



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A, B, C \in \mathbb{N}$$

№1

A - четырёхзнач., ц. цифр $\Rightarrow A = p \cdot 1111, p \in \{1; 2; \dots; 9\}$

B - трёхзнач., одна ц. цифр 7

C - двухзнач., одна ц. цифр 1

$$A \cdot B \cdot C = K^2, K \in \mathbb{N}$$

$$p \cdot 1111 \cdot B \cdot C = K^2$$

$$p \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = K^2$$

11 и 101 - простые числа, значит $(p \cdot B \cdot C) : 101$

B - $\text{ед. 3-х знач. число} \Rightarrow B = 101 \cdot n, n \in \{1; 2; \dots; 9\}$

одна ц. цифр в B - 7 $\Rightarrow n = 7, B = 707$

$$p \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot C = K^2$$

$$(p \cdot C) : 11$$

$$(p \cdot C) : 7$$

C - $\text{ед. двухзнач. число} \Rightarrow C = 11 \cdot m, m \in \{1; 2; \dots; 9\}$

одна ц. цифр в C - 1 $\Rightarrow m = 1, C = 11$

$$p \cdot 7 \cdot 101^2 \cdot 11^2 = K^2$$

$$p \in \{1; 2; \dots; 9\}$$

$$\Rightarrow p = 7, A = 7777$$

Ответ: (7777; 707; 11)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{2}$

$$x, y > 0$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$M = ?$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+x+3}{xy+4x-4y-16}$$

$$\left. \begin{matrix} y > 0 \\ x > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow y+x+3 > 0$$

$$\begin{cases} xy = xy+4x-4y-16 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (*) \quad 4(x-y) &= 16 \\ x-y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ &= 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 4^2 = 64 \end{aligned}$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (x; y) - ?$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos(\pi - 2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\begin{cases} \pi - 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi - 2\pi y = \pi y - \pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - y - 2k \\ x = 3y - 1 + 2n \end{cases}$$

могут ли совпадать

Проверим, ~~совпадают ли значения x~~ совпадают ли значения x при одинаковых y:

$$1 - y - 2k = 3y - 1 + 2n$$

$$4y = 2 - 2k - 2n$$

$$2y = 1 - k - n$$

$$y = \frac{1 - k - n}{2}, k = 1 - n - 2y$$

Если $y = \frac{m}{2}$ ($m \in \mathbb{Z}$) n и k выражаются через друг друга $\Rightarrow$ в этом случае пары совпадают, в остальных они разные

Ответ: $(1 - y - 2k; y); (3y - 1 + 2n); y \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{Z}$

$$b) x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos \frac{x}{y} - \arcsin \frac{y}{x} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} (\frac{x}{y}) \in [-1; 1] \\ (\frac{y}{x}) \in [-1; 1] \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (\arccos \frac{x}{7}) &\in [0; \pi] \\ (\arcsin \frac{y}{4}) &\in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4}) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \neq -\frac{\pi}{2}$$

$$\Downarrow \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \neq -\frac{\pi}{2}$$

нет реш: $\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \\ x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$

$(7; 4)$ - не подходит; проверим, входит ли эта пара в $(1-y-2k; y)$. $y=4: x = -3-2k = 4$

$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \notin \frac{m}{2}$ можно представить как $\frac{m}{2}$

значит пары будут совпадать, можно рассматривать только одну из них

$$(1-y-2k; y)$$

$$y = -4: x = 5-2k$$

$$-7 \leq 5-2k \leq 7$$

$$6 \geq k \geq -1 \text{ - все целые пар}$$

$$y = -3: x = 4-2k$$

$$5\frac{1}{2} \geq k \geq -1\frac{1}{2} \text{ - все целые пар}$$

$$y = -2: x = 3-2k$$

$$5 \geq k \geq -2 \text{ - все целые пар}$$

$$y = -1: x = 2-2k$$

$$4\frac{1}{2} \geq k \geq -2\frac{1}{2} \text{ - все целые пар}$$

Заметим, что при четных y - все целые пар, а при нечет - все

$$\text{Всего 5 чет } y \text{ и 4 нечет: } 5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 67$$

$$5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 67$$

пара $(7; 4)$ не входит

Ответ: 67



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

S — кол-во одиночных билетов, $S \in \mathbb{N}$

P_1 — вер. попасть на концерт Пете и Вase в начале месяца

P_2 — — — — в конце месяца

$$\frac{P_2}{P_1} = 11$$

k — кол-во билетов в конце месяца, $k \in \mathbb{N}, k > 4$

$$P_1 = \frac{4}{S} \cdot \frac{3}{S-1}$$

$$P_2 = \frac{k}{S} \cdot \frac{k-1}{S-1}$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{k(k-1)}{4 \cdot 3} = 11$$

$$k^2 - k - 12 \cdot 11 = 0$$

$$D = 1 + 528 = 529 = 23^2$$

$$k_1 = \frac{1-23}{2} < 0 \text{ — не подходит}$$

$$k_2 = \frac{1+23}{2} = 12$$

Ответ: 12



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

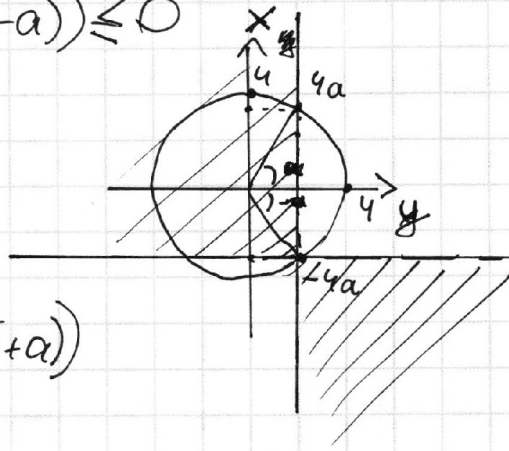
№6 M-периметр $\Phi(\alpha)$

$$\Phi(\alpha) \begin{cases} (1) \{ (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ (2) \{ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

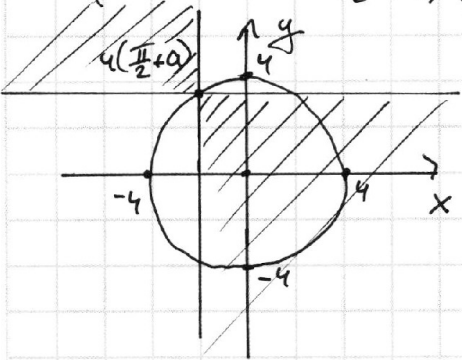
(2) - ~~окр~~ круг с центром (0,0) и рад. 6

$$(1) (x - 4 \sin(-\alpha))(y - 4 \cos(-\alpha)) \leq 0$$

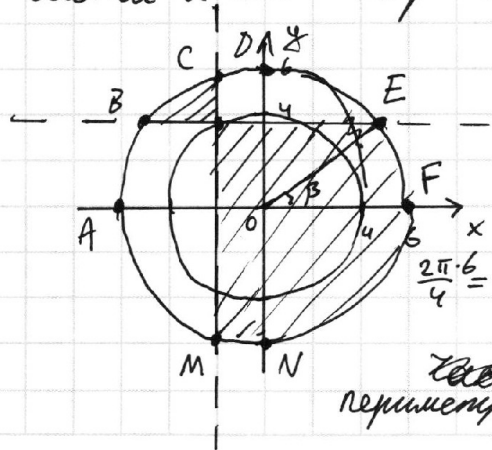
Плоскость разрезана
делится на 4 части,
в 2х из которых
удовлетворяют кр-ву



$$(x - 4 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha))(y - 4 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha))$$



$\Phi(\alpha)$ на плоскости - круг, который разрезали на 4
части и от которого взяли 2



Возьмём какое-то α :

$$NF = \frac{2\pi \cdot 6}{4}$$

$$CD = MN$$

$$AB = EF$$

$$\frac{2\pi \cdot 6}{4} = \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{MN}$$

⇓

Значит длина
периметра круга, входящий в окружность $\Phi(\alpha)$, постоянна



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

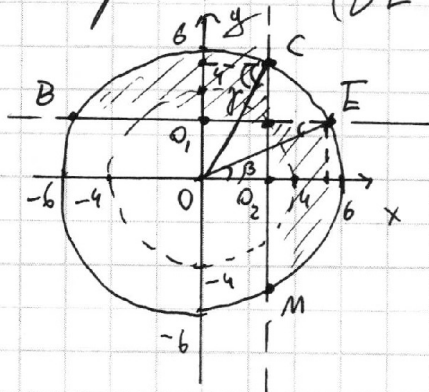
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

и равен $\frac{2\pi \cdot 6}{4} + \frac{2\pi \cdot 6}{4} = \pi \cdot 6$

Следовательно, для $\max M$ нужно найти α , при котором $\max (BE + CM)$



$$\sin \beta = \frac{4 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{6}$$

$$O_1E = 6 \cdot \cos \beta = 6 \cdot \sqrt{1 - \frac{16 \sin^2(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{6^2}} = \sqrt{36 - 16 \sin^2(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

Аналогично: $\cos \gamma = \frac{4 \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{6}$

$$CO_2 = \sqrt{36 - 16 \cos^2(\frac{\pi}{2} + \alpha)} = \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

$$BE + CM = 2O_1E + 2CO_2$$

$$f(\alpha) = 2\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}$$

$$f'(\alpha) = \frac{-16 \cdot 2 \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}} + \frac{-16 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}} = \frac{-32 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}} + \frac{-32 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}}$$

$$= 16 \sin 2\alpha \left(\frac{\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} - \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}}{\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}} \right)$$

$$\sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha} = \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}$$

$$-\sin^2 \alpha = -\cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 2\alpha = 0$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

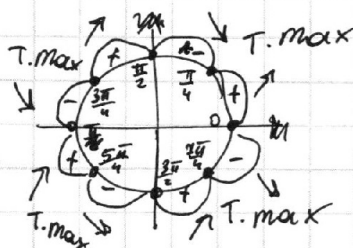
$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

По г.у. экстремума, $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} - T. \max$

Отв: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$



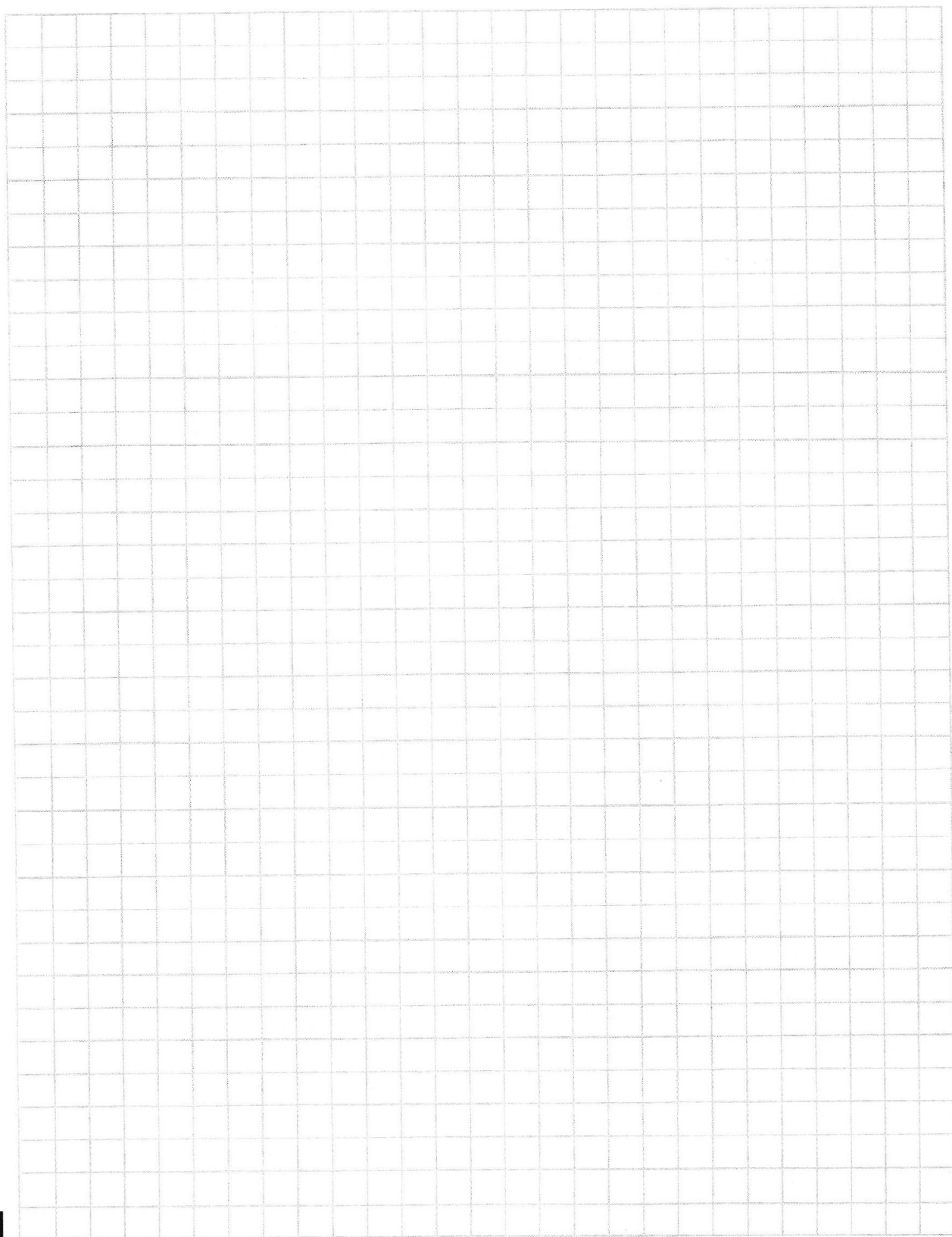


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

S - кол-во 11, $S \in \mathbb{N}, S \geq 2$
 P_1 - в корзине: $\left[\frac{4}{S} \cdot \frac{3}{(S-1)} \right]$
 k - всего в корзине, $k \in \mathbb{N}, k \geq 4$
 P_2 - в корзине: $\frac{k}{S} \cdot \frac{k-1}{S-1}$

$$\frac{k(k-1)}{S(S-1)} = \frac{4 \cdot 3}{S(S-1)} \cdot 11$$

$$k^2 - k = 12 \cdot 11$$

$$k^2 - k - 132 = 0$$

$$D = 1 + 400 \cdot 120 \cdot 8 = 529$$

$$\frac{k(k-1)}{4 \cdot 3} = 11$$

$$k^2 - k - 12 \cdot 11 = 0$$

$$D = 1 + 48 \cdot 11 = 1 + 480 + 48 = 529 = 23$$

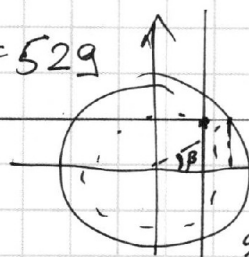
$$k_1 = \frac{1-23}{2} < 0$$

$$k_2 = \frac{1+23}{2} = 12$$

$$\frac{C_{(S-2)}^2}{C_S^4} = \frac{(S-2)! \cdot 4! \cdot (S-4)!}{8! \cdot 2! \cdot (S-4)! \cdot 5!} = \frac{4 \cdot 3}{(S-1) \cdot S}$$

$$\begin{array}{r} \times 12 \\ 12 \\ \hline 12 \\ \times 132 \\ \hline 528 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 529 \overline{) 7} \quad 529 \overline{) 19} \\ 49 \quad 17 \quad 38 \quad 12 \\ \hline 39 \quad 149 \quad 199 \\ 529 \overline{) 13} \quad 529 \overline{) 17} \\ 52 \quad 529 \overline{) 23} \\ 46 \quad 69 \end{array}$$



$$\sin \beta = \frac{4 \sin \dots}{6} = \frac{2}{3} \sin \dots$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{4}{9} \sin^2 \dots} = \frac{\sqrt{9 - 4 \sin^2 \dots}}{3}$$

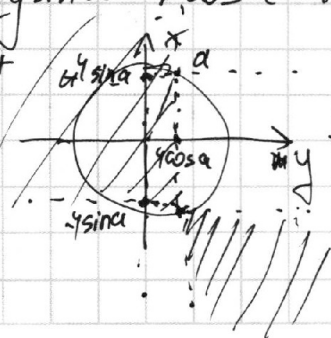
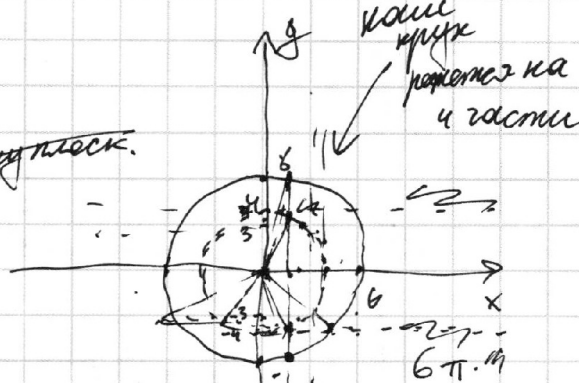
$$\sqrt{6} \quad \textcircled{1} \begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$

M - периметр $\Phi(\alpha)$
 $\max M$ при α ?

$$\textcircled{2} \begin{cases} x \leq 4 \sin \alpha \\ y \geq 4 \cos \alpha \\ x \geq 4 \sin \alpha \\ y \leq 4 \cos \alpha \end{cases}$$

$$xy + 4y \sin \alpha - 4x \cos \alpha - 16 \sin \alpha \cos \alpha \leq 0$$

$$\begin{aligned} x &= -4 \sin \alpha & x &= 4 \sin(-\alpha) \\ y &= 4 \cos \alpha & y &= 4 \cos(-\alpha) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &= 4 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) \\ x &= 4 \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) \\ \sin(-\alpha) &= \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) \end{aligned}$$

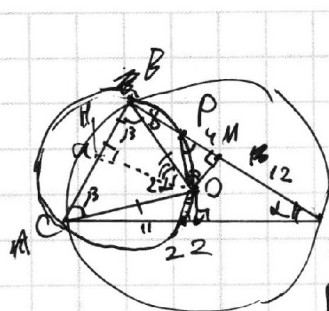


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$S_{ABC} = ?$

$$AP = 16$$

$$BP = 8$$

$$AC = 22$$

$$AB = 24$$

$$R = CO = \frac{a}{2 \sin \angle}$$

$$2\angle + 2\beta = 180$$

$$\angle + \beta = 90^\circ$$

$$PO \cdot a = 8 \cdot R$$

$$\sin \angle = \frac{4}{PO}$$

$$PO \cdot a = 8 \cdot \frac{a}{2 \cdot 4} \cdot PO$$

$$16 \cdot 24 = h \cdot 22$$

$$h = \frac{8 \cdot 24}{11}$$

$$\cos \angle = \frac{24^2 + 22^2 - a^2}{2 \cdot 24 \cdot 22}$$

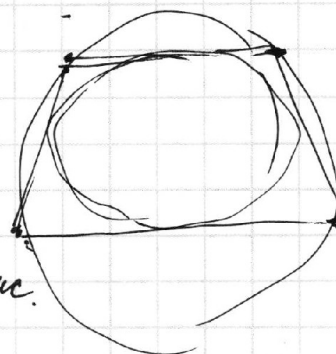
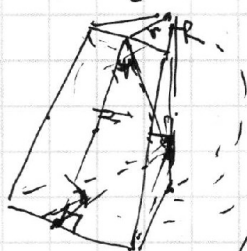
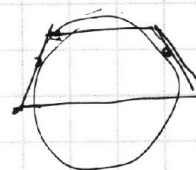
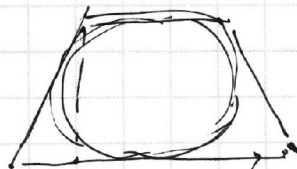
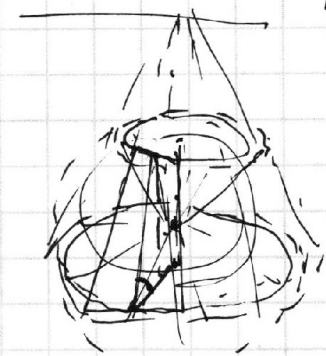
$$\sin \angle = \sqrt{\frac{24^2 \cdot 4 \cdot 22^2 - 24^2 - 22^2 + a^2}{(2 \cdot 24 \cdot 22)^2}}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \sin \angle = 4 \cdot 24 \cdot 11 \cdot \frac{4}{PO}$$

$$R = \frac{R}{2 \sin \beta} = \frac{R}{2 \cos \angle} = \frac{a}{2 \sin 2 \angle}$$

$$\sin \angle = \frac{\frac{a}{2}}{R} = \frac{a}{2R}$$

$$\frac{OM}{OH} = \frac{4}{\frac{a}{2}} = \frac{8}{a}$$



r - рад. впис. R - впис.

r_w

r_w



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} (1) & 1-x=y+2k \\ (2) & 1+x=3y+2n \end{aligned} \quad \begin{aligned} \sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y &= \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cos \pi y \\ \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y &= -\cos(\pi x - \pi y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) & x+y=1-2k \quad y=1-x-2k \quad x=1-y-2k \\ (2) & x=3y+2n-1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \cos 2\pi y &= \cos(\pi + \pi y - \pi x) \\ 2\pi y &= \pi + \pi y - \pi x + 2\pi k \\ 2\pi y &= \pi x - \pi - \pi y + 2\pi k \end{aligned}$$

а) а) $(1-y-2k; y)$ $k, n \in \mathbb{Z}$
 $(3y+2n-1; y)$

б) сколько $(x, y) : (x, y \in \mathbb{Z})$
 $\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

$(\frac{x}{7}) \in [-1; 1] \quad x \in [-7; 7]$

$(\frac{y}{4}) \in [-1; 1] \quad y \in [-4; 4]$

$\arccos \frac{x}{7} \in [0; \pi]$

$\arcsin \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$(\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4}) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

нет. реш:

$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} = 0$
 $\arcsin \frac{y}{4} = \arccos \frac{x}{7}$

$\frac{x}{7} = 1 \quad x = 7$

$\frac{y}{4} = 1 \quad y = 4$

пара $(7, 4)$
не подходит

$y = -4$

$x = 5 + 2k$

$x = -13 + 2n$

$-7 \leq 5 + 2k \leq 7$

$-12 \leq -2k \leq 2$

$6 \leq 2k \leq 12$

$3 \leq k \leq 6$

$6 \leq 2n \leq 20$

$3 \leq n \leq 10$

$5 + 2k = -13 + 2n$

$18 = 2(n+k)$

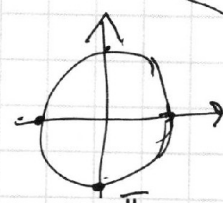
$9 = n+k$

$k = (9-n) \in [-1; 6]$

$40 + 28 - 1 =$

$7 = 67$

$32 + 35$



$y = \frac{1}{2}$
 $x_1 = \frac{1}{2} - 2k$
 $x_2 = 2n$
не совн.

$y = \frac{1}{2}$
 $x_1 = \frac{1}{2} - 2k = \frac{1}{2} - 2k$
 $x_2 = \frac{3}{2} + 2n - 1 = \frac{1}{2} + 2n$

$y = \frac{1-k-n}{2}$

$3y + 2n - 1 = 1 - y - 2k$

$4y = 2 - 2(k+n)$

$2y = 1 - (k+n)$

$y = \frac{1-k-n}{2}$

$3(-4) + 2n - 1 = 1 - y - 2k$

$-12 - 4 = 2 - 2(k+n)$

$-16 = 2 - 2(k+n)$

$3y + 2n - 1 = 1 - y - 2k$

$4y = 2 - 2(k+n)$

$2y = 1 - (k+n)$

$y = \frac{1-k-n}{2}$

$3(-4) + 2n - 1 = 1 - y - 2k$

$-12 - 4 = 2 - 2(k+n)$

$-16 = 2 - 2(k+n)$

$-16 = 2 - 2(k+n)$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 $A, B, C \in \mathbb{N}$

а) $AB \cdot C = K^2, K \in \mathbb{N}$

$A = p \cdot 1111, p \in \{1, 2, \dots, 9\}$

$\begin{array}{r} 111111 \\ 11 \overline{) 111111} \\ \underline{11} \\ 0 \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \end{array}$

11 · 10! 10! — простое?

$K^2 = p \cdot 11 \cdot 10! \cdot B \cdot C$

$B = 10! \cdot b, b \neq 7 \Rightarrow b = 7$
 B или C есть 7 $B = 707$

$K^2 = p \cdot 11 \cdot 10! \cdot 7 \cdot C$

$p \in \{1, 2, \dots, 9\}$

$C = 11 \cdot m, m = 1$
 A, B, C есть 1 $C = 11$

$p = 7$
 $A = 7777$
 $B = 707$
 $C = 11$

№2

$x, y > 0$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$M = x^3 - y^3 - 12xy$
 $M = ?$

$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$

$x \neq 4$
 $y \neq -4$

$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow x+y+3 > 0$

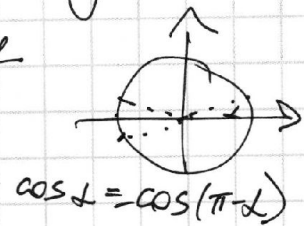
$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy - 4y + 4x - 16}$

$xy - 4y + 4x - 16 = xy$

$x - y = 4$

$x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy$

$= 4(x^2 + xy + y^2) - 12xy = 4x^2 - 8xy + 4y^2 = 4(x-y)^2 = 4 \cdot 16 = 64$



№3 $(x; y) = ?$

$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$

$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y$

$-\cos 2\pi y = \cos \pi(x-y)$

$\cos(\pi - 2\pi y) = \cos(\pi(x-y))$

$\pi - 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
 $\pi - 2\pi y = \pi y - \pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$