



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на гранд-концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$A = \bar{a}\bar{a}\bar{a}\bar{a} = a \cdot 1111$$

$$B = \bar{b}\bar{c}\bar{d} - \text{один из них}$$

$$C = \bar{e}\bar{f} - \text{один из которых}$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$n \in N$$

$$(A \cdot B \cdot C) - ?$$

$$2) A : 11 \Rightarrow n^2 : 11 \Rightarrow n : 11$$

предн. : 11 : $\sum_{\text{четн}} - \sum_{\text{нечет}} : 11$

$$n_{\text{ макс}} < 10^4 \cdot 10^3 \cdot 10^2 = 10^9$$

$\overline{1111}$	$\overline{11}$	n^2	$a\bar{a} \quad b\bar{b} \quad /11$
-	-	1	1
11	0	4	4
0		9	5
		16	5
		25	3
			3
			5
			5
			4
			1
			0
			...



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Дано:

$$x, y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$K' = \frac{3}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{x \cdot 3y}$$

$$K' = K$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy \\ \text{бескрайн. } M - ?$$

Задача № 2.

$$1) K' = K \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{3}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{xy}$$

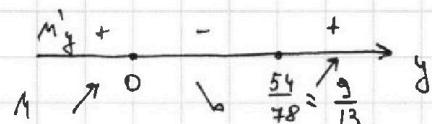
$$\frac{2}{x} = \frac{1}{y} \left(1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$\frac{x}{2} = \frac{3y}{2}$$

$$\underline{x = 3y}$$

$$2) M = x^3 - y^3 - 3xy = \\ = 27y^3 - y^3 - 27y^2 = 26y^3 - 27y^2$$

$$M'_y = 78y^2 - 54y > 0$$



Т.к. $y > 0$ и $x > 0 \Rightarrow M(y)$ имеет
минимум в т. $\frac{9}{13}$, её максимум $+\infty$

$$\text{Тогда } M_{\min} = M\left(\frac{9}{13}\right) = 26 \cdot \frac{9^3}{13^2} - 27 \cdot \frac{9^2}{13^2} = 2 \cdot \frac{9^3}{13^2} - 3 \cdot \frac{9^2}{13^2} = -\frac{9^3}{13^2} = -\frac{729}{169}$$

Ответ: $M \in \left[-\frac{729}{169}; +\infty\right)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y \in \mathbb{R}$$

Задача №3.

a) $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \sin \pi x$

$$2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x$$

$$\left[\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \right]$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right) = \operatorname{ctg} \pi x$$

$$\left[\sin \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right) \sin \pi x = \cos \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right) \cos \pi x \right]$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \pi x \right)$$

$$\left[\frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right]$$

$$\frac{\pi}{2}(x-y) = \frac{\pi}{2} - \pi x + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\tan \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right) = \operatorname{ctg} \pi x \right]$$

$$x - y = 1 - 2x + 2m$$

$$\left[x+y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \right]$$

$$3x+y = 1+2m$$

$$\left[3x+y = 1+2m, m \in \mathbb{Z} \right]$$

$$\left[y = 1+2k-x, k \in \mathbb{Z} \right]$$

Первый вид: $(x; 1+2k-x), \text{ где } k \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$

$$\left[y = 3x - 1 - 2m, m \in \mathbb{Z} \right]$$

$(x; 3x - 1 - 2m), \text{ где } m \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$

б) $\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} < 2\pi, x, y \in \mathbb{Z}$

1) Т. к. $\arccos \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \in [0; \pi]$, то первое эквивалентно:

$$\begin{cases} -1 < \frac{x}{\sqrt{2}} \leq 1 \\ -1 < \frac{y}{\sqrt{2}} \leq 1 \end{cases} \quad \text{2) Третье вид: первые 1-го вида:}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2} < x < \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} < y < \sqrt{2} \end{cases}$$

ищем k , при под. возможн.
2-е действие перв-го:

$$-2 \leq 2k-8$$

$$-3 \geq 2k-8$$

$$\begin{cases} 10+2k > -3 \\ -10-2k < 8-2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10+2k > -3 \\ -10-2k < 8-2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > -\frac{13}{2} \\ k \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} k > -6 \\ k \leq 3 \end{cases}$$

$$k = \{-6, -5, \dots, 2\}$$

$$k = \{-5, -4, \dots, 3\}$$

<math display="block



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Предложение задачи №3.

5) 2) Для пар 1-го вида решений: 63

Для пар 2-го вида:

$$\begin{cases} -4 < x \leq 4 & x \in \mathbb{Z} \\ -3 < 3x - 1 - 2m \leq 3 & m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \quad -8 + 2m < 3x \leq 10 + 2m$$

$$\begin{cases} m < \frac{3x}{2} + 4 \\ m \geq \frac{3x}{2} - 5 \end{cases}$$

такие $\forall x \in \mathbb{Z}$

$$\text{---} \quad \begin{matrix} \nearrow & \searrow \end{matrix} \quad \text{но 3 решения } m$$

$$\frac{3x}{2} - 5 \quad \uparrow \quad \frac{3x}{2} + 4$$

Значит для пар 2-го вида решений между ограничениями
второго вида должно быть 63 решения включительно. Тогда

Всего решений $(x; y)$: $63 + 63 = \boxed{126}$

Одн.: а) $(x; 1+2k-x)$, $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$ и б) $(x; 3x-1-2m)$, $m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.

В начале:

чбн., $x = 11$ кн.

P_1 - вероятность

В конце:

чбн., $x = 11$ кн.

$3,5P$ - вероятность

1) Всего сочетаний членников, получивших

Голос: в начале в конце

$$C_x^y$$

$$C_x^y$$

2) Тогда и Вася спаравится

чбн. выбранном в случайных:

$$7+8$$



$$x-2$$

11 кн.

$$C_{x-2}^{y-2}$$

В конце:

чбн.

$$7+8$$



$$x-2$$

11 кн.

$$C_{x-2}^{y-2}$$

выбрать случайных

из $x-2$ членников

$$3) Тогда P_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^y}; 3,5P_1 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^{y-2}}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{(x-2)!}{2!}} \cdot 3,5 C_{x-2}^2 \cdot C_x^y = C_{x-2}^{y-2} \cdot C_x^y \quad \text{или}$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!} \cdot \frac{x!}{y!(x-y)!} = \frac{(x-2)!}{(y-2)!(x-y)!} \cdot \frac{x!}{4!(x-4)!}$$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2! y!} = \frac{1}{(y-2)! \cdot 4!} \quad y^2 - y - 42 = 0$$

$$\frac{7}{4} \cdot 4! (y-2)! = y!$$

$$\begin{cases} y = -6 \\ y = 7 \end{cases}$$

$$7 \cdot 6 = (y-1) y$$

по смыслу $y = 7$

Ответ: 7 голосов

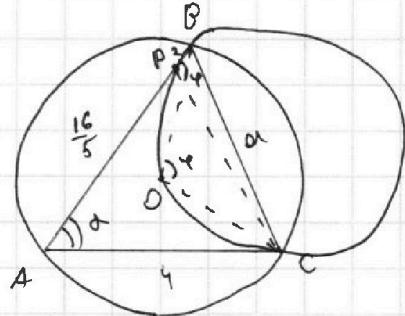


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Задача №5.

1) т.к. $\angle BPC$ остр. ма $\angle BC$ остр. ω_2
 $\angle BOC$ остр. ма $\angle PC$ остр. ω_2
 $\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = \varphi$

2) $\triangle ABC: \frac{AC}{\sin \varphi} = \frac{PC}{\sin \alpha} \Leftrightarrow 4 \sin \varphi = PC \sin \alpha$

$\angle BOC: 2R \sin \frac{\varphi}{2} = \alpha$

R - радиус ω_1

ω_1 , $\triangle ABC$ -
острый.

$$AP = \frac{16}{5}$$

$$BP = 2$$

$$AC = 4$$

$$S_{ABC}?$$

По Th. Синусов:

$$\frac{\alpha}{\sin \varphi} = 2R \Rightarrow \frac{\alpha}{2R} = \sin \varphi$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \alpha$$

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos \alpha$$

3) Имеем: $\begin{cases} \sin \frac{\varphi}{2} = \sin \alpha \rightarrow \frac{1-\cos \varphi}{2} = \sin \alpha \Rightarrow \varphi = 2 \sin \alpha \pi - \frac{\varphi}{2} = \pi \\ \varphi \sin \alpha = PC \sin \varphi \\ PC^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cos \alpha \end{cases}$

$$\varphi = 2 \sin \alpha \pi - 2$$

$$\sin \varphi = \sin 2\alpha$$

$$\sin(2\pi - 2) = -\sin 2$$

$$\sin 2\alpha = \begin{cases} \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$$

$$\sin(2\alpha) > 0$$

противоречие *

4) т.к. $\varphi = 2\alpha$

Значит $\angle ACP = \varphi - \alpha = \alpha$

$\Rightarrow \angle ACP = \angle PAC$

$\Rightarrow AP = PC$

$$5) S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{35}}{8} = \frac{26}{5} \cdot \frac{\sqrt{35}}{4} = \boxed{\frac{13\sqrt{35}}{10}}$$

Однако: $S_{ABC} = \boxed{\frac{13\sqrt{35}}{10}}$

Тогда $AP \cos \alpha = \frac{AC}{2}$

$$\cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{16} = \frac{10}{16} = \boxed{\frac{5}{8}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \boxed{\frac{\sqrt{35}}{8}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Phi(\alpha)$:

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases}$$

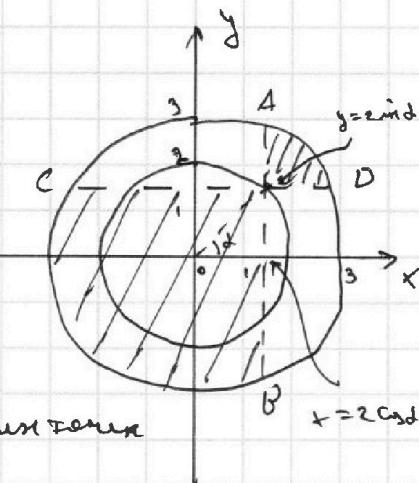
M -периметр $\Phi(\alpha)$

$M_{\max} - ?$

$\alpha(M_{\max}) - ?$

Задача №6.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ x = 2 \cos \alpha \\ y = 2 \sin \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \\ x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \end{cases}$$



$\Phi(\alpha)$ - представляет собой
или-то замкнутую фигуру

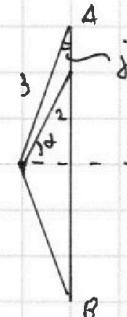
2) Найдите $M(\alpha)$:

$$M(\alpha) = \text{длина } AB + CD + AD + CB$$

$$\text{по Th. Синусов: } \frac{2}{\sin j} = \frac{3}{\sin(30^\circ + \alpha)}$$

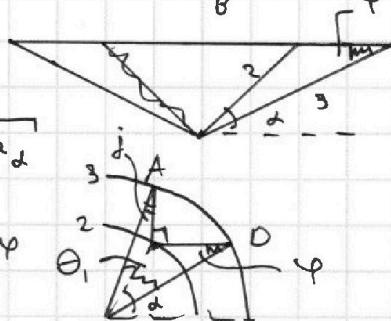
$$\sin j = \frac{2}{3} \cos \alpha$$

$$AB = 2 \cdot 3 \cos j = 6 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha}$$



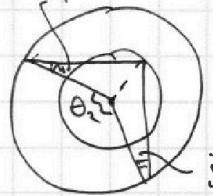
$$\text{по Th. Синусов: } \frac{2}{\sin \varphi} = \frac{3}{\sin(180^\circ - \alpha)}$$

$$CD = 2 \cdot 3 \cos \varphi = 6 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha}$$



$$\Theta_1 = 360^\circ - 270^\circ - j - \varphi = 90^\circ - j - \varphi$$

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= 360^\circ - (360^\circ - 90^\circ - \varphi - j) = \varphi \\ &= 90^\circ + \varphi + j \end{aligned}$$



тогда $AD = 3 \Theta_1$

$CG = 3 \Theta_2$

$$\begin{aligned} M(\alpha) &= 6 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha} + 6 \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha} + 3 \left(\frac{\pi}{2} - j - \varphi + \frac{\pi}{2} + \varphi + j \right) = \\ &= 6 \underbrace{\left(\sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha} \right)}_{+ 3 \pi} \end{aligned}$$

Продолжение на стр. 2

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмечьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Продолжение задачи 6

$$3) Мы получили: M(\alpha) = 6 \left(\sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha} + \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha} \right) + 3\pi$$

$$M'(\alpha) = 6 \left(\frac{-\frac{4}{3} \cdot 2 \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{2\sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha}} + \frac{-\frac{4}{3} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{2\sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha}} \right) = 0$$

тогда

$$\cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha}} \right) = 0$$

$$\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

т. к. при

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases} \text{ или } \sqrt{1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha} - \sqrt{1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha} = 0$$

остановимся на

фигуре $\Phi(\alpha)$

аналогичные

результаты при $\alpha \in [\alpha; \frac{\pi}{2}]$

$$1 - \frac{4}{3} \sin^2 \alpha = \pm \left(1 - \frac{4}{3} \cos^2 \alpha \right)$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \text{не подходит}$$

$$\text{так } \alpha \in [0; \frac{\pi}{2}] \text{ и } \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \text{ при } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \alpha = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

- экстремумы $M(\alpha)$

$$M(0) = 6 \left(\sqrt{1 - \frac{4}{3}} + \sqrt{1} \right) + 3\pi = 6 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} + 1 \right) + 3\pi$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = 6 \left(\sqrt{1} + \sqrt{1 - \frac{4}{3}} \right) + 3\pi = 6 \left(\frac{\sqrt{5}}{3} + 1 \right) + 3\pi$$

$$M\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6 \left(\sqrt{1 - \frac{2}{3}} \cdot 2 \right) + 3\pi = 12 \frac{\sqrt{2}}{3} + 3\pi = 4\sqrt{2} + 3\pi$$

Значит $M_{\max} = M\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$4\sqrt{2} + 6\left(\frac{\sqrt{5}}{3} + 1\right)$$

$M_{\max} = 4\sqrt{2} + 3\pi$

$$4\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 6$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \dots$$

$$16 \cdot 7 \cup 4 \cdot 5 + 12\sqrt{5} + 36$$

$$112 \cup 56 + 12\sqrt{5}$$

$$56 \cup 12\sqrt{5}$$

$$8^2 \cdot 7^2 \cup 4^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$4 \cdot 49 \cup 3^2 \cdot 5$$

$$196 > 45$$

Ответ: $M_{\max} = 4\sqrt{2} + 3\pi$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ или $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ или $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ или $\alpha = \frac{7\pi}{4}$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

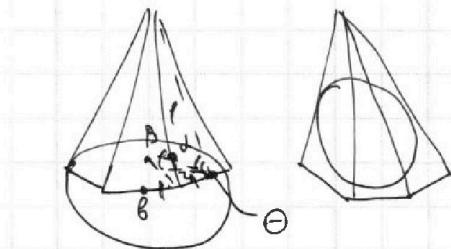


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

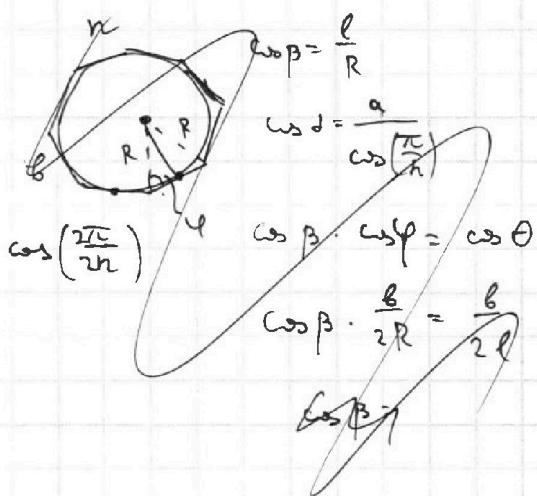
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$n^2 : 10$
1 14563
4 4
9 9
6 6
5 5
6 6
4 4
1 1



$$(1000a + 100a + 10a + a)($$

$$(100b + 10a + d)(10e + f)$$

$$adf \stackrel{10}{\equiv} n^2$$

$$\cos \beta \cdot \cos \phi \cdot \sin \frac{\pi}{n} = \frac{l}{2r}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \underbrace{\bar{a} \bar{a} \bar{a} \bar{a} \dots \bar{a}}_n \bar{a} \bar{a} \bar{a} \bar{a}, \alpha \neq 0 \quad (A; B; C) - ?$$

$$B = \bar{c} \bar{d} \bar{e}, \text{ одна ребна!} \quad \bar{a} \bar{a} \bar{a} \bar{a} \cdot \bar{c} \bar{d} \bar{e} \cdot \bar{f} \bar{g} = n^2$$

$$C = \bar{f} \bar{g}, \text{ sign } -h^2 : 3 \quad h^2 \stackrel{?}{=} 1/0 \quad 4x : 3$$

$$ABC = n^2 \quad 4 \quad | \quad 4x \equiv 1/2/0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{3}{2}} = \infty$$

$$\frac{T_1}{3} + \pi k^+ \quad 36 \quad 0$$

$$\frac{\pi}{2} (+, j) = \frac{\pi}{2} + \pi +$$

$$\frac{81}{229} \quad 2d \rightarrow \pi\pi + \pi$$

$$P = \frac{1}{2} (1 - g)$$

$$M = 27y^3 - y^3 - 27y^2 =$$

$$= 26y^3 - 27y^2 =$$

$$= y^2(26y - 27)$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

10

2 8
x = 3 4

1

$$\lim (\pi x) - \sin(\pi y) \right) \sin \pi x =$$

$$= \frac{q}{x} - \left(\cos \theta + \sin \theta \right), \text{ as } x$$

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) =$$

$$= \sqrt{2} \cos(\pi x + \pi y) \cos$$

$$= 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$\sin(\pi+) - \sin(\pi g) =$$

$$= 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$2 \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \sin \frac{\pi}{2}(x-y) \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cos \pi x$$

~~$\times \sin \cos \beta + \cos \sin \beta$~~
 ~~$\times \sin \beta + \cos \beta$~~ ~~$\times \cos \beta$~~

$$\text{By } M_y = 78y^2 - 54y = 0$$

$$M_{\min} = M\left(-\frac{5}{13}\right) = 26 \cdot \frac{g^3}{13^3} - 27 \cdot \frac{g^2}{13^2} = \\ = 2 \cdot \frac{g^3}{13^2} - 3 \cdot \frac{g^3}{13^2} =$$

$$-C_0(\alpha + \beta) = -\frac{g^3}{\beta^2}$$

$$\cancel{+ \cos \beta} + \cos \alpha$$

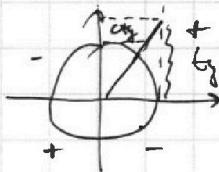


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

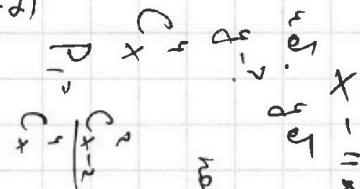
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin \alpha}{-\cos \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg}(-\alpha)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$



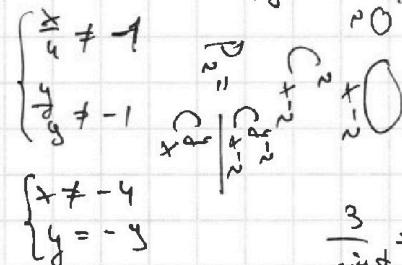
$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi$$

$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}k$$

$$\max(\arccos x) = \pi$$

$$\begin{cases} x \neq -4 \\ 1+2k-x \neq -y \\ x \neq 10+2k \end{cases} \quad x \in (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty)$$



$$\frac{3}{\sin \alpha} = \frac{x^2}{\sin \beta}$$

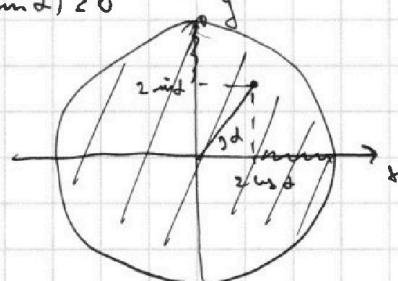
$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{2}{3} \sin \alpha \\ \cos \beta &= \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$0 < \frac{\pi}{4} < \pi$$

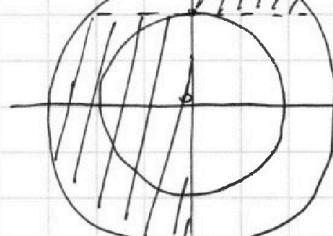
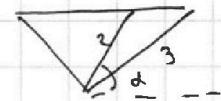
$$\begin{cases} 0 < \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 < \frac{1+2k-x}{3} \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x \leq 4 \\ -10 < 2k-x \leq 8 \end{cases}$$

$$-1 < x \leq 4$$

$$\begin{cases} (x-2 \cos \alpha)(y-2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$$

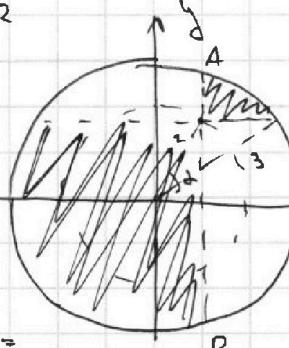


$$\begin{cases} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \\ x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \end{cases}$$

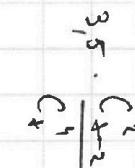


$$\begin{aligned} \frac{3}{\sin(\alpha+\beta)} &= \frac{2}{\sin \beta} \\ \sin \beta &= \frac{2}{3} \cos \alpha \\ \cos \beta &= \sqrt{1 - \frac{4}{9} \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

$$\ell_{AB} = 2 \cdot 3 \cos \beta = \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$



$$P = 2 \pi r \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} + \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$



$$\begin{aligned} \frac{5}{\sin(\alpha+\beta)} &= \frac{4}{\sin \beta} \\ \sin \beta &= \frac{4}{5} \cos \alpha \\ \cos \beta &= \sqrt{1 - \frac{16}{25} \cos^2 \alpha} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3, 5. \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} > \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y}$$



$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_3^1 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{a^2}{4R^2} = \frac{(1 - \cos \varphi)^2}{4}$$

$$C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)!}{2!(x-4)!}$$

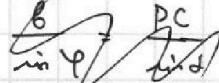
$$\frac{a^2}{R^2} = 1 - \cos \varphi$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{a}{R}$$

$$S = \frac{aBC}{4R}$$

$$2R \sin \frac{\alpha}{2} = a$$

$$\frac{a}{\sin \varphi} = \frac{PC}{\sin \beta} \quad \frac{a}{\sin \varphi} = 2R$$



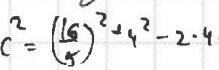
$$PC = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{5} \cos \alpha$$

$$a^2 = \left(\frac{16}{5} + 2\right)^2 + 4^2 - 2 \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 \cos \alpha$$

$$\frac{16}{5}^2 + 16 - \frac{8 \cdot 16}{5} \cos \alpha$$

$$\sin \varphi = \frac{a \sin \beta}{PC} = \frac{a \sin \beta}{4 \sin \alpha} = \frac{a}{PC}$$

$$\frac{4}{\sin \beta} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

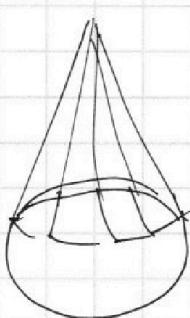
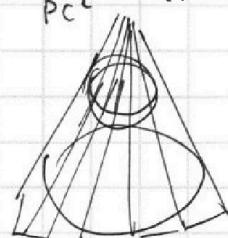


$$\frac{16 \sin^2 \alpha}{PC^2} + \left(1 - \frac{a}{R}\right)^2 = 1$$

$$\frac{16 \sin^2 \alpha}{PC^2} + (1 - 2 \sin \alpha)^2 = 1$$

$$\frac{16 \sin^2 \alpha}{PC^2} = 4 \sin \alpha (1 - 4 \sin \alpha)$$

$$t = PC^2 (1-t)$$



$$\frac{4 \sin \alpha}{PC^2} = (1 - 4 \sin \alpha)$$

$$t = \frac{PC^2}{1+PC^2} =$$

$$\frac{\frac{16}{5}^2}{5} + 16 - \frac{8 \cdot 16}{5} \cos \alpha$$

$$\frac{64}{25} = \frac{PC}{\sin \alpha}$$

$$2R \sin \frac{\alpha}{2} = a$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R = 64$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$$

$$PC = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{5} \cos \alpha$$