



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- ✦ 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- ✦ 2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- ✦ 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

- ✦ 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- ✦ 5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

1. Заметим, что число A , составленное из одинаковых цифр должно делиться на 1111 , т.к. все четырехзначные

числа из одинаковых цифр имеют вид $1111 \cdot k$, где $k \in [1; 9]$, $k \in \mathbb{Z}$

2. Число 1111 делится на 101 и 11 . (101 и 11 - простые)

Т.к. $A \cdot B \cdot C$ - квадрат натур. числа, то $\begin{cases} B \cdot C : 101 \\ B \cdot C : 11 \end{cases}$
(степень вхождения множителя должна ≥ 2)

Поскольку 101 и 11 - простые, то $\begin{cases} B : 101 \\ C : 101 \\ B : 11 \\ C : 11 \end{cases}$

3. Т.к. двузначное число не может

нацело делиться на трехзначное, то

$B : 101$ (и $B < 101 \cdot 11$) и $C : 11$.

4. $B = 101 \cdot m \Rightarrow B = \overline{m0m} \rightarrow$ т.е. B содержит цифру

$3 \Leftrightarrow B = 303$ (при данных условиях)

5. $C = 11 \cdot l \Rightarrow C = \overline{ll} \rightarrow$ т.е. C содержит цифру

$2 \Leftrightarrow C = 22$

6. Тогда $ABC = 1111 \cdot k \cdot 303 \cdot 22 = (101)^2 \cdot (11)^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k$;

$k = (2 \cdot 3)^b$; $b \geq 2$
 $k = (2 \cdot 3)^b$; $b \in \mathbb{N}$ и $k \in [1; 9] \Rightarrow k = 6$ Ответ: $(6666; 303; 22)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$k = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

Приравняем значение k:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy \frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+x+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{2+x+y}{xy} = \frac{2+x+y}{(x-1)(y+1)}$$

$$\begin{cases} 2+x+y=0 \\ xy=(x-1)(y+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+2=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}$$

+к. x и $y > 0$,
то $x+y > 0$,
но $x+y = -2$,
противоречие

$$\underline{x-y-1=0}; \quad x-y=1$$

Подставим в M:

$$M = (x-y)^3 + 3xy(x-y-1) = 1^3 + 3xy \cdot 0 = 1$$

Ответ: 1

$$x, y > 0; \quad y \neq -1; \quad x \neq 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy =$$

$$= (x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 3xy =$$

$$= (x-y)^3 + 3xy(x-y-1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\textcircled{I} \begin{cases} x-y=2k+1 \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

из неравенств: $(-5-4-1) \cdot \frac{1}{2} \leq k \leq (5+4-1) \cdot \frac{1}{2}$

$$-5 \leq k \leq 4$$

это условие даёт, что $k \neq 4$ (т.к. это max x и min y)

$$-5 \leq k < 4; k \in \mathbb{Z}$$

$k=-5$	$k=-4$	$k=-3$	$k=-2$	$k=-1$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$x-y=-9$	$x-y=-7$	$x-y=-5$	$x-y=-3$	$x-y=-1$	$x-y=1$	$x-y=3$	$x-y=5$	$x-y=7$

Возьмем пары чисел x, y , удовн. нер-вам и ур-ням:

$(-5; 4)$	$(-5; 2)$	$(-5; 0)$	$(-5; -2)$	$(-5; -4)$	$(-3; -4)$	$(-1; -4)$	$(1; -4)$	$(3; -4)$
$(-4; 4)$	$(-4; 3)$	$(-4; 1)$	$(-4; -1)$	$(-4; -3)$	$(-2; -3)$	$(0; -3)$	$(2; -3)$	$(4; -3)$
$(-3; 4)$	$(-3; 2)$	$(-3; 0)$	$(-3; -2)$	$(-1; -2)$	$(1; -2)$	$(3; -2)$	$(5; -2)$	
	$(-2; 3)$	$(-2; 1)$	$(-2; -1)$	$(0; -1)$	$(2; -1)$	$(4; -1)$		
	$(-1; 4)$	$(-1; 2)$	$(-1; 0)$	$(1; 0)$	$(3; 0)$	$(5; 0)$		
		$(0; 3)$	$(0; 1)$	$(2; 1)$	$(4; 1)$			
		$(1; 4)$	$(1; 2)$	$(3; 2)$	$(5; 2)$			
			$(2; 3)$	$(4; 3)$				
			$(3; 4)$	$(5; 4)$				

всего 49 пар

Рассмотрим систему II



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

Всего пар где $n \in [-1; 9]$ получилось 27.

Сложим все получившиеся пары и вычтем из них ^{званды} повторяющиеся: (повтор. \checkmark подчеркнуты большой линией)

$$49 + 22 + 27 - (22 + 27) = 49 + 49 - 49 = 49 \text{ пар}$$

Ответ: 49 пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

В.1 Посмотрим на область значений \arcsin и \arccos :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad \arcsin x + \arccos y \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$0 \leq \arccos y \leq \pi$$

То есть неравенство $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$ выполняется всегда, кроме тех случаев, когда $\frac{x}{5}$

То есть неравенство $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$

выполняется при условиях: $-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$; $-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$;

и $\begin{cases} \frac{x}{5} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq -1 \end{cases}$ т.к. исходное неравенство строгое где области определения \arcsin и \arccos

Получаем систему:

$$\begin{cases} x-y-1=2k & k, n \in \mathbb{Z} \\ 3x+y-1=2n \\ -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \\ \frac{x}{5} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y-1=2k & k, n \in \mathbb{Z} \\ 3x+y-1=2n \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y-1=2k & \text{т.к.} \\ -5 \leq x \leq 5 & \text{I} \\ -4 \leq y \leq 4 & x, y \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases} & \text{но усл.,} \\ & \text{то разберем} \\ 3x+y-1=2n & \text{варианты:} \\ -5 \leq x \leq 5 & \text{II} \\ -4 \leq y \leq 4 \\ \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$3x + y - 1 = 2n \quad \text{из пер-в и ур-ше: } \frac{-20}{2} \leq n \leq \frac{10-1}{2} = 9$$

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 & \text{II} \\ -4 \leq y \leq 4 \\ x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{cases}$$

~~каждое значение n дает по 10 пар~~

Рассмотрим сначала $n \in [-10; -2]$

$n = -10$	$n = -9$	$n = -8$	$n = -7$	$n = -6$	$n = -5$	$n = -4$	$n = -3$	$n = -2$
$3x + y = -19$	$3x + y = -17$	$3x + y = -15$	$3x + y = -13$	$3x + y = -11$	$3x + y = -9$	$3x + y = -7$	$3x + y = -5$	$3x + y = -3$

Выпишем пары целых $(x; y)$, удовн. пер-вам и ур-ше:

$(-5; -4)$	$(-5; -2)$	$(-5; 0)$	$(-5; 2)$	$(-5; 4)$	$(-4; 3)$	$(-3; 2)$	$(-3; 4)$	$(-2; 3)$
	$(-4; -3)$	$(-4; -1)$	$(-4; 1)$	$(-3; 0)$	$(-2; -1)$	$(-2; 1)$	$(-1; 0)$	
		$(-3; -4)$	$(-3; -2)$	$(-2; -3)$	$(-1; -4)$	$(-1; -2)$	$(0; -3)$	

всего 22 пары

Рассмотрим теперь $n \in [-1; 9]$:

$n = -1$	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$
$3x + y = -1$	$3x + y = 1$	$3x + y = 3$	$3x + y = 5$	$3x + y = 7$	$3x + y = 9$	$3x + y = 11$	$3x + y = 13$	$3x + y = 15$	$3x + y = 17$	$3x + y = 19$

Выпишем пары целых $(x; y)$ удовн. пер-вам и ур-ше:

$(-1; 2)$	$(-1; 4)$	$(0; 3)$	$(1; 2)$	$(1; 4)$	$(2; 3)$	$(3; 4)$	$(4; 3)$	$(5; 2)$
$(0; -1)$	$(0; 1)$	$(1; 0)$	$(2; -1)$	$(2; 1)$	$(3; 0)$	$(4; 1)$	$(4; 1)$	$(5; 0)$
$(1; -4)$	$(1; -2)$	$(2; -3)$	$(3; -4)$	$(3; -2)$	$(4; -3)$	$(5; 2)$		$(5; 4)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$a.) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

Воспользуемся формулой суммы синусов и суммы косинусов:

$$2 \cdot \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \pi x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \pi x - \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \pi x = 0 \end{cases}$$

применим формулу косинуса разности

$$\begin{cases} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} = 0 \\ \cos \left(\frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\pi(x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi(x+y)}{2} + \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} x-y-1 = \pi k \cdot \frac{2}{\pi} \\ k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \\ 3x+y-1 = \pi n \cdot \frac{2}{\pi} \end{cases}$$

Ответ:

$$\begin{cases} \begin{cases} x-y-1 = 2k \\ 3x+y-1 = 2n \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z} \\ \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = x-1-2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 2n+1-3x, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{cases}$$

8.)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

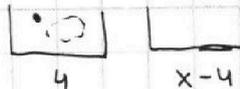
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4 Пусть x - общее число детей

Детей в данной задаче будем считать на 2 группы:

те, кто попадают на концерт и те, кто не попадают на концерт.

Начало месяца:


 Вероятность попасть в группу полаг. Пете и Васье вместе равна:

$$P_{\text{начало}} = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$$

← после того, как кто-то из них уже попал, второйу остается 3 места и на этот момент есть $x-1$ "неопределенных" мест

Конец месяца:


 n - число билетов в конце месяца

↑ аналогично, $P_{\text{конец}} = \frac{n}{x} \cdot \frac{n-1}{x-1}$

По условию:

$$\frac{5}{2} \cdot \left(\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \right) = \frac{n}{x} \cdot \frac{n-1}{x-1} \quad | \cdot (x)(x-1) \neq 0$$

$$30 = n(n-1)$$

$$n^2 - n - 30 = 0$$

$$\begin{cases} n=6 \\ n=-5 \end{cases}, \text{ т.к. } n \in \mathbb{N}, \text{ то } n=6 \quad \text{Ответ: } 6$$



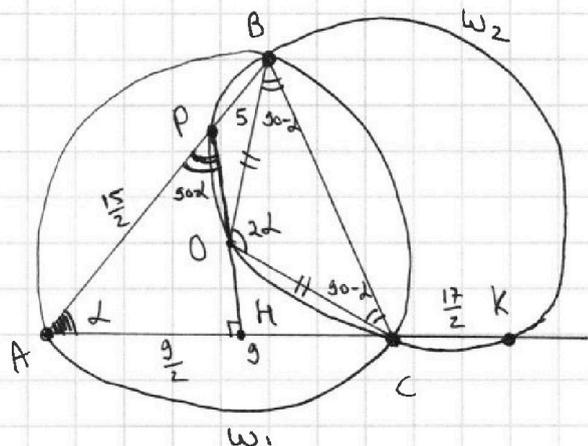
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5



1. Степень точки A отн-но ω_2 равна:

$$\deg_{\omega_2} A = AP \cdot AB \quad (1)$$

$$\deg_{\omega_2} A = AK \cdot AC \quad (2)$$

↑
вне зависимости от положения т.к

2. Приравняем (1) и (2):

$$AP \cdot AB = AK \cdot AC$$

$$\frac{15}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) = 9 \cdot AK; \quad AK = \frac{18 \cdot 25}{4 \cdot 9} = \frac{125}{12} > 9$$

3. $CK = AK - AC = \frac{125}{12} - 9 = \frac{17}{12}$

↑
т.к. лежит на продолжении AC за т.С

4. Т.к. O - центр ω_1 , то:

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \angle BOC = \alpha; \quad \angle BOC = 2\alpha$$

5. Т.к. OPB - вписанный, то $\angle BPO + \angle OCB = 180^\circ$;

$$\angle OCB = \frac{180 - \angle BOC}{2} = 90 - \alpha \quad (\text{по сумме углов тр-ка});$$

Тогда $\angle BPO = 180 - 90 + \alpha = 90 + \alpha$ и $\angle APO = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$
как смежные

6. Продлим PO до пересечения с AC. Пусть это будет

т.к. Тогда по сумме углов $\triangle APK$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\angle AHP = 180 - 2 - (90 - 2) = 90^\circ; PH \perp AC$$

7. А отрезок AH тогда равен $\frac{AC}{2}$, поскольку AH -

- \perp к AC, проведенный из центра опис. окр-ти.

$$AH = \frac{AC}{2} = \frac{9}{2} = 4,5$$

8. Косинус угла $\angle BAC$:

$$\cos \alpha = \frac{AH}{AP} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5};$$

$$\sin \alpha = + \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

9. Найдем площадь $\triangle ABC$:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{15}{2} + 5 \right) \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} \textcircled{=}$$

$$\textcircled{=} \frac{25 \cdot 5}{4} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = 45$$

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

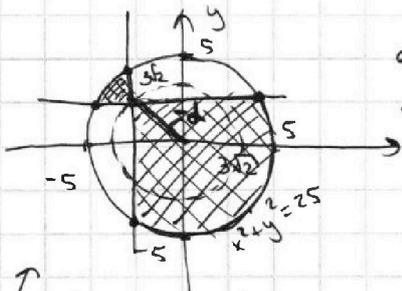
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha \\ x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \textcircled{I} \\ \begin{cases} y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha \\ x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \textcircled{II} \\ x^2 + y^2 \leq 25 \textcircled{III} \end{cases}$$

1. Заметим, что \textcircled{II} - это уравнение круга с центром в т. $(0; 0)$ и радиусом 5

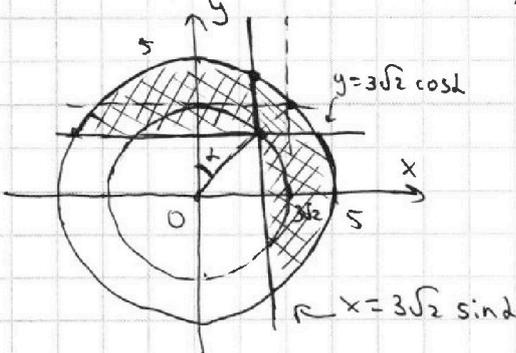
2. Совокупность \textcircled{I} создает две части разных полуплоскостей:



← общий вид фигуры, заданной данной системой.

угол α отсчитывается от оси y против часовой стрелки

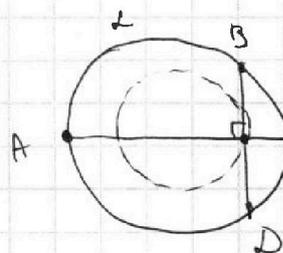
3. Периметр такой фигуры складывается из дуги дуг окружности с радиусом 5 и дуги ее \perp хорды, пересекающиеся на



окр-ти с центром в т. $(0; 0)$ и радиусом $3\sqrt{2}$

- такие области образуют фигуру

4



$$\varphi_0 = \frac{\nu_{AB} + \nu_{CD}}{2}$$

$\nu_{AB} + \nu_{CD} = 180^\circ$
угол между хордами



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

⑤ Т.е. сумма градусных мер углов AB и CD всегда постоянна и равна $180^\circ \Rightarrow$ ^{суммарная} градусная мера углов AB и CD также постоянна и равна $\frac{1}{2}(2 \cdot \pi \cdot 5) = 5\pi$

⑥ Т.е., чтобы получить макс значение M , нужно максимизировать длину хорды AC и BD

$$B(3\sqrt{2}\sin\alpha; y_B); D(3\sqrt{2}\sin\alpha; y_D)$$

$$|BD| = \sqrt{(3\sqrt{2}\sin\alpha - 3\sqrt{2}\sin\alpha)^2 + (y_B - y_D)^2} =$$

$$= |y_B - y_D|; \quad y_B^2 + 12\sin^2\alpha = 25; \quad y_D^2 + 12\sin^2\alpha = 25$$

"

$$|y_B - y_D| = 2\sqrt{25 - 12\sin^2\alpha}$$

~~$$|AC| = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2}$$~~

$$|AC| = \sqrt{(x_A - x_C)^2} = |x_A - x_C|$$

$$y_A \quad x_A^2 + 12\cos^2\alpha = 25; \quad x_C^2 + 12\cos^2\alpha = 25;$$

$$AC = |x_A - x_C| = 2|x_A| = 2\sqrt{25 - 12\cos^2\alpha}$$

$$M = \max(2\sqrt{25 - 12\sin^2\alpha} + 2\sqrt{25 - 12\cos^2\alpha})$$

max достигается
при $\alpha = 45^\circ$,
 $\alpha = 135^\circ$, $k\pi, \dots$

$$(2\sqrt{25 - 12\sin^2\alpha} + 2\sqrt{25 - 12\cos^2\alpha})' = 0$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} (25 - 12\sin^2\alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-24 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha) + 2 \cdot \frac{1}{2} (25 - 12\cos^2\alpha)^{-\frac{1}{2}} \cdot (24 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha) = 0$$

$$\frac{12\sin 2\alpha}{\sqrt{25 - 12\cos^2\alpha}} - \frac{12\sin 2\alpha}{\sqrt{25 - 12\sin^2\alpha}} = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \\ \cos 2\alpha = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3x + y = 2n + 1$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$x \neq 5$$

$$y \neq -4$$

II

$$-\frac{20}{2} \leq n \leq (3 \cdot 5 + 4 - 1) \cdot \frac{1}{2}; \quad -10 \leq n \leq 9$$

$$\text{т.е. } n \neq (3 \cdot 5 + (-4) - 1) \cdot \frac{1}{2} = 5 \rightarrow \begin{cases} -10 \leq n \leq 9 \\ n \neq 5 \end{cases}$$

* Сначала рассмотрим $-10 \leq n \leq -1$:

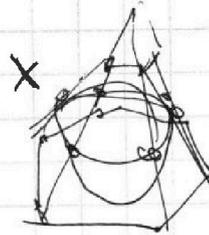
$$n = -10 \quad n = -9 \quad n = -8 \quad n = -7 \quad n = -6 \quad n = -5 \quad n = -4 \quad n = -3 \quad n = -2 \quad n = -1$$

$$3x + y = -19$$

$$3x + y = A$$

$$y > 4$$

$$x < 1$$



$$2,5 \text{ ряда}_1 = \text{ряда}_2$$

14

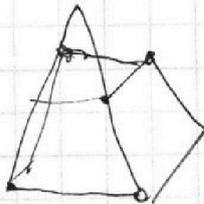
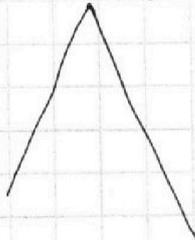
$$\frac{n-9}{2} \cdot \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{n}{2} \cdot \frac{n-1}{x-1}$$

$$-10 \leq n \leq 9$$

$$x \neq 1$$

$$2n(n-1) = 60$$

$$n(n-1) = 30$$





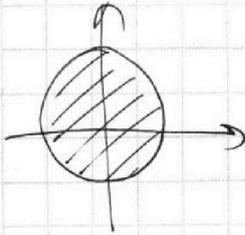
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

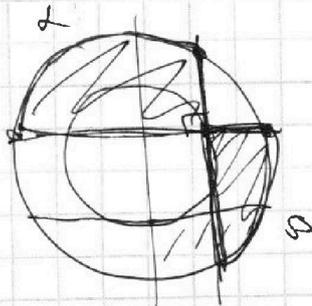
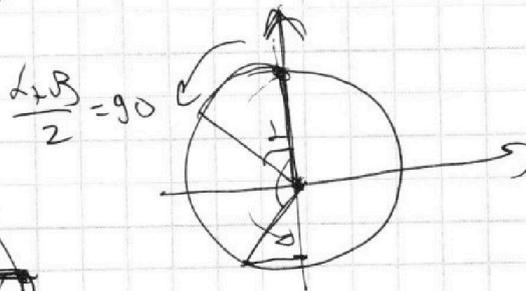
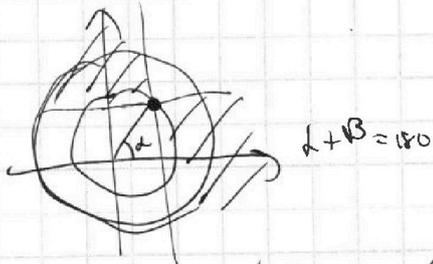
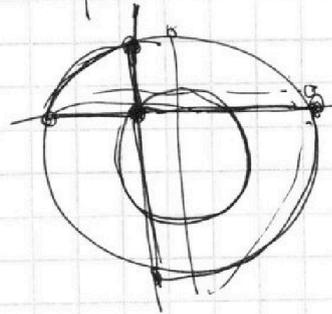
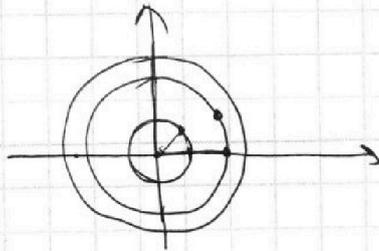
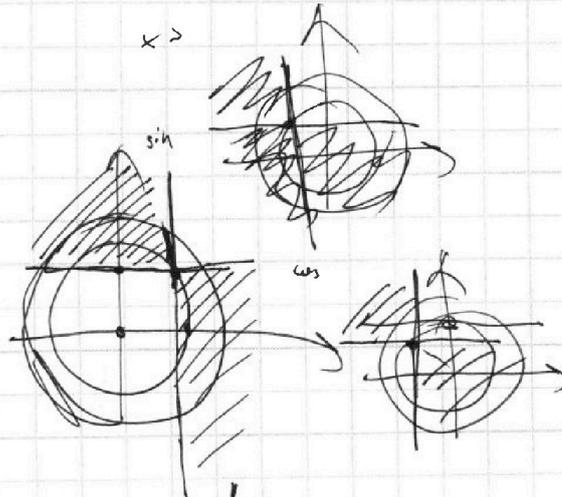
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°6



$$x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha$$
$$y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha$$



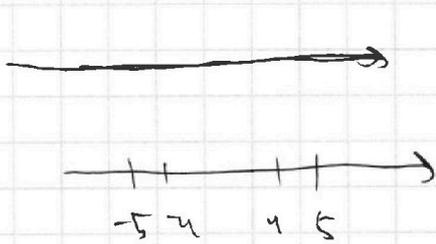


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$x - y = 2k + 1$$

$$x - y \in (2k+1)$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$5 + 9 = 2k + 1$$

$$-4 \leq k \leq 3$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

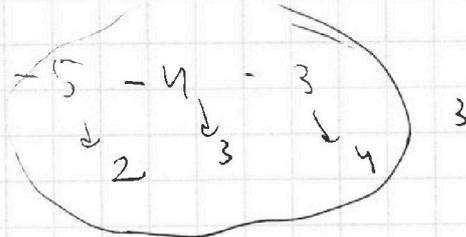
~~$$x - y = 2k + 1$$~~

$$x \in \mathbb{R}$$

(1) 35

$$x - y = -7$$

$$x - y =$$



$$x - y = -$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарно количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

II $3x+y=1+2n$

$-5 \leq x \leq 5$

$-4 \leq y \leq 4$

$x \neq 5$

$y \neq -4$

это условие значит, что $n \neq (5-4+1) \cdot \frac{1}{2} = 5$

генерируем

заменим: $3x = t$; тогда $\leq t \leq$

$3x = t$

тогда

$\leq t \leq$

201

192

101

101

$3x+y-1=2n$

$-5 \leq x \leq 5$

$-4 \leq y \leq 4$

kkkk :

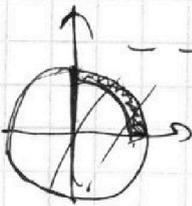
$\frac{1111}{11} \mid \frac{11}{101}$

$101 \cdot 11$

$\cos t \rightarrow$

$1111 \cdot k$

$(101) \cdot 11 \cdot k \cdot x^2 + y^2 \geq 12$



$x \leq 3\sqrt{2}$

$1111 \cdot k$

$101 \cdot 303 \cdot 11 \cdot k \cdot 22$

$\sin t > 0$

$\cos t > 0$

$(11) \cdot (101) \cdot k$

$x^2 \geq 12 \sin^2 t$

$x \geq 3\sqrt{2} \cdot y^2 \geq 12 \cos^2 t$

$x \geq 3\sqrt{2} \sin t$

$x \geq 3\sqrt{2} \cdot y^2$

$(5; -4)$

$3x+y=11$

$(-5; 4)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

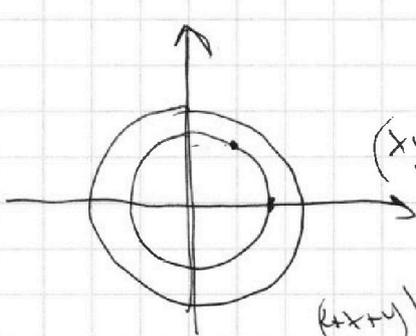
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x - 3\sqrt{2} \sin t) (y - 3\sqrt{2} \cos t) \leq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \sin t \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos t \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \sin t \\ y \geq 3\sqrt{2} \cos t \end{cases}$$



$$10x^3y^3 - 3x^2y^2 + 3xy - 1$$

$$(xy+1)^3 - xy(xy-3)$$

$$\begin{aligned} y &\neq -1 \\ x &\neq 1 \\ x, y &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x+y)(x-1)(y+1) &= (x+y)(xy+x-y-1) \\ x^3 - y^3 - 3xy &= (x-y)(x^2 + xy + y^2 - 3xy) \end{aligned}$$

$$x, y > 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{(x+y)^3}{xy} = \frac{y+x+x-y+2}{(x-1)(y+1)} \quad x^3 - y^3 - 3xy$$

$$x^3 + y^3$$

$$(x+y)^3$$

$$\begin{cases} 2+x+y=0 \\ xy=(x-1)(y+1) \\ xy = xy + x - y - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-y-1=0) \\ 2+x+y=0 \end{cases}$$

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \quad 1^3 + 3 \cdot y \cdot 0 = 1$$

$$(x-y)^3 + 3x^2y - 3xy^2 - 3xy$$

$$(x-y)^3 + 3xy(x-y-1) - ?$$



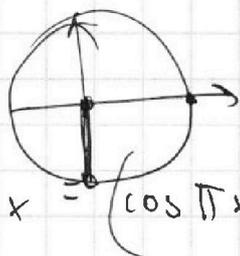
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W-3



$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \dots \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \arccos \dots \leq \pi$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

Сумма $\cos \alpha \cos \beta$

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\pi x = \alpha + \beta$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = -12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = -12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\pi y = \alpha - \beta$$

$$= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi x + \pi y}{2}$$

$$x - y = 1 = 2k \Rightarrow 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 25 - 12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \pi x \cdot \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} =$$

$$\arcsin \frac{2k+y+1}{5} + \arccos \frac{y}{4} = 2 \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi(x-y)}{2} = 0$$

$$25 - 12 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\arcsin \dots \sin \pi x \cdot \sin \frac{\pi(x+y)}{2} = \cos \pi x \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2}$$

sin → y cos

cos(πx + π(x+y)/2) = 0

25 - 12 sin^2 = 0

2x = 1/2

2 * 1/2 * x



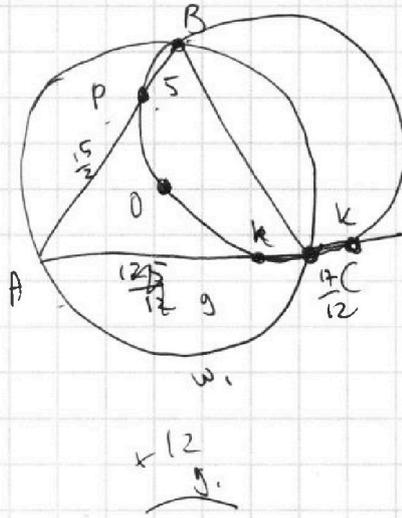
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N^o 5



S_{ABC}

$$AB = \frac{15}{2}$$

$$BP = 5$$

$$AC = g$$

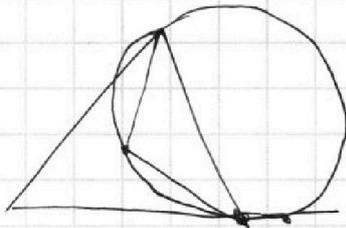
$$\left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot \frac{15}{2} = AK \cdot g$$

$$AK = \frac{25}{2} \cdot \frac{15}{2 \cdot g}$$

$$\frac{25}{5}$$

$$\frac{15}{2} + 5 = \frac{25}{2} \cdot \frac{15}{2} = 4.3$$

$$= \frac{5^3 \cdot 3}{2^2 \cdot 3^2} = \frac{125}{12}$$



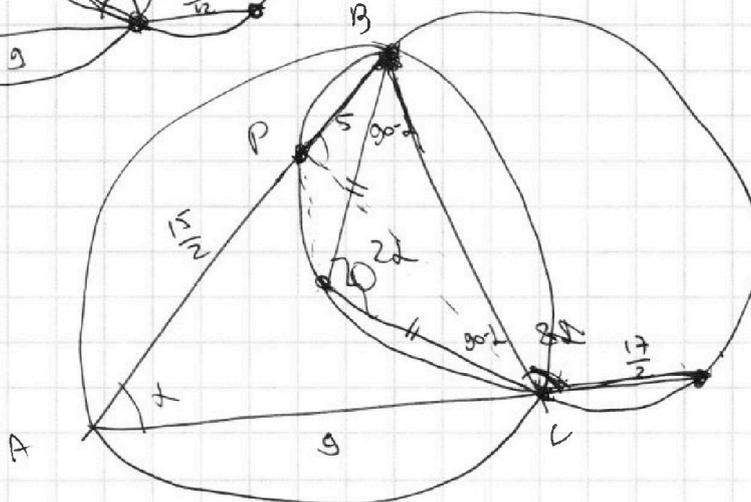
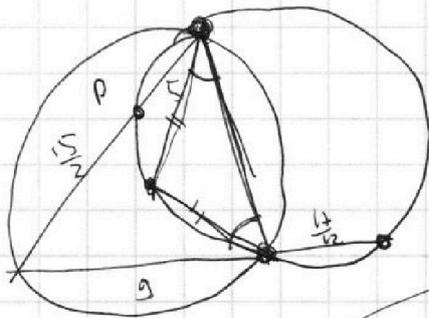
g. AK

$$\frac{125}{12} - g = \frac{125 - 10g}{12}$$

$$\frac{10g}{12} = \frac{17}{12}$$

$$g \cdot \frac{9 \cdot 12 + 17}{12} = \frac{15}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right)$$

$$\frac{25 \cdot 5 \cdot 125 \cdot g^3}{12 \cdot 4} = \frac{25 \cdot 15}{4}$$



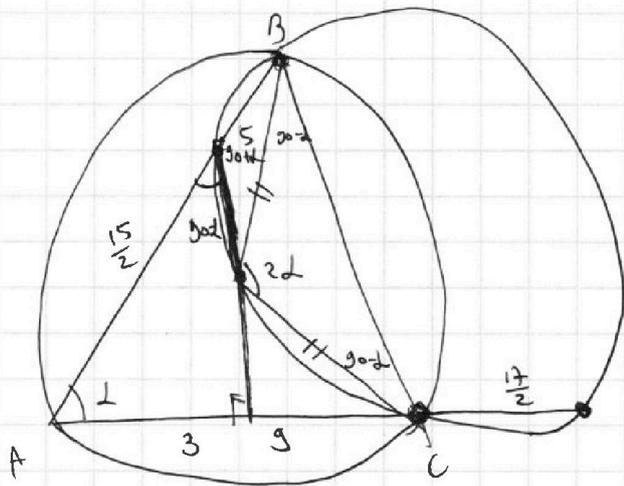


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА ИЗ

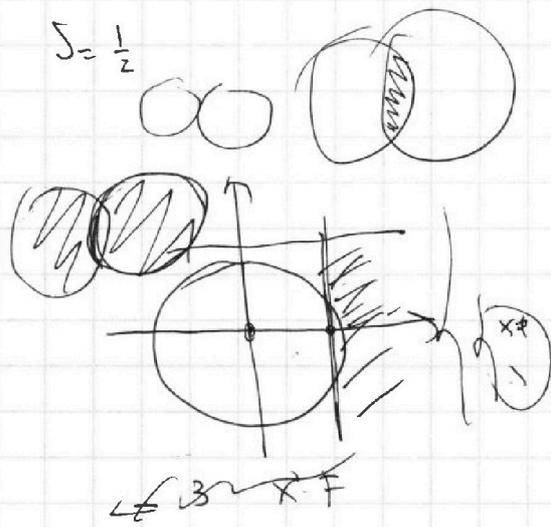
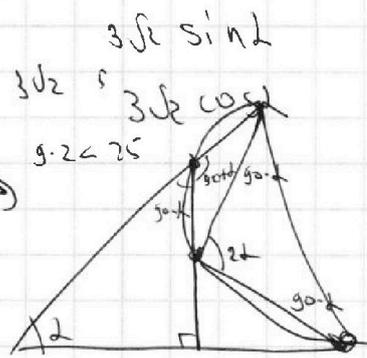
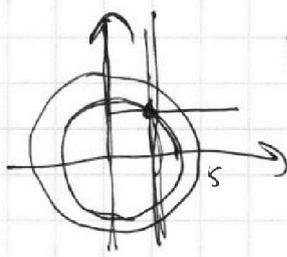
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$2\alpha + 90^\circ - \alpha$
 $90^\circ + \alpha$

$\sin 2\alpha = \frac{3 \cdot 2}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$

$\sin \alpha = \frac{1}{2}$



A, B, C

$aaa = A$

$N=6$

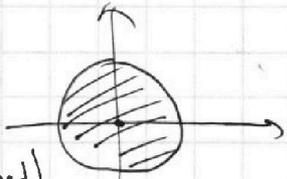
$3x + y = A > 0$

$k \geq l$
 $l \geq k$

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 \leq 25$



$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$

$Bx + y = A$