



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A, B, C \in \mathbb{N}$$

№ 1

A - четырёхзнач., из одн. цифр $\Rightarrow A = p \cdot 1111, p \in \{1; 2; \dots; 9\}$

B - трёхзнач., одна из цифр 7

C - двухзнач., одна из цифр 1

$$A \cdot B \cdot C = k^2, k \in \mathbb{N}$$

$$p \cdot 1111 \cdot B \cdot C = k^2$$

$$p \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = k^2$$

11 и 101 - простые числа, значит ~~остаток~~ $(p; B; C) : 101$

B - ед. 3-х знач. число $\Rightarrow B = 101 \cdot n, n \in \{1; 2; \dots; 9\}$

одна из цифр в B - 7 $\Rightarrow n = 7, B = 707$

$$p \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot C = k^2$$

$$(p \cdot C) : 11$$

$$(p \cdot C) : 7$$

C - ед. двухзнач. число $\Rightarrow C = 11 \cdot m, m \in \{1; 2; \dots; 9\}$

одна из цифр в C - 1 $\Rightarrow m = 1, C = 11$

$$p \cdot 7 \cdot 101^2 \cdot 11^2 = k^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow p = 7, A = 7777$$

$$p \in \{1; 2; \dots; 9\}$$

Ответ: (7777; 707; 11)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

 $\sqrt{2}$

$$x, y > 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

 $M - ?$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{\cancel{xy+4x-4y-16}}$$

$$\begin{cases} y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow y+x+3 > 0$$

$$\begin{array}{l} * \left\{ \begin{array}{l} xy = x y + 4x - 4y - 16 \\ x \neq 4 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} * 4(x-y) = 16 \\ x-y = 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ &= 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64 \end{aligned}$$

Ответ: 64

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (x; y) - ?$$

$\sqrt{3}$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi - 2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\pi - 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\pi - 2\pi y = \pi y - \pi x + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 1 - y - 2k$$

$$x = 3y - 1 + 2n$$

можут ли совпадать

Проверим, ~~совпадают~~ ли значения x при одинаковых y :

$$1 - y - 2k = 3y - 1 + 2n$$

$$4y = 2 - 2k - 2n$$

$$2y = 1 - k - n$$

$$y = \frac{1 - k - n}{2}, \quad k = 1 - n - 2y$$

Буди $y = \frac{m}{2} \times (m \in \mathbb{Z})$ n и k выражаются через друг друга \Rightarrow в этом случае пары совпадают, в остальных они разные

Ответ: $(1 - y - 2k; y); (3y - 1 + 2n); y \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{Z}$

б) $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arg \left(\frac{x}{7} \right) \in [-1; 1]$$

$$\left| \frac{x}{7} \right| \in [-1; 1]$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$

$$\left(\arccos \frac{x}{7} \right) \in [0, \pi] \quad \left(\arcsin \frac{y}{4} \right) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \left(\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \neq -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \neq -\frac{\pi}{2}$$

кем реш.: $\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = -4 \end{cases}$$

$(7; -4)$ - не подходит, проверим, входит ли эта пара в $(1-y-2k; y)$. $y = -4: x = -3-2k = 7$
 $k = -5, -\frac{m}{2}$ входит

значит пары будут совпадать, можно рассматривать только одну из них

$$(1-y-2k; y)$$

$$y = -4: x = 5-2k$$

$$-7 \leq 5-2k \leq 7$$

$$6 \geq k \geq -1 \quad \text{- восемь пар}$$

$$y = -3: x = 4-2k$$

$$5 \frac{1}{2} \geq k \geq -1 \frac{1}{2} \quad \text{- семь пар}$$

$$y = -2: x = 3-2k$$

$$5 \geq k \geq -2 \quad \text{- восемь пар}$$

$$y = -1: x = 2-2k$$

$$4 \frac{1}{2} \geq k \geq -2 \frac{1}{2} \quad \text{- семь пар}$$

Заметим, что при ~~негативных~~ y - восемь пар, а при ~~негативном~~ $-y$ - семь

$$\text{Всего } 5 \text{ рядов } y \text{ и } 4 \text{ нечет.}: 5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 - 1$$

$$5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 - 1 = 67 \quad \text{пара } (7; -4) \text{ не входит}$$

Ответ: 67



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

S - кол-во одиннадцатилетних гостей, $S \in \mathbb{N}$

P_1 - вероятность на концерт Тима и Вале в начале месяца

P_2 — в конце месяца

$$\frac{P_2}{P_1} = 11$$

k — кол-во билетов в конце месяца, $k \in \mathbb{N}$, $k > 4$

$$P_1 = \frac{4}{S} \cdot \frac{3}{S-1}$$

$$P_2 = \frac{k}{S} \cdot \frac{k-1}{S-1}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{k(k-1)}{4 \cdot 3} = 11$$

$$k^2 - k - 12 \cdot 11 = 0$$

$$D = 1 + 528 = 529 = 23^2$$

$$k_1 = \frac{1 - 23}{2} < 0 \text{ — не подходит}$$

$$k_2 = \frac{1 + 23}{2} = 12$$

Ответ: 12



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6 M - периметр $\Phi(a)$

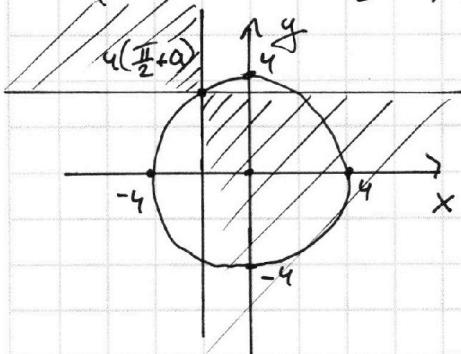
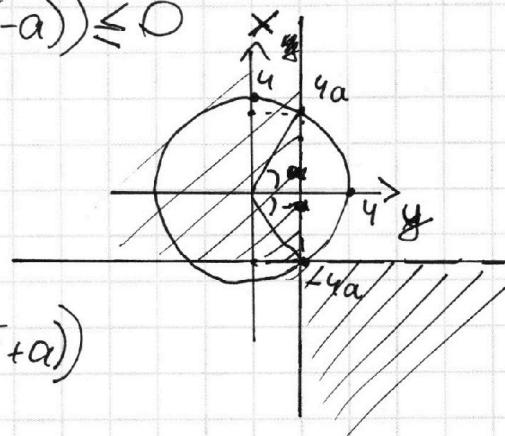
$$\Phi(a) : \begin{cases} (x + 4\sin a)(y - 4\cos a) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

(2) - окружность с центром $(0,0)$ и радиусом 6

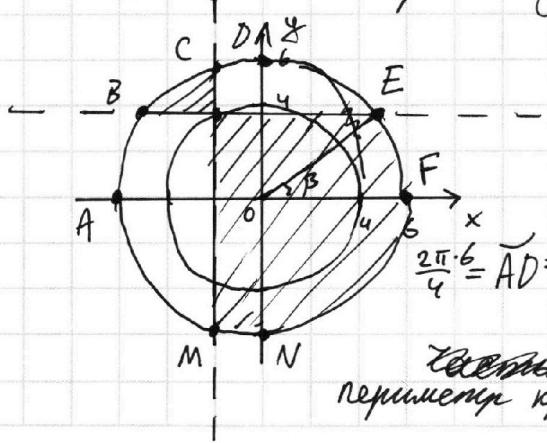
$$(1) (x - 4\sin(-a))(y - 4\cos(-a)) \leq 0$$

Плоскость членится на 4 части, в каждой из которых удовлетворяют нер-ву

$$(x - 4\sin(\frac{\pi}{2}+a))(y - 4\sin(\frac{\pi}{2}+a))$$



$\Phi(a)$ на плоскости - круг, который разделяем на 4 части и от которого будем 2



Возьмём какое-то a :

$$NF = \frac{6\pi \cdot 6}{4}$$

$$\overarc{CD} = \overarc{MN}$$

$$\overarc{AB} = \overarc{EF}$$

$$\frac{2\pi \cdot 6}{4} = \overarc{AD} = \overarc{AB} + \overarc{BC} + \overarc{CD} = \overarc{EF} + \overarc{BC} + \overarc{MN}$$

|||

периметр круга, входящий в окружность $\Phi(a)$, постоянен

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



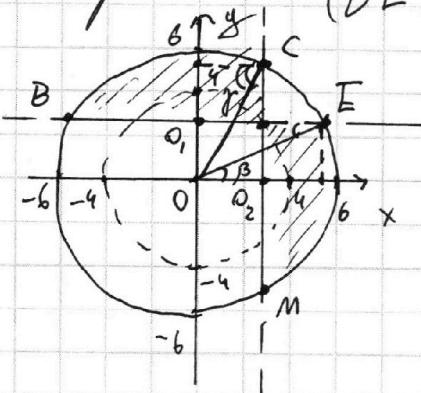
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$u \text{ равен } \frac{2\pi \cdot 6}{u} + \frac{2\pi \cdot 6}{u} = \pi \cdot 6$$

следовательно, для max M нужно найти а, при котором max (BE+CM)



$$\sin \beta = \frac{9 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{6}$$

$$O_1E = 6 \cdot \cos \beta = 6 \cdot \sqrt{1 - \frac{16 \sin^2(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{6^2}} = \sqrt{36 - 16 \sin^2(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

$$\text{аналогично: } \cos \gamma = \frac{4 \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{6}$$

$$CO_2 = \sqrt{36 - 16 \cos^2(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

$$BE + CM = 2O_1E + 2CO_2$$

$$f(\alpha) = 2\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

$$f'(\alpha) = \frac{-16 \cdot 2 \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}} + \frac{-16 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}} = \frac{32 \sin 2\alpha}{\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}}$$

$$= 16 \sin 2\alpha \left(\frac{\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} - \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}}{\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}} \right)$$

$$\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} = \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

$$-\sin^2 \alpha = -\cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

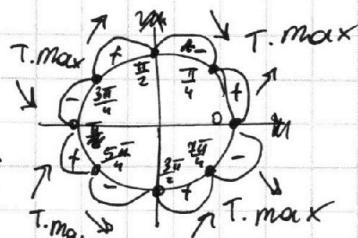
$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

по г.у. экстремум, $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - T_{\max}$

$$\text{Отв: } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_1 - 6 \text{ коче}: \begin{cases} s \in \mathbb{N}, s \geq 2 \\ \frac{4}{s} \cdot \frac{3}{(s-1)} \end{cases}$$

$$P_2 - 6 \text{ коче}: \frac{k}{s} \cdot \frac{k-1}{s-1}, k \in \mathbb{N}, k > 4$$

$$\frac{C_{s-2}}{C_s^4} = \frac{(s-2)! 4!(s-4)!}{s! 2!(s-4)! s!} = \frac{4 \cdot 3}{(s-2) \cdot s}$$

$$\text{т. } \frac{k(k-1)}{s(s-1)} = \frac{4 \cdot 3}{s(s-1)} \cdot 11$$

$$k^2 - k = 12 \cdot 11$$

$$k^2 - k - 132 = 0$$

$$\Delta = 1 + 400 \cdot 120 \cdot 8 = 529$$

$$\frac{k(k-1)}{4 \cdot 3} = 11$$

$$k^2 - k - 12 \cdot 11 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48 \cdot 11 = 1 + 480 + 48 = 529 = 23$$

$$k_1 = \frac{1-23}{2} < 0$$

$$k_2 = \frac{1+23}{2} = 12$$

$\sqrt{6}$

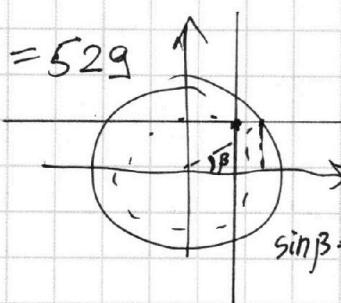
$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

M - периметр $\Phi(\alpha)$

$\max M \rightarrow \alpha = ?$

$$\begin{cases} x \leq 4 \sin \alpha \\ y \geq 4 \cos \alpha \\ x \geq 4 \sin \alpha \\ y \leq 4 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x &= -4 \sin \alpha & x &= 4 \sin(-\alpha) \\ y &= 4 \cos \alpha & y &= 4 \cos(-\alpha) \end{aligned}$$

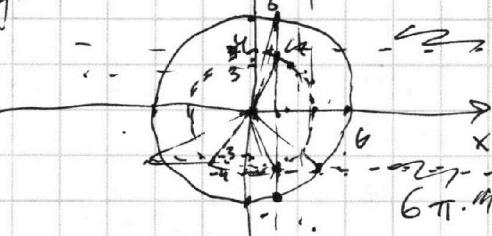


$$\sin \beta = \frac{4 \sin \alpha}{6} = \frac{2}{3} \sin \alpha$$

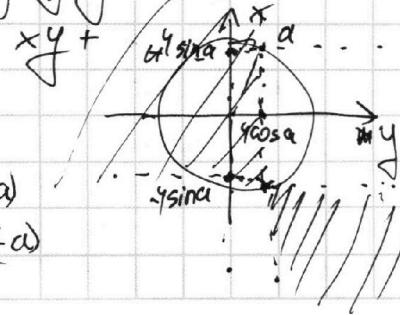
$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3} \sin \alpha\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \alpha} = \sqrt{\frac{5}{9} \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cos \alpha$$

коши
круг
периметр
и гипотенуза

периметр.



$$xy + y^2 - 4 \sin \alpha \cdot 4 \cos \alpha - 16 \sin \alpha \cos \alpha \leq 0$$



$$\begin{aligned} y &= 4 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ x &= 4 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\ \sin(-\alpha) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \end{aligned}$$



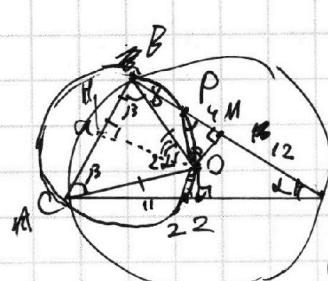


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$S_{ABC} - ?$

$$AP = 16$$

$$BP = 8$$

$$AC = 22$$

$$R = CO = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

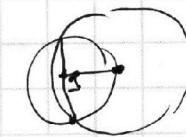
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$PO \cdot a = 8 \cdot R$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{PO}$$

$$PO \cdot a = 8 \cdot \frac{a}{2 \cdot 4} \cdot PO$$

$$16 \cdot 24 = h \cdot 22 \quad h = \frac{8 \cdot 24}{11}$$



$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{24^2 + 22^2 - a^2}{2 \cdot 24 \cdot 22}$$

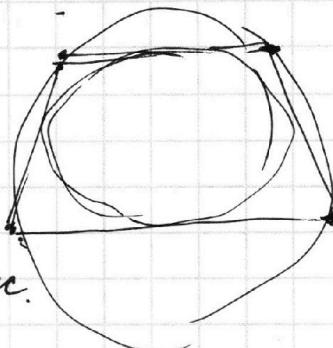
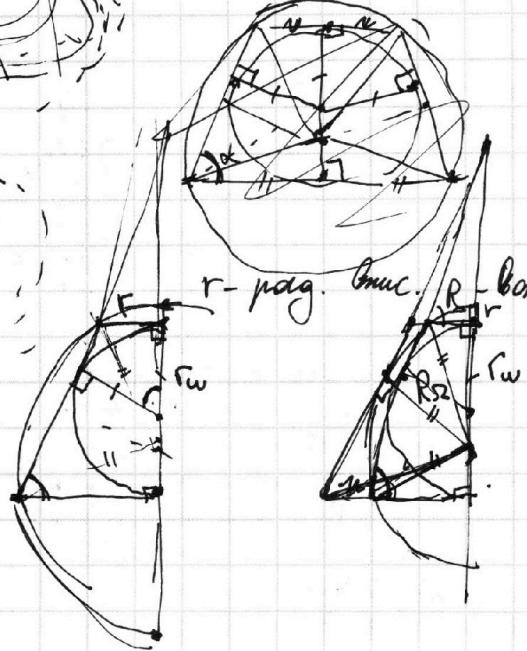
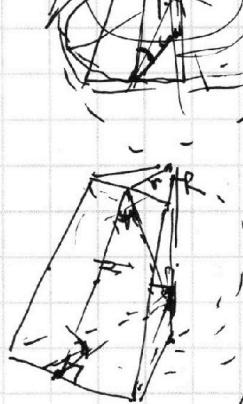
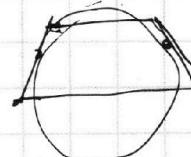
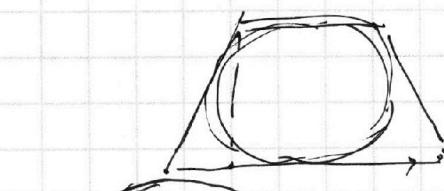
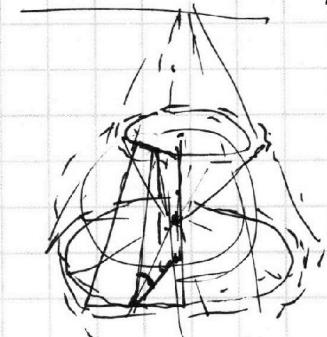
$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{24^2 \cdot 22^2 - 24^2 - 22^2 + a^2}{(2 \cdot 24 \cdot 22)^2}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 4 \cdot 24 \cdot 11 \cdot \frac{4}{PO}$$

$$R/r = \frac{R}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{R}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$\frac{OM}{OH} = \frac{4}{\frac{a}{2}} = \frac{8}{a}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \begin{cases} 1-x = y+2k \\ 1+x = 3y+2n \end{cases} \quad \begin{aligned} \sin^2\pi y - \sin\pi x \sin\pi y &= \cos^2\pi y + \cos\pi x \cos\pi y \\ \cos^2\pi y - \sin^2\pi y &= -2\cos(\pi x - \pi y) \end{aligned} \\ \textcircled{2} \quad & \begin{aligned} x+y &\geq 2k \quad y = 3y+2n-1 \quad x = 1-y-2k \quad \cos 2\pi y = \cos(\pi + \pi y - \pi x) \\ x &= 3y+2n-1 \quad 2\pi y = \pi + \pi y - \pi x + 2\pi k \\ & \quad 2\pi y = \pi x - \pi - \pi y + 2\pi k \end{aligned} \\ \textcircled{3} \quad & \begin{aligned} a) \quad & \begin{aligned} 2k &\geq 2k \quad \text{остаточная} \\ (k+1-y-2k, y) &\quad \text{пара} \\ (3y+2n-1, y) &\quad k, n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \\ b) \quad & \text{сколько } (x, y) : (x, y \in \mathbb{Z}) \\ \arccos \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} - \arcsin \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} &> -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \end{aligned}$$
$$y = \frac{1}{2}: \quad x_1 = \frac{1}{2} - 2k, \quad x_2 = 2n-1 \quad \text{не совм.}$$

$$\begin{aligned} \text{arccos} \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} &\in [0; \pi] \\ \arcsin \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} &\in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

$$(\arccos \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} - \arcsin \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$$

$$\text{НЕТ. реш.:}$$

$$\arccos \frac{x}{\sqrt{1+y^2}} - \arcsin \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+y^2}} = 1 \quad x = \sqrt{1+y^2} \quad \text{пара } (\sqrt{1+y^2}, y)$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{2} \quad y = \frac{1}{2}\sqrt{1+y^2} \quad \text{не подходит}$$

$$y = -4: \quad \begin{cases} x = 5+2k \\ x = -13+2n \end{cases}$$

$$-7 \leq 5+2k \leq 7 \quad -12 \leq -13+2n \leq 2$$

$$-6 \leq k \leq 1 \quad -10 \leq n \leq 10 \quad \text{- бесконечность}$$

$$-7 \leq -13+2n \leq 7 \quad 6 \leq 2n \leq 20 \quad 3 \leq n \leq 10 \quad \text{- бесконечность}$$

$$5+2k = -13+2n \quad 18 = 2(n+k) \quad 40+28-1 = 67 \quad 7 = 67$$

$$9 = n+k \quad k = (9-n) \in [-1; 6] \quad 32+35$$

$$y = \frac{1-k-n}{2} \quad \text{СЕРИИ ВХОДЯТ В ПУРПУРУ!!}$$

$$3(-4)+2n-1 = 174-2k \quad (-12-4 = 2-2(n+k)) \quad -16 = 2-2(n+k) \quad \text{НЕТ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ}$$

$$9y = 2-2(k+n) \quad 2y = 1-4(k+n) \quad y = \frac{1-4(k+n)}{2}$$

$$2y = 1-4(k+n) \quad y = \frac{1-4(k+n)}{2}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

$$\sqrt{3} \quad A, B, C \in \mathbb{N}^*$$

$$a) AB \cdot C = K^2, K \in \mathbb{N}$$

$$A = p \cdot 1111, p \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

$$\overline{1111111101}$$

10 101- простое?

$$K^2 = p \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C$$

$$B = 101 \cdot b, \quad \begin{cases} b = 7 \\ B = 707 \end{cases}$$

$$K^2 = p \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot C$$

$$p \cdot C \in \text{ПРНД}$$

$$C = 11 \cdot m, \quad \begin{cases} m = 1 \\ C = 11 \end{cases}$$

$$ABC \text{ есть } L \quad \begin{cases} C = 11 \\ C = 11 \end{cases}$$

$$p = 7, \quad \begin{cases} A = 7777 \\ B = 707 \\ C = 11 \end{cases}$$

$$\sqrt{3} \quad (x, y) - ?$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$-\cos 2\pi y = \cos \pi(x-y)$$

$$\cos(\pi - 2\pi y) = \cos(\pi(x-y))$$

$$\pi - 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{или}$$

$$\pi - 2\pi y = \pi y - \pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{matrix} \sqrt{2} \\ x, y > 0 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

M - ?

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\begin{matrix} x+4 \\ y+4 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix} \right) \Rightarrow x+y+3 > 0$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy-4y+4x-16}$$

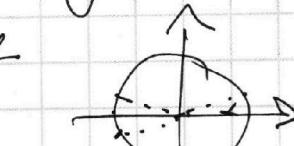
$$xy-4y+4x-16 = xy$$

$$xy-x-y=4$$

$$x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy =$$

$$-4(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4x^2 - 8xy + 4y^2 =$$

$$= 4(x-4)^2 = 4 \cdot 16 = 64$$



$$\cos l = -\cos(\pi - l)$$