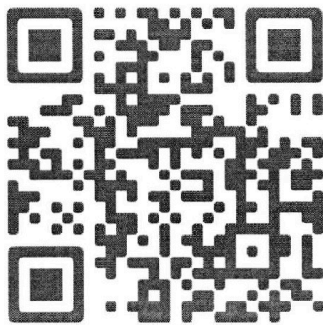




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa}, \text{ где } a \in [1; 9]; A = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a;$$

$$1111 = 11 \cdot 101;$$

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C \text{ — квадрат некоторого натурального числа}$$

11, 101 — простые. Их степень в разложении $A \cdot B \cdot C$ на простые множители должна быть чётной, т.к. $A \cdot B \cdot C$ — квадрат.

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C$$

$$\vdots 11^n \vdots 101^k, \quad n \in \mathbb{Z}, n \geq 2, n > 0 \\ k \in \mathbb{Z}, k \geq 2, k > 0$$

$$(a \cdot B \cdot C) \vdots 11 \text{ и } \vdots 101$$

$$a \in [1; 9] \Rightarrow a \not\vdots 11, a \not\vdots 101 \Rightarrow B \vdots 101 \quad (*)$$

$$B \in [10; 99] \Rightarrow B \not\vdots 101$$

Заметим, что B не может одновременно делиться на 11 и на 101, т.к.

$$\begin{cases} B \vdots 11 \\ B \vdots 101 \end{cases} \Leftrightarrow B \vdots 1111, \text{ но } B \in [100; 999] \Rightarrow B \not\vdots 1111;$$

(11, 101 — простые)

$$B \vdots 101 \text{ из } (*), B \not\vdots 11 \Rightarrow B \vdots 11;$$

$$\begin{array}{l} C \text{ — двузначное} \\ C \vdots 11 \\ C \text{ содержит цифру 3} \end{array} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \text{единств. подходящее} \\ \text{знач. } C = 33; \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{array}{l} B \in [100; 999] \\ B : 101 \\ B \text{ содержит цифру } 2 \end{array} \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \text{единств. знач. для } B = 202 \end{array} \right.$$

$$A \cdot B \cdot C = \underbrace{11 \cdot 101 \cdot a}_A \cdot \underbrace{2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11}_B - \text{квадрат } \underbrace{\text{натур.}}_C \text{ числа}$$

2, 3 - простые; $\Rightarrow$ все степени входящие в разложение на простые множители $A \cdot B \cdot C$ должны быть четными.

$$\begin{array}{l} 11 \cancel{:/2}, \cancel{:/3} \\ 101 \cancel{:/2}, \cancel{:/3} \end{array} \left| \begin{array}{l} a : 2, a : 3 \Rightarrow a : 6 \\ a \in [1; 9] \end{array} \right| a = 6;$$

$$A \cdot B \cdot C = \underbrace{11 \cdot 101 \cdot 6}_A \cdot \underbrace{2 \cdot 101}_B \cdot \underbrace{3 \cdot 11}_C = 6^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 - \text{квадрат } 6 \cdot 11 \cdot 101;$$

$$(A; B; C) = (6666; 202; 33);$$

$$\text{Ответ: } (6666; 202; 33)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{y+x}{xy} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy};$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+1+x-1}{(x-1)(y+1)} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} =$$

$$= \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)};$$

По условию значение выражения K не изменяется, если x уменьшить на 1, а y увеличить на 1; Тогда это условие можно записать следующим образом:

$$\frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy}; \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow x+y > 0$$

(по условию)

$$x+y+2 > 0$$

$x-y+2 > 0$; Поделим обе части уравнения на $(x+y+2)$

$$\frac{1}{(x-1)(y+1)} = \frac{1}{xy}; \quad xy = (x-1)(y+1);$$

(значения не 0 по условию) ~~знаем~~

$$xy = xy - y + x - 1;$$

$$x-y=1; (*)$$

Рассм. выражение $M = x^3 - y^3 - 3xy =$

$$= (x-y)(x^2+xy+y^2) - 3xy = x^2+xy+y^2-3xy =$$

1 (по *)

$$= x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \stackrel{(по *)}{=} 1^2 = 1; \quad \text{Ответ: } 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = 2 \cdot \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

по формуле суммы синусов по формуле суммы косинусов

$$\left[\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \neq 0 \quad (1) \right. \\ \left. \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \pi x \quad (2) \right]$$

Ур-ние (1): ~~$\cos \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0$~~ $\frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \neq 0; \quad \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad | : \pi / 2$$

$$x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}; \quad (*)$$

Ур-ние (2): $\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$

$$\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} \right) - \cos \left(\frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} \right) + \cos \left(\frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right) \right);$$

по формуле произвед. синусов по формуле произвед. косинусов

$$\cancel{\cos \left(\frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} \right)} - \cos \left(\frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right) = \cancel{\cos \left(\frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2} \right)} + \cos \left(\frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right)$$

$$2 \cos \left(\frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right) = 0; \quad \cos \left(\frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} \right) = 0;$$

$$\frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad | : \pi / 2$$

$$3x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \quad (**)$$

$U_1 (*) \cap (**):$ порождает все пары действ. чисел удовлетв. совокупности

$$\begin{cases} x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x + y = 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

б) целые $(x; y)$ такие что удовлетв. ур-нию и

нер-ву: $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}; (3)$

$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1; -5 \leq x \leq 5; -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1; -4 \leq y \leq 4;$

$\arcsin \frac{x}{5} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]; \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}];$
 $\arccos \frac{y}{4} \in [0; \pi]$

Единственная пара $(x; y)$, такая что

$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2} : \begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$

Пара $(5; -4)$ не удовлетв. нер-ву (3); ~~все остальн~~

Все другие пары $(x; y)$ ($x \in [-5; 5], y \in [-4; 4]$) удовлетв. нер-ву (3)

Найдём целые $(x; y)$ удовлетв. ур-нию;

По п.а решению ур-ния являются пары $(x; y)$, такие

что: $\begin{cases} x-y = 1+2n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x+y = 1+2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ~~выражен~~

Заметим, что обе части являются некоторыми

целыми числами, причем правая часть -

нечётное число. $\Rightarrow \begin{cases} x-y - \text{нечётно} \\ 3x+y - \text{нечётно} \end{cases}$ такое может быть, только если x, y - числа разной чётности;

Учитывая все наложенные условия выберем все целые пары $(x; y)$ такие что:

$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \\ (x; y) \neq (5; -4) \\ x \not\equiv y \pmod{2} \end{cases}$

~~Выпишем эти пары:~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для каждого нечётного x (кроме $x=5$) найдётся 5 чётных значений $y: \{-4; -2; 0; 2; 4\}$

Для $x=5$: $y \in \{-2; 0; 2; 4\}$ — 4 значения;

Для каждого чётного x найдётся 4 нечётных значения $y: \{-3; -1; 1; 3\}$;

Нечётных знач. x (кроме $x=5$) — 5 знач.
 $\{-5; -3; -1; 1; 3\}$

Чётных знач. x — 5 значений $\{-4; -2; 0; 2; 4\}$;

Всего пар: $5 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 4 = 25 + 20 + 4 = 49$;

$\underbrace{\quad}_{\text{пары вида (H;4)}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{пары вида (Ч;H)}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{пары вида (5;4)}}$

H — нечётный

Ч — чётный

Ответ: а) $\begin{cases} x-y \geq 1+2n, n \in \mathbb{Z}; \\ 3x+y \geq 1+2k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$ б) 49;



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Пусть $P(A)$ - событие "Геня и Вера пойдут на концерт в конце месяца"~~

Пусть $P(A)$ - вероятность события "Геня и Вера пойдут на концерт в конце месяца"

Все исходы распределение билетов равновероятны, поэтому $P(A) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$, где n - кол-во билетов; ($n \geq 4$)

C_n^4 - все исходы, C_{n-2}^2 - кол-во вариантов распределения билетов, где Геня и Вера идут на концерт.

$$P(A) = \frac{(n-2)!}{(n-4)! 2!} \cdot \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2(n-1)n} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Пусть $P(B)$ - вероятность события "Геня и Вера пойдут на концерт в конце месяца"

k - кол-во билетов, которые будут выданы в конце месяца; $k \geq 4$

Все исходы равновероятны, поэтому

$$P(B) = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(n-k)! (k-2)!} \cdot \frac{(k-2)! k!}{k! n(n-1)} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

По условию: $P(B) = 2,5 P(A)$; $\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2,5 \cdot 12}{n(n-1)}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{30}{n(n-1)} \mid \cdot n(n-1), n(n-1) \neq 0, \text{ т.е. } n > 4;$$

$$k^2 - k \geq 30; \quad k^2 - 30 - k \geq 0;$$

$$k^2 - k - 30 \geq 0;$$

$$D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 30 = 121 = 11^2;$$

квадратн. уравне
 $A=1, B=-1, C=-30$

коэфф. квадратного
трёхчлена

дискриминант

$$k = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} = \frac{1 \pm 11}{2} = \frac{1 \pm 11}{2};$$

$$k \neq 1 \pm \begin{cases} k \geq 6 \\ k \geq -5 \end{cases}$$

$$k \geq 4 (\text{по условию}) \Rightarrow k \geq 6;$$

Было выдано 6 билетов в конце месяца

Ответ: 6

Ombem : 45;



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Для дальнейших рассуждений обозначим точки A, B, C, D, E, F на графике.

Тогда $P_{\Phi(2)}$ — периметр фигуры;

~~$P_{\Phi(2)}$~~

Обозначим l_{AB} — длину отрезка AB ;

l_{BC} — длину отрезка BC , l_{DE} — длину отрезка DE ;

l_{FE} — длину отрезка FE ; l_{BD} — длину отрезка BD ;

l_{DF} — длину отрезка DF ; l_{BF} — длину отрезка BF ;

$$P_{\Phi(2)} = l_{AB} + l_{BC} + l_{DE} + AD + CE;$$

Заметим, что в силу симметрии $BC = FE$;

$l_{BC} = l_{FE}$; Аналогично: $AB = BD$; $l_{AB} = l_{BD}$;

$$P_{\Phi(2)} = l_{AB} + \underset{l_{FE}}{l_{BC}} + l_{DE} + AD + CE = \underset{l_{BD}}{l_{AB}} + \overset{l_{DF}}{l_{FE}} + l_{DE} + AD + CE =$$

$$= l_{AB} + l_{DF} + AD + CE = l_{BD} + l_{DF} + AD + CE =$$

$$\overset{l_{BF}}{=} l_{BF} + AD + CE =$$

$$\overset{\text{по формуле}}{=} \frac{2\pi \cdot 5}{2} + AD + CE = 5\pi + AD + CE;$$

~~$P_{\Phi(2)}$ зависит от длины отрезка~~ Обозначим точки Q, S (см. график)

$$M(3\sqrt{2}\sin 2; 3\sqrt{2}\cos 2);$$

$$Q(0; 3\sqrt{2}\cos 2);$$

$$S(3\sqrt{2}\sin 2; 0);$$

ΔOQA — прямоугольный;

$$AQ^2 + OQ^2 = AO^2 \text{ (по г. Пифагора)}$$

$$AQ = \sqrt{25 - 18\cos^2 2};$$

Аналогично ΔOSE — прямоугольный. $OS^2 + SE^2 = OE^2$

(по г. Пифагора);

$$SE = \sqrt{25 - 18\sin^2 2};$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

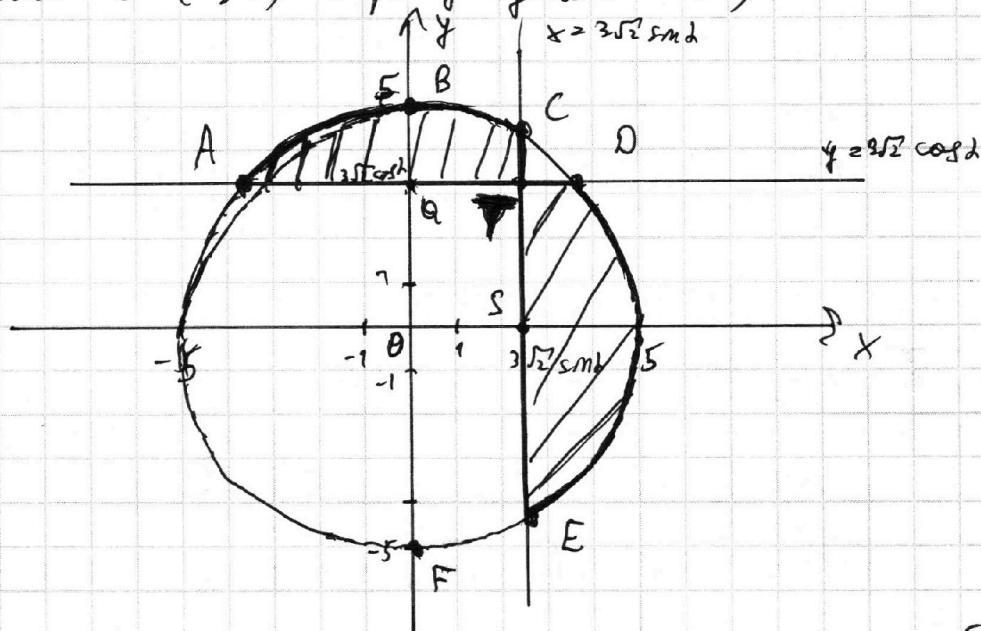
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin 2)(y - 3\sqrt{2} \cos 2) \leq 0; & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 25; & (2) \end{cases}$$

Введём НДСК и в координатах (XOY) построим график системы;

(1): $(x - 3\sqrt{2} \sin 2)(y - 3\sqrt{2} \cos 2) \leq 0;$

Графиком являются две области, ограниченные прямыми $x = 3\sqrt{2} \sin 2$ и $y = 3\sqrt{2} \cos 2$;
 $x = 3\sqrt{2} \sin 2$ — вертикальная прямая
 $y = 3\sqrt{2} \cos 2$ — горизонтальная прямая

(2) $x^2 + y^2 \leq 25$; графиком является внутренняя область окружности с центром в $(0,0)$ и радиусом ≥ 5 ;



Штриховкой обозначена область, заштрихованная фигурой $P(2)$, штриховыми линиями показаны её границы $3\sqrt{2} < 5 \Rightarrow$ прямые всегда $\cap$ ок-ть (2)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AQ = QD = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha};$$

$$SE = SC = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha};$$

$$AD + CE = 2\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} = 2\sqrt{25 + 18 \sin^2 \alpha - 18} + 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \text{ (по основн. тр-т-ву)}$$

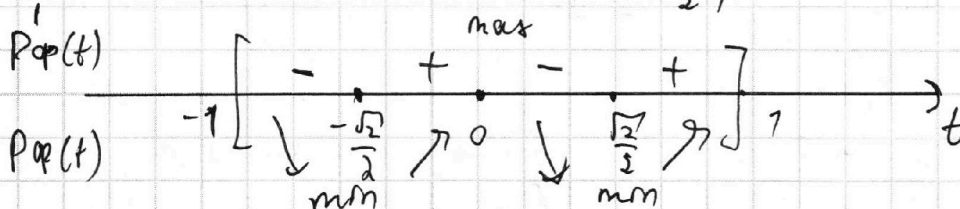
$$P_{\varphi}(\alpha) = 5\pi + 2\sqrt{25 + 18 \sin^2 \alpha - 18} + 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}; \text{ пусть } t = \sin \alpha, t \in [-1; 1];$$

$$P_{\varphi}(t) = 5\pi + 2\sqrt{25 - 18t^2 - 18} + 2\sqrt{25 - 18t^2}; \quad D_{P_{\varphi}(t)} = [-1; 1]$$

$$P'_{\varphi}(t) = 2 \cdot \frac{36t}{2\sqrt{7+18t^2}} + 2 \cdot \frac{-36t}{2\sqrt{25-18t^2}} = 36t \left(\frac{\sqrt{25-18t^2} - \sqrt{7+18t^2}}{\sqrt{7+18t^2} \cdot \sqrt{25-18t^2}} \right)$$

$$P'_{\varphi}(t) = 0; \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ \sqrt{25-18t^2} = \sqrt{7+18t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ 25-18t^2 = 7+18t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ 36t^2 = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} t \geq 0 \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$P_{\varphi}(0) = 5\pi + 2\sqrt{7} + 10;$$

$$P_{\varphi}(-1) = 5\pi + 10 + 2\sqrt{7};$$

$$P_{\varphi}(1) = 5\pi + 10 + 2\sqrt{7};$$

$$M = 5\pi + 2\sqrt{7} + 10; \text{ достигаемо при } \begin{cases} t \geq 0 \\ t = -1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \alpha \geq 0 \\ \sin \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\alpha = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = 3\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{Ответ: } M = 5\pi + 2\sqrt{7} + 10$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



п. Черныш.

к34

$$n \frac{C_{n-2}^2}{C_n} = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{(n-1)(n-2)}{4n}$$

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a;$$

$$B = \overline{bcb} = 100b + c; \quad 100b + 100cd \rightarrow 200 + 200cd \rightarrow 200b + 200cd \rightarrow 200b + 200cd + 2$$

$$C = \overline{ef} = 10e + f$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ 11 \overline{) 101} \\ \underline{01} \end{array}$$

$$(11 \cdot 101)$$

$$(B.C) : 11^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$62 \sin 4y \sin 5y$$

$$\frac{42}{(n-3)(n-2)}$$

$$10^4 \overline{) 2} \quad 8y(1-2n)$$

$$(C=33)$$

$$B = 10^4, 20^4, 30^4$$

$$40^4, 50^4, 60^4, 70^4, 80^4$$

$$11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 2 = 101 \cdot 3 \cdot 11$$

$$B = 101$$

$$x=20, \quad n=0$$

$$(101)$$

$$11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 2 = 101 \cdot 3 \cdot 11$$

$$\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$$

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{2}{xy} = \frac{x+2+y}{xy}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} = \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y))$$

$$\text{range}[-4+4; 4+4] \quad xy - y + x - 1$$

$$x=2 \begin{cases} y \geq x-1-2n \\ y \geq 102n-34 \end{cases}$$

$$\frac{x+2+y}{xy} = \frac{x+2+y}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy = xy - y + x - 1$$

$$x-1-2n \in [-4; 4]$$

$$N = (x-y)(x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2) - 3xy; \quad x \in [-5; 5]; \quad y \in [-4; 4]$$

$$n \in [-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}] \quad x^2 + \frac{1}{2}xy + y^2 - 3xy = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \geq 0$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x;$$

$$\frac{\sin \pi x + \sin \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\cos \pi x + \cos \pi y}{2} \cos \frac{\pi x + \pi y}{2}$$

$$\frac{1}{2} (\cos(\frac{\pi y}{2} - \frac{\pi x}{2}) - \cos(\frac{3\pi x + \pi y}{2})) = \frac{1}{2} (\cos(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2}) + \cos(\frac{\pi x - \pi y}{2}))$$

$$\cos(\frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2}) \geq 0; \quad \frac{3\pi x}{2} + \frac{\pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad 3x+y = 1+2n;$$



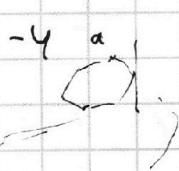
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

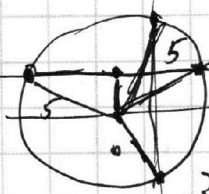
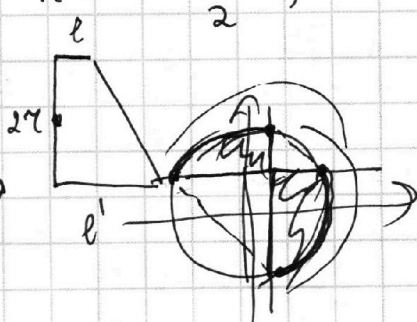


$$\begin{aligned} -\frac{5}{3} &\geq \frac{9}{3}, 0, 5 \\ y &= x - 1 - 2n \\ y &= 1 - 2n - 3x \end{aligned}$$



$$n = \frac{y - x - 1}{2} = \frac{8 - y - 1}{2}$$

$$n = \frac{y - 3x - 1}{2};$$



$$3\sqrt{2} \cos \alpha$$

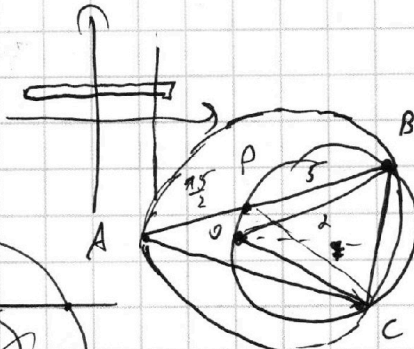
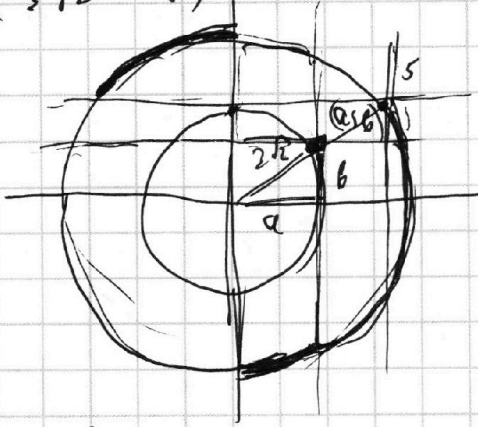
$$2\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha};$$

$$2\sqrt{2} \sin \alpha \quad 2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha};$$

$$(-\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}; 3\sqrt{2} \cos \alpha);$$

$$(3\sqrt{2} \sin \alpha; \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha});$$

$$\frac{45}{2}$$



$$BC = 2R \sin \alpha$$

$$4R^2 \sin^2 \alpha = 25 - 18 - 90 \cos^2 \alpha + 90 \sin^2 \alpha$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 18 \\ \begin{cases} x \leq a \\ y \geq b \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq a \\ b \leq y \end{cases} \end{cases}$$

$$X = a - b + P - a - P + b + X$$