) = 6 \cdot 7$,

$$k = 7.$$

Ответ: 7 билетов.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

ЗАДАЧА №6: Найдите коорд. множества:

Тогда из 2-го уравнения $(x^2+y^2 \leq 9)$

следует, что фигура Ω полного

лежит в окр-тии Ω . Далее,

запишем, что неравенство

~~$(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0$~~

$(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0$ равносильно

$x \geq 2\cos\alpha, y \geq 2\sin\alpha$ либо ~~$x \leq 2\cos\alpha, y \leq 2\sin\alpha$~~

$x \leq 2\cos\alpha, y \leq 2\sin\alpha$,

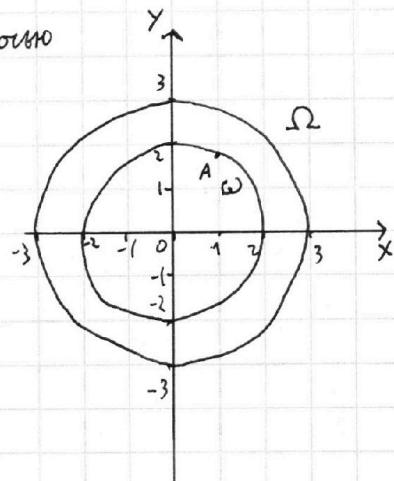
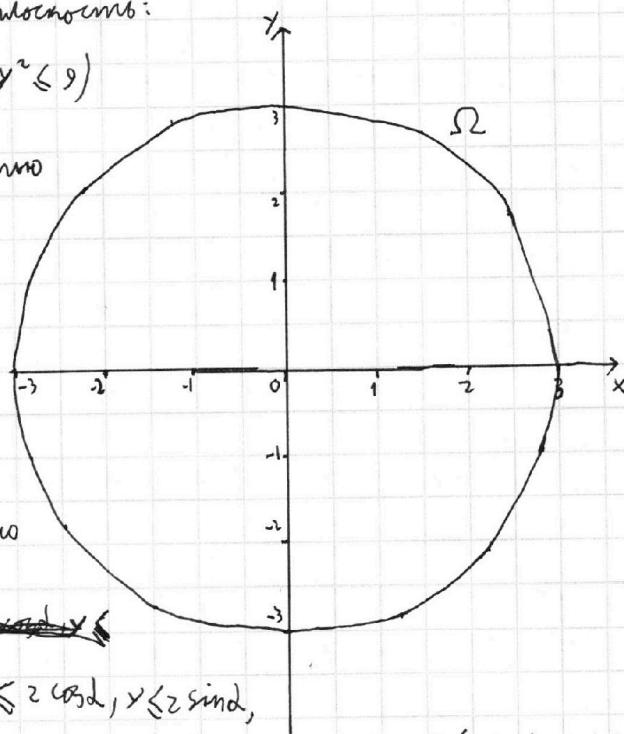
т.е. это все точки, лежащие правее и выше точки $A(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$

и все точки, лежащие левее и ниже A . Но ~~это~~ ГМТ точек A —

это окружность ω с радиусом 2 и центром $O(0;0)$:

Тогда угол α — это угол между OA и осью

абсцисс. См. след. лист.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

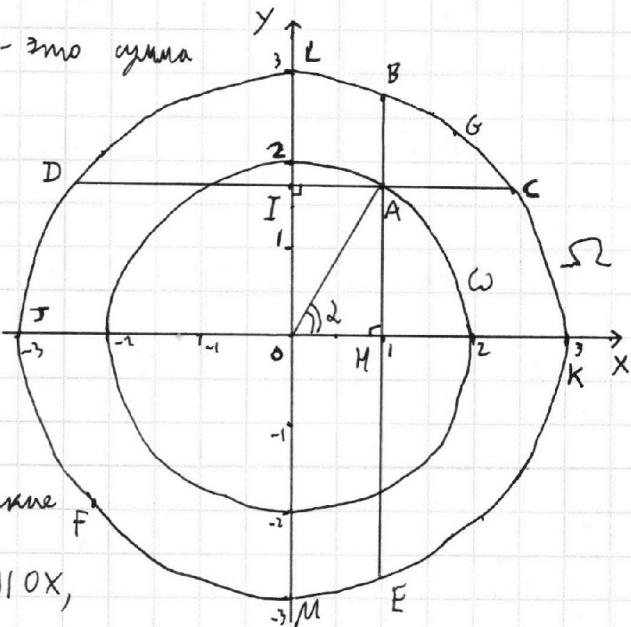
Тогда периметр фигуры M - это сумма

$$P_1 = AD + AB + AC + AE \quad \text{и} \quad P_2, \text{ где}$$

P_2 - сумма длин дуг BGC и DFE .

(CD проходит через A и параллельно оси X , BE проходит через

A и параллельно оси Y , G, F - некие точки на Ω). Но т.к. $CD \parallel OX$,



$CD \perp OY$, откуда $CI = DI$ (I -м.пересечения OY и CD , H - т.пересеч.

$BE \text{ и } OX$), аналогично $BH = EH$. Но тогда, т.к. $DI \perp IO$, $CI \perp IO$,

по м.Пифагора $\angle DOI = \angle COI$, так что $\angle DOJ = 90^\circ - \angle DOI = 90^\circ - \angle COI =$

$= \angle COK$, т.е. длина дуги DJ равна длине дуги CK . (J -м.она (-3; 0), K -м.она (3; 0)). Аналогично находим, что длина дуги BL равна

длине дуги ME (м.она (0; -3), L -м.она (0; 3)), что

P_1 равно сумме длины MJ , JD , ME и BC , что в свою очередь

равно сумме длины MJ , CK , BL и BC , что равно сумме длины дуг

MJ и KL , что равно 3π ,

$M = P_1 + 3\pi$. Теперь найдём P_1 . $P_1 = AC + AD + BE =$

$= BE + CD = BH + HE + IC + ID$, что по т.Пирамида ~~равно~~ $\sqrt{HO^2 + EH^2}$

ΔCIS и ΔDIO равно $\sqrt{BO^2 - OH^2} + \sqrt{OE^2 - OH^2} + \sqrt{OC^2 - OJ^2} + \sqrt{OD^2 - OJ^2} =$ см. след. лист.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$= \sqrt{9-OH^2} + \sqrt{9-OH^2} + \sqrt{9-OI^2} + \sqrt{9-OI^2} = 2(\sqrt{9-OH^2} + \sqrt{9-OI^2}) \quad \text{※}$$

* Но ~~OK~~ $\frac{OK}{OA} = (\cos \alpha)$ ~~если H лежит на OA , то O, H, A лежат на одной прямой~~, $\frac{OI}{OA} = |\sin \alpha|$,

$$P_1 = 2\left(\sqrt{9-OA^2 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9-OA^2 \sin^2 \alpha}\right), \text{ т.к. } OA=2,$$

$$P_1 = 2\left(\sqrt{5+4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{5+4 \sin^2 \alpha}\right) = 2\left(\sqrt{5+4 \sin^2 \alpha} + \sqrt{5+4 \cos^2 \alpha}\right),$$

$M(\alpha) = P_1(\alpha) + 3\pi$. Для поиска экстремумов $M(\alpha)$, будем дифференцировать ее по α : $M'(\alpha) = P'_1(\alpha) = 2\left(\frac{\partial}{\partial \alpha}(\sqrt{5+4 \sin^2 \alpha}) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(\sqrt{5+4 \cos^2 \alpha})\right)' =$

$$= 2\left(\frac{(4 \sin^2 \alpha)'}{\sqrt{5+4 \sin^2 \alpha}} + \frac{(4 \cos^2 \alpha)'}{\sqrt{5+4 \cos^2 \alpha}}\right) = 2\left(\frac{(5+4 \sin^2 \alpha)'}{2\sqrt{5+4 \sin^2 \alpha}} + \frac{(5+4 \cos^2 \alpha)'}{2\sqrt{5+4 \cos^2 \alpha}}\right) = \\ = \frac{(4 \sin^2 \alpha)'}{\sqrt{5+4 \sin^2 \alpha}} + \frac{(4 \cos^2 \alpha)'}{\sqrt{5+4 \cos^2 \alpha}} = 4\left(\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5+4 \sin^2 \alpha}} - \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5+4 \cos^2 \alpha}}\right) = 4 \sin 2\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{5+4 \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{5+4 \cos^2 \alpha}}\right).$$

Экстремумы получены, когда $M'(\alpha) = 0$, т.е. max, что если

$$M'(\alpha) = 0, \quad 4 \sin 2\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{5+4 \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{5+4 \cos^2 \alpha}}\right) = 0,$$

$$\sin 2\alpha = 0$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{5+4 \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{5+4 \cos^2 \alpha}}.$$

$$2\alpha = \pi K, K \in \mathbb{Z}, \\ \alpha = \frac{\pi}{2} K, K \in \mathbb{Z}$$

$$\text{т.к. } \sqrt{5+4 \sin^2 \alpha} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{5+0}, \sqrt{5+4 \cos^2 \alpha} > 0,$$

$$\sqrt{5+4 \sin^2 \alpha} = \sqrt{5+4 \cos^2 \alpha},$$

$$4 \sin^2 \alpha = 4 \cos^2 \alpha,$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha,$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} K, K \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
ЧИЗ Ч

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак, эллиптическая $M(d)$ достигает при $d = \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$ и при

$d_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что из соображений симметрии

относительно центра O $M(d_1) = M(d_1 + \frac{\pi}{2}) = M(d_1 + \pi) = M(d_1 + \frac{3\pi}{2})$,

$M(d_2) = M(d_2 + \frac{\pi}{2}) = M(d_2 + \pi) = M(d_2 + \frac{3\pi}{2})$. Осталось показать, что из

$M(d_1)$ и $M(d_2)$ максимум, а это — минимум. Для этого

вспомним $P_1(d_1)$ и $P_1(d_2)$:

$$P_1\left(\frac{\pi}{2}k\right) = P_1(0) = 2\sqrt{5+4\sin^2(0)} + 2\sqrt{5+4\cos^2(0)} = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5+4} = 2\sqrt{5} + 6.$$

$$P_1(d_2) = P_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{5+4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} + 2\sqrt{5+4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{5+4\frac{1}{2}} + 2\sqrt{5+\frac{4}{2}} = 4\sqrt{7}.$$

$$\cancel{P_1(0)} \vee \cancel{P_1(\frac{\pi}{2}k)} \quad P_1(0) \vee P_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\overset{\frac{\pi}{4}}{\uparrow} \\ 0 < 2\sqrt{5} + 6 \vee 4\sqrt{7} > 0$$

$$\uparrow \\ 36 + 20 + 24\sqrt{5} \vee 16 \cdot 7$$

$$\downarrow \\ 24\sqrt{5} \vee 56$$

$$\downarrow \\ 0 < 3\sqrt{5} \vee 7 > 0 \Leftrightarrow 45\sqrt{49} \Leftrightarrow 45 < 49, \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2\sqrt{5} + 6 < 4\sqrt{7}$, $P_1(0) < P_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$, т.е. $P_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ — максимум,

и ввиду $M(d) = P_1\left(\frac{\pi}{4}\right) + P_2 = 3\pi + 4\sqrt{7}$, что достигается при $d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

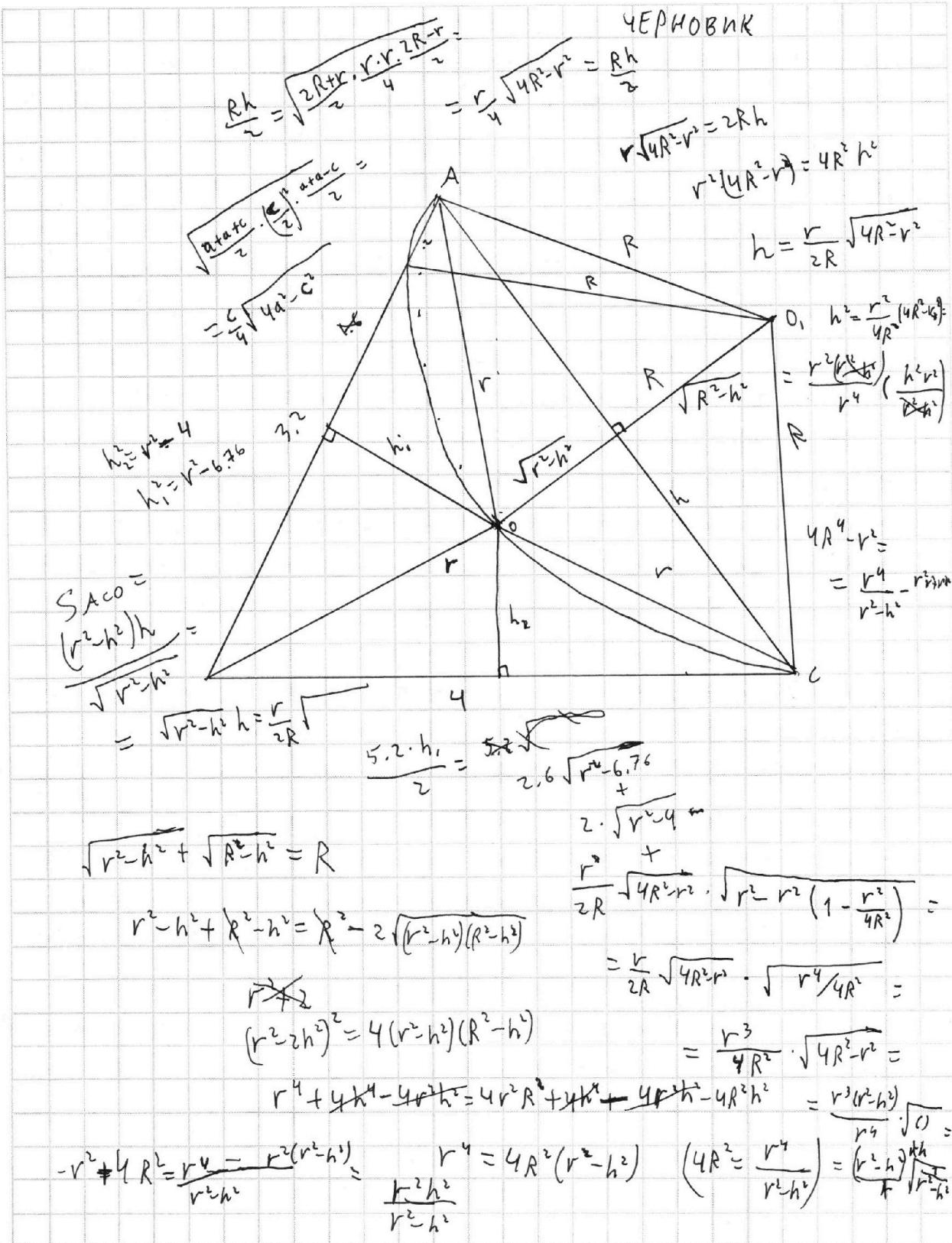
Ответ: $M(d)_{\max} = 3\pi + 4\sqrt{7}$, $d_{\max} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





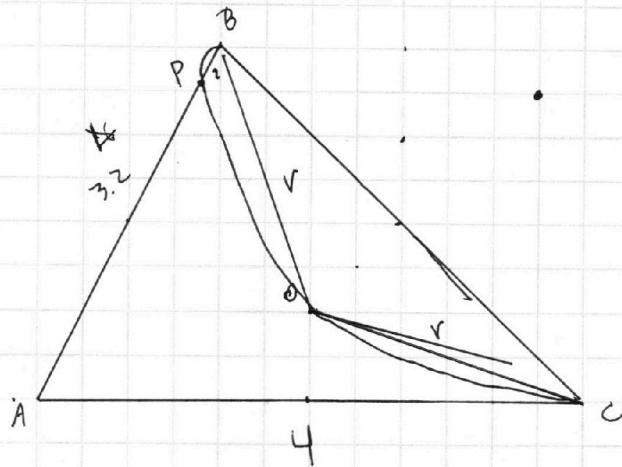
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

The diagram shows a triangle ABC on a grid. Point O is located inside the triangle. Line segments connect O to each of the three vertices: A, B, and C. The label 'ЧЕР' is written in the top right corner.

ЧЕРНОВИК



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{C} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{xx} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xx} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$A = \overline{xxx} = x \cdot 11 \cdot 101$$

$$B = \cancel{xxz} \text{ или } \cancel{xyz} \text{ или } \cancel{yzx}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 101 & 202 & 303 & 404 & 505 & 606 \\ \cancel{707} & \cancel{808} & \cancel{909} & & & & \end{array}$$

$$C = + \cancel{12} \cancel{33} \cancel{44} \cancel{55} \cancel{66} \cancel{77} \cancel{88} \cancel{99}$$

$$101 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 5 \cdot x \Rightarrow x=5.$$

№ 11-КОВ: n.

Шарен П.н.в.:

изначально

$$\text{П.} \frac{4}{n}, \text{ В.} \frac{3}{n}, \text{ Г.} \frac{5}{n}, \text{ Д.} \frac{12}{n(n-1)}$$

ТЕПЕРЬ:

КБИЛЕТОВ,

$$\frac{C_{n-2}^{K-2}}{C_n^K} = \frac{(n-2)!}{(K-2)!(n-K)!} = \frac{4!(n-2)!}{2!n!} = \frac{12 \cdot K}{n(n-1)} = \frac{(n-2)!}{n!} = n-2-(K-2)$$

$$= \frac{(n-2)! \cdot K}{(K-2)!n!} = \frac{K \cdot (K-1)}{n(n-1)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 12}{n(n-1)} = \frac{42}{n(n-1)},$$

$$K^2 - K = 42, \quad K=7.$$

ЧЕРНОВИК

1	2	3	4	5	6	7
X	X ₃	X ₅	X ₄		X ₆	

TOTAL 32, CURRENT 8

26 21

$$\cancel{(x^2+x)} = \cancel{x^3-y^3}$$

$$(y+3)^3 - y^3 - 9y^2 - 27y =$$

$$\frac{C_m^2}{C_n^4} \ominus = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 27$$

$$\ominus \frac{(n-2)!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{4!(n-4)!}$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{24} = 15$$

АБВГД
АБВД
АБВП
АБВАП
АБГА
АБГП
АБАП
АВГД
АВГМ
АВДП
АГДП
42
15

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

