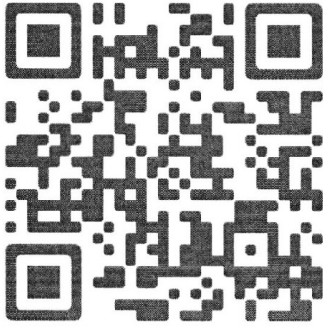
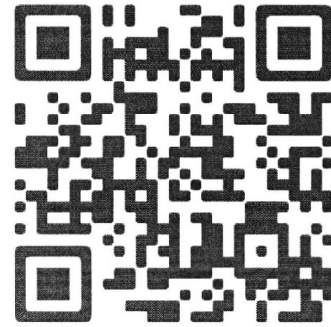




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



- ✓ 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася высчитали, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7



СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1. Имеем, что $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$. $a \in [1; 9]$, $a \in \mathbb{N}$

A т.ч. $A \cdot B \cdot C = k$, где $k \in \mathbb{N}$,
значит, B или C обязана быть
кратна 101 (т.ч. C - двузначное
число $\Rightarrow B : 101$)

B - трёхзначное и имеет одну из
своих цифр - 7. Следовательно, тогда $B = 101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909$.
(т.ч. $B : 101 \Rightarrow B = 101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909$). $B = 707$.

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot C =$$

$$= 101^2 \cdot a \cdot C \cdot 11 \cdot 7$$

a - цифра, отличная от 0. Т.ч.
т.ч. C - двузначное число и имеет одну из своих цифр - 1
 $C = 10, 11, 12, \dots, 19$, а или $C = 21, 31, 41, \dots, 91$

- ① $a=1$: $C : 77 \emptyset$
- ② $a=2$: $C : 2 \cdot 77 \emptyset$ - (т.к. $a \cdot 11 \cdot 7$ - дв. полный квадрат)
- ③ $a=3$: $C : 11 \cdot 7 \cdot 3 \emptyset$
- ⋮ $\emptyset$ т.ч. C - двузначное и
- ⑦ $a=7$: $C : 11$ и $11 \cdot C$ является полным квадратом $\Rightarrow C=11$
- ⑧ $\emptyset$
- ⑨ $\emptyset$

Ответ: $(7777; 707; 11)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N2 \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{xy} = k = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{aligned} x+y+3 &= 0 \\ x+y &= -3 \\ &\text{н.к.} \\ x > 0, y > 0 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad x+y+3 \neq 0 \quad \text{н.к.} \quad x > 0, y > 0$$

$$\left\{ \begin{aligned} xy &= (x-4)(y+4) \\ x &\neq 4 \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} xy &= xy + 4x - 4y + 16 \\ x &\neq 4 \end{aligned} \right\} \quad \left\{ \begin{aligned} x-y &= 4 \\ x &\neq 4 \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 4+y \\ x &\neq 4 \end{aligned} \right.$$

Подставляем в $M = x^2y^3 - 12xy =$

$$= (4+y)^3 - y^3 - 12(4+y)y = 4^3 + 3 \cdot 4^2y + 3 \cdot 4y^2 - 12 \cdot 4y - 12y^2 =$$

$$= 4^3 \quad \text{Значит, } M = 4^3 \quad \text{при всех } x \neq 4 \text{ и } y > 0$$

Ответ: $4^3 = 64$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 а) $\sin \pi y (\sin \pi y - \sin \pi x) = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi y + \cos \pi x + \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi y \cdot \sin \pi x + \cos \pi y + \cos \pi x$$

$$- \cos 2\pi y = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos(2\pi y - \pi) = \cos(\pi(y-x))$$

$$2\pi(y-1) = \pm \pi(y-x) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2y-1 = y-x+2n \\ 2y-1 = x-y+2k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y = 1-x+2n \\ 3y = 1+x+2k \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} y = 1-x+2n \\ y = \frac{1+x+2k}{3} \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: все пары вида $(t; 1-t+2n); (t; \frac{1+t+2k}{3})$,

где $t \in \mathbb{R}; n, k \in \mathbb{Z}$

б) $\arccos \frac{x}{7} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4} > 0$

$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$, значит, неравенство достигается

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \\ -4 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \\ x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

выполняется при всех допустимых x и y кроме $\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0 \\ \arccos \frac{y}{4} = 0 \\ x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -7 \leq x < 7 \\ -4 \leq y < 4 \end{cases}$$

①

$$y = 1 - x + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-4 \leq 1 - x + 2n < 4$$

$$-5 + x \leq 2n < 3 + x$$

$$\text{н. к. } x \in [-4; 7) \Rightarrow$$

$$-12 \leq 2n < 10$$

$$-6 \leq n < 5$$

$$\begin{cases} -5 + x \geq -12 \\ 3 + x < 10 \end{cases}$$

Всего таких значений n - 11

$$n = -6: y = 1 - x + 2(-6) = -11 - x$$

$$\begin{cases} y = -4 \\ x = -7 \end{cases} \text{ только один}$$

$$n = -5: y = 1 - x + 2(-5) = -9 - x$$

$$-4 \leq -9 - x < 4$$

$$-13 < x \leq -5$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases}; \begin{cases} x = -6 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = -7 \\ y = -2 \end{cases} - 3 \text{ пары}$$

$$n = -4: y = 1 - x + 2(-4) = -7 - x$$

$$-4 \leq -7 - x < 4$$

$$-10 < x \leq -3$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}; \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = -5 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = -7 \\ y = 0 \end{cases} - 5 \text{ пар}$$

$$n = -3: y = 1 - x + 2(-3) = -5 - x$$

$$-4 \leq -5 - x < 4$$

$$-9 < x \leq -1$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -6 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -7 \\ y = 2 \end{cases} - 7 \text{ пар}$$

$$n = -2: y = 1 - x + 2(-2) = -3 - x$$

$$-4 \leq -3 - x < 4$$

$$-7 < x \leq 1$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -4 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \end{cases}; \begin{cases} x = -7 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$n = -1: y = 1 - x + 2(-1) = -1 - x$$

$$-4 \leq -1 - x < 4$$

$$-7 < x \leq 3$$

$$x = 1 \quad x = 0 \quad x = -1 \quad x = -2 \quad x = -3 \quad x = -4 \quad x = -5 \quad x = -6$$

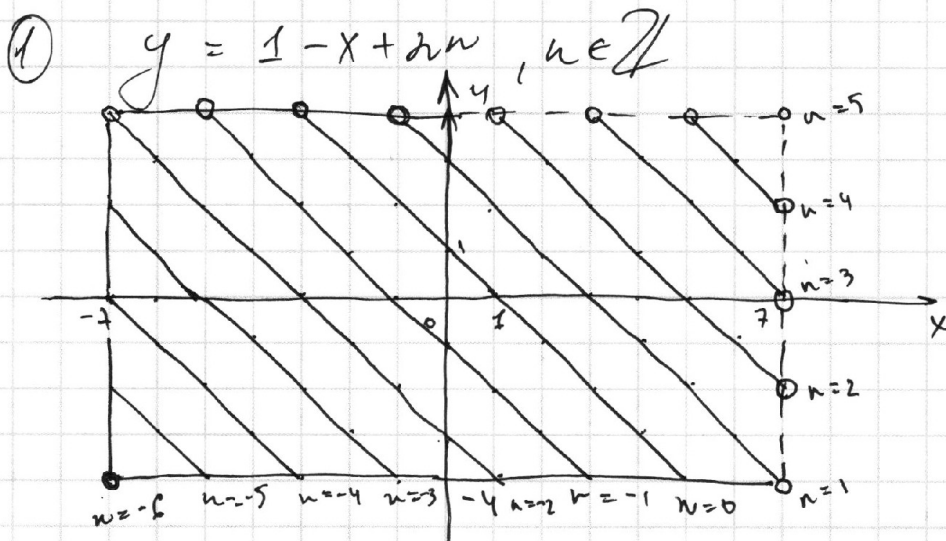


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

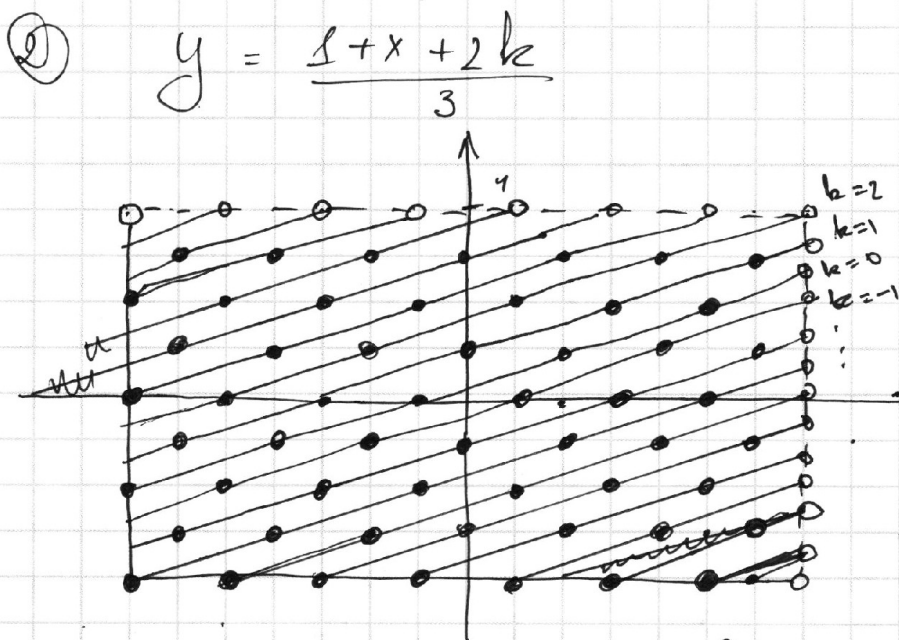
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Всего
целых
пар значений
(т.е. кол-во
точек с
целыми
координатами)
= 56



Заметим,
что все
эти пары
целых чисел
учтены
были
координатно
в сл. ①

Ответ: 56



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14) Пусть одиннадцатиклассников было n . Тогда
 А суммарно всего (в конце месяца) было k . Тогда

$$P(\text{в начале}) = P(n) = \frac{n!}{(n-4)(n-1)(n-4)! C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3)}{C_n^4}$$

$$P(\text{в конце}) = P(k) = \frac{k!}{n \cdot (n-1) \cdot (n-k)! C_n^k}$$

П.к. по усн. $\parallel P(n) = P(k)$

$$\parallel \frac{n!}{n(n-1)(n-4)! C_n^4} = \frac{n!}{n(n-1)(n-k)! C_n^k}$$

$$\parallel (n-k)! C_n^k = (n-4)! C_n^4$$

$$\parallel (n-k)! \cdot \frac{k!}{(n-k)! k!} = (n-4)! \cdot \frac{n!}{(n-4)! 4!}$$

$$\parallel \frac{1}{k!} = \frac{1}{4!}$$

$$k! = 1 \cdot 4!$$

$$P(n) = P(\text{в начале}) = \frac{C_{n-2}^{4-2}}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)!}{(n-4)! 2!}}{\frac{n!}{(n-4)! 4!}} =$$

$$= \frac{(n-2)! \cdot (n-4)! \cdot 4!}{(n-4)! \cdot 2! \cdot n!} = \frac{(n-2)! \cdot 3 \cdot 4}{n!}$$

$$P(k) = P(\text{в конце}) = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{н.ч. } 11) P(n) = P(k)$$

$$11) \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$

$$11) \cdot C_{n-2}^2 = C_n^k = C_n^4 \cdot C_{n-2}^{k-2}$$

$$11) \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} \cdot \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-2)!}$$

$$\frac{1}{2 \cdot (n-k)! \cdot k!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (n-k)! \cdot (k-2)!}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 11 \cdot \frac{(n-k-2)! \cdot (k-2)!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{(n-k)! \cdot k!}{(n-k-2)! \cdot (k-2)!}$$

$$12 \cdot 11 = (n-k-3)(n-k-2)(n-k-1)(n-k)(k-1) \cdot k$$

$$\frac{1}{2 \cdot k!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (k-2)!}$$

$$12 \cdot 11 = (k-1)k, \quad \text{н.ч. } k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} k = 12 \\ k = -11 \quad \emptyset \end{cases}$$

$$\underline{\text{Ответ: } 12}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

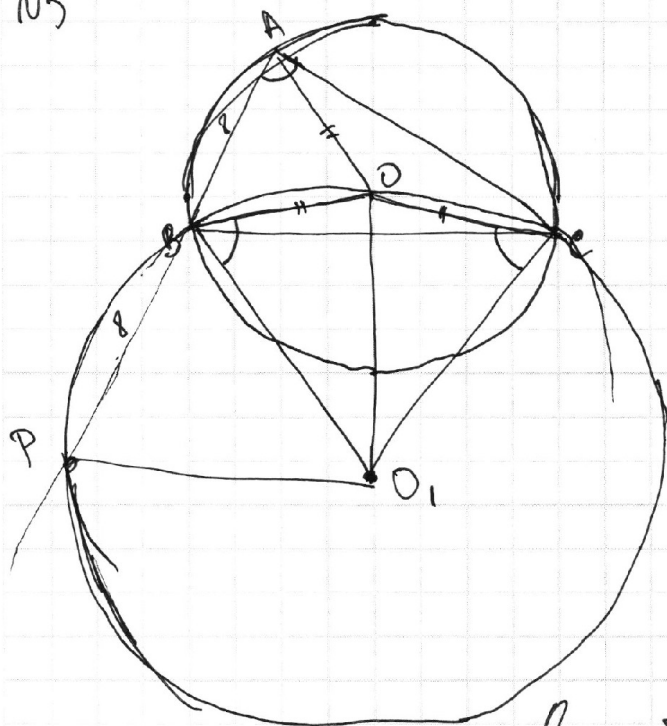
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5



Пусть центр шара O_1 .
 $\triangle BOC - O_1$.

$$\angle BAC = \alpha. AO = BO = CO = R$$

$$O_1B = O_1C = O_1P = R$$

В силу симметричности
 $\triangle BPC \cong \triangle BOC$

т.к. $\angle BOC$ - центральный
 $\angle BOC = 2\alpha$

т.к. $\triangle BPC$ - вписан $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$$

По подоб. $\triangle$ - синусов $\triangle ABC$

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R \quad ; \quad \triangle BOC: \frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2R$$

$$\frac{R}{R} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha$$

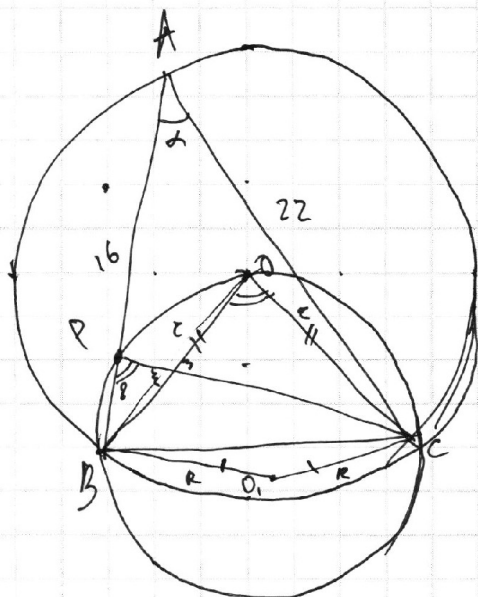
По $\triangle$ косинусов $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha$$

$$= 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

$$\triangle BOC: (1) BC^2 = 2R^2 (1 - \cos 2\alpha)$$

$$R^2 = \frac{16 \cdot 8 + 22 \cdot 11 - 16 \cdot 22 \cdot \cos \alpha}{2(1 - \cos^2 \alpha)}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☐ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Delta BPC: BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2BP \cdot PC \cos 2\alpha =$$

$$= 8^2 + PC^2 - 2 \cdot 8 \cdot PC \cdot \cos 2\alpha \quad (2)$$

$$\Delta APC: PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot \cos 2\alpha =$$

$$= 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos 2\alpha \quad (3)$$

как центральный угол ω_2

$$\angle BOC = 2(180^\circ - 2\alpha) = 360^\circ - 4\alpha$$

$$\angle OBO_1 = \angle OBC + \angle CBO_1 = \angle DCB + \angle BCO_1 =$$

$$= \angle OCO_1$$

$$\text{В } OBO_1C: \angle OBO_1 = \frac{360 - \angle BOC - \angle BOC}{2} =$$

$$= \frac{4\alpha - 2\alpha}{2} = \alpha$$

~~Тогда $AC = 22 \sin \alpha$ и $BC^2 = 22^2 (1 - \cos 2\alpha) =$~~

~~$44^2 \sin^2 \alpha = 22^2 (1 - \cos 2\alpha)$~~

~~Всего $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$~~

Подставим (1) и (3) в (2)

$$22^2 (1 - \cos 2\alpha) = 8^2 + 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos 2\alpha - 2 \cdot 8 \cdot 22 \cdot \cos 2\alpha$$

~~Отсюда выразим $\cos 2\alpha$ через α , затем $\sin \alpha = \frac{BC}{AC}$ выразим $\cos 2\alpha$ через α .~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдём длину BD и AC . Пусть $4 \sin \alpha = a$
 $4 \cos \alpha = b$
 $BM = \sqrt{36 - a^2}$ (т.к. точки $A, B, C, D \in \text{окр-ти}$)
 $AN = NC = \sqrt{36 - b^2} = \sqrt{36 - (4^2 - a^2)} =$
 $= \sqrt{36 - 16 + a^2} = \sqrt{20 + a^2}$

Найдём тогда $f(a) = BD + AC = 2BM + 2NC =$
 $= 2(\sqrt{36 - a^2} + \sqrt{20 + a^2})$

$f'(a) = 2(\sqrt{36 - a^2} + \sqrt{20 + a^2})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{36 - a^2}} \cdot (-2a) + \frac{2 \cdot 2a}{2\sqrt{20 + a^2}} =$
 $= 2a \left(\frac{1}{\sqrt{20 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{36 - a^2}} \right) = 2a \frac{\sqrt{36 - a^2} - \sqrt{20 + a^2}}{\sqrt{20 + a^2} \cdot \sqrt{36 - a^2}} =$
 $= 2a \frac{36 - a^2 - 20 - a^2}{(\sqrt{20 + a^2} + \sqrt{36 - a^2}) \sqrt{20 + a^2} \sqrt{36 - a^2}} =$

$= \frac{2a(16 - 2a^2)}{(\sqrt{20 + a^2} + \dots)} \quad \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ -16 \quad -2\sqrt{2} \quad 0 \quad 2\sqrt{2} \quad 16 \end{array} \quad \begin{array}{c} f(a) \\ f'(a) \end{array}$

Значит, $f(a)$ max при $a = \pm 2\sqrt{2}$
 (симметричные точки)

$f(\pm 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{28} = 8\sqrt{7}$

а Попробуем $4 \sin \alpha = a$

Ответ: $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ т.е. $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
 Тогда $M_{\max} = 6\pi + f(\pm 2\sqrt{2}) = 6\pi + 8\sqrt{7}$ — окончательное
 при $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

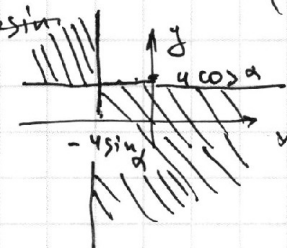


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

NB
$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$
 — имеет вид окружности с центром в т. $(0; 0)$ и $R = 6$

(1) Пусть $x = -4\sin\alpha$ и $y = 4\cos\alpha$ имеет вид:  т.е. делит плоскость на 4 и поочередно накрывает эти области

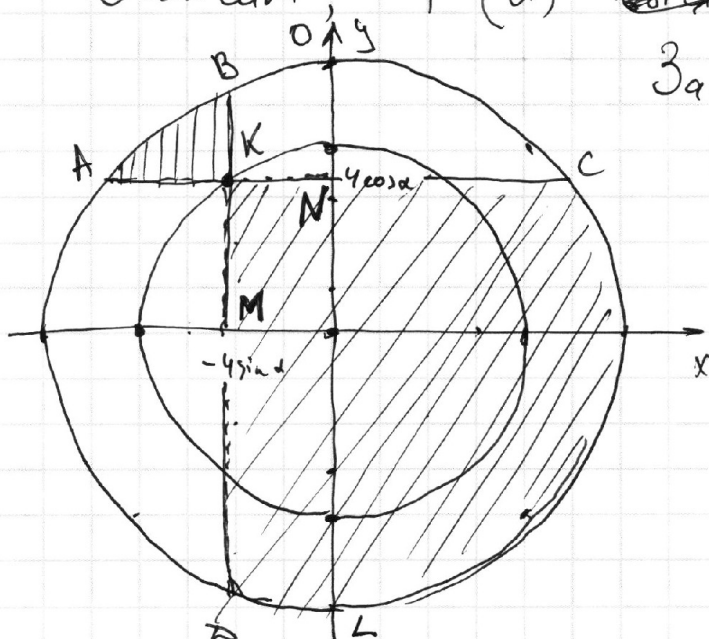
(точка пер-я прямых $(-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$ и граница включается)

При этом все такие точки $(-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$ лежат на окружности с центром $(0; 0)$ и $R = 4$ (в силу ОТТ: $(4\sin\alpha)^2 + (4\cos\alpha)^2 = 4^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4^2$)

Значит, $\varphi(\alpha)$ ~~тогда~~ имеет вид:

Заметим, что (пусть $|UAB|$ — длина дуги AB)

$$\begin{aligned} |UAB| + |UCL| &= \\ &= |UAD| - |UBD| + |UCL| + |UDL| = \\ &\quad \left(\text{но в силу симметрии } |UBD| = |UDL| \right) \\ &= |UAD| + |UCL| = \\ &= |UOC| + |UCL| = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R = 6\pi \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a \quad \text{сe } 10; 19; 21; 31; 41; 51; 61; 71; 81; 91$$

$$B =$$

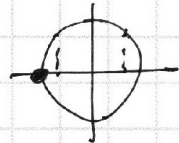
$$ABC = \overline{aaaa} \cdot B \cdot C$$

$$3 - 3x + 6u = 1 + x + 2k$$

$$2 + 6u - 2k = 4x$$

$$x =$$

$$a \cdot 1111 = 1111$$



$$\cos(\pi y - x)$$

$$= \cos 2\pi y \cdot \cos x + \sin 2\pi y \sin x$$

$$\cos x = -1$$

$$\sin x = 0$$

$$\cos(2\pi y - \pi) =$$

$$= \cos 2\pi y \cdot \cos \pi$$

$$1 - x + 2u = \frac{1 + x + 2k}{3}$$

$$\arccos \frac{x}{7} > \arccos \frac{y}{4} + \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$$

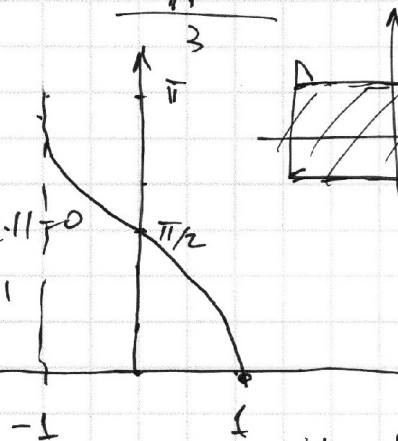
$$3 - 4y \leq -11 - x \leq 4$$

$$-4 \leq -9 - x \leq 4$$

$$-4 \leq -9 - x \leq 4$$

$$k^2 - k + 2 \cdot 11 = 0$$

$$k^2 - k + 22 = 0$$



$$y = \frac{1+x+2k}{3}$$

$$4 \sin \alpha = 6$$

$$4 \cos \alpha = 6$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{2}$$

$$k = 1$$

$$\frac{x+5}{3} = \frac{x}{3} + 1$$

$$k = 2$$

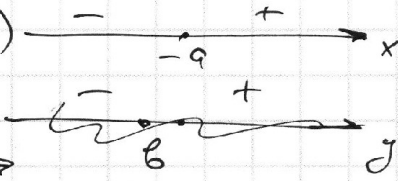
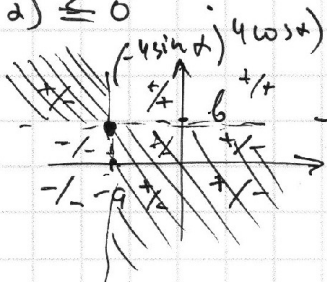
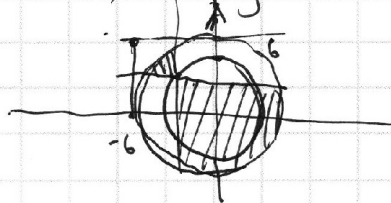
$$\frac{x+5}{3}$$

$$(x+a)(y-b) \leq 0$$

$$a^2 + b^2 = 16$$

$$(x+4 \sin \alpha)(y-4 \cos \alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 36$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy$$

$$x^3 - y^3 - 12(x-4)(y+4) = x^3 - y^3 - 12x$$

$$\arccos \frac{1}{4} > \arcsin \frac{y}{4} - \frac{\pi}{2} = -\arccos \frac{y}{4}$$

$$\arccos \frac{x}{7} > \arccos \frac{y}{4}$$

Пусть n — отрицательная степень $\arccos$.

$$P(n) = \frac{(n-2)(n-3)}{C_n^4}$$

$$= \frac{n!}{n(n-1)(n-4)! \cdot C_n^4}$$

$$P(k) = \frac{n!}{n \cdot (n-1)(n-k)! \cdot C_n^k} = \frac{11(n-2)(n-3)}{C_n^4} = \frac{11n!}{n(n-1)(n-4)! \cdot C_n^4}$$

$$(n-4)! \cdot C_n^4 = 11 C_n^k \cdot (n-k)!$$

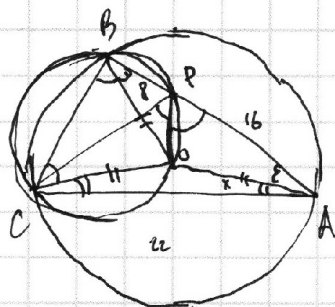
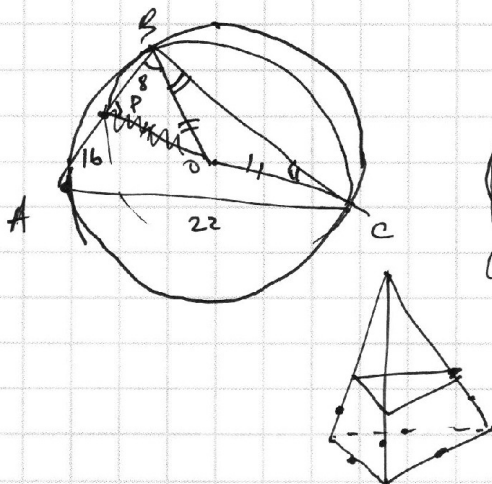
$$\frac{(n-4)! \cdot n!}{(n-4)! \cdot 4!} = \frac{11 \cdot n!}{(n-k)! \cdot k! \cdot (n-k)!}$$

$$P(n) = \frac{n!}{n \cdot (n-1)(n-4)! \cdot C_n^4}$$

$$P(k) = \frac{n!}{n \cdot (n-1)(n-k)! \cdot C_n^k}$$

$$11 P(n) = P(k) \quad - 12 \cdot 4y + y^2$$

$$\frac{11n!}{n(n-1)(n-4)! \cdot C_n^4} = \frac{n!}{n(n-1)(n-k)!}$$



$$16 \cdot (16+8) = x \cdot 22$$

$$16 \cdot 24 = x \cdot 22$$

$$x = \frac{8 \cdot 24}{11}$$

$$24(16+8y+y^2)(4xy) =$$

$$= 4^3 + 2 \cdot 4^2 y + 4y^2 + 4^2 y + 2 \cdot 4y^2 + y^3$$

$$= 4^3 + y^3 + 3 \cdot 4^2 y + 3 \cdot 4y^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

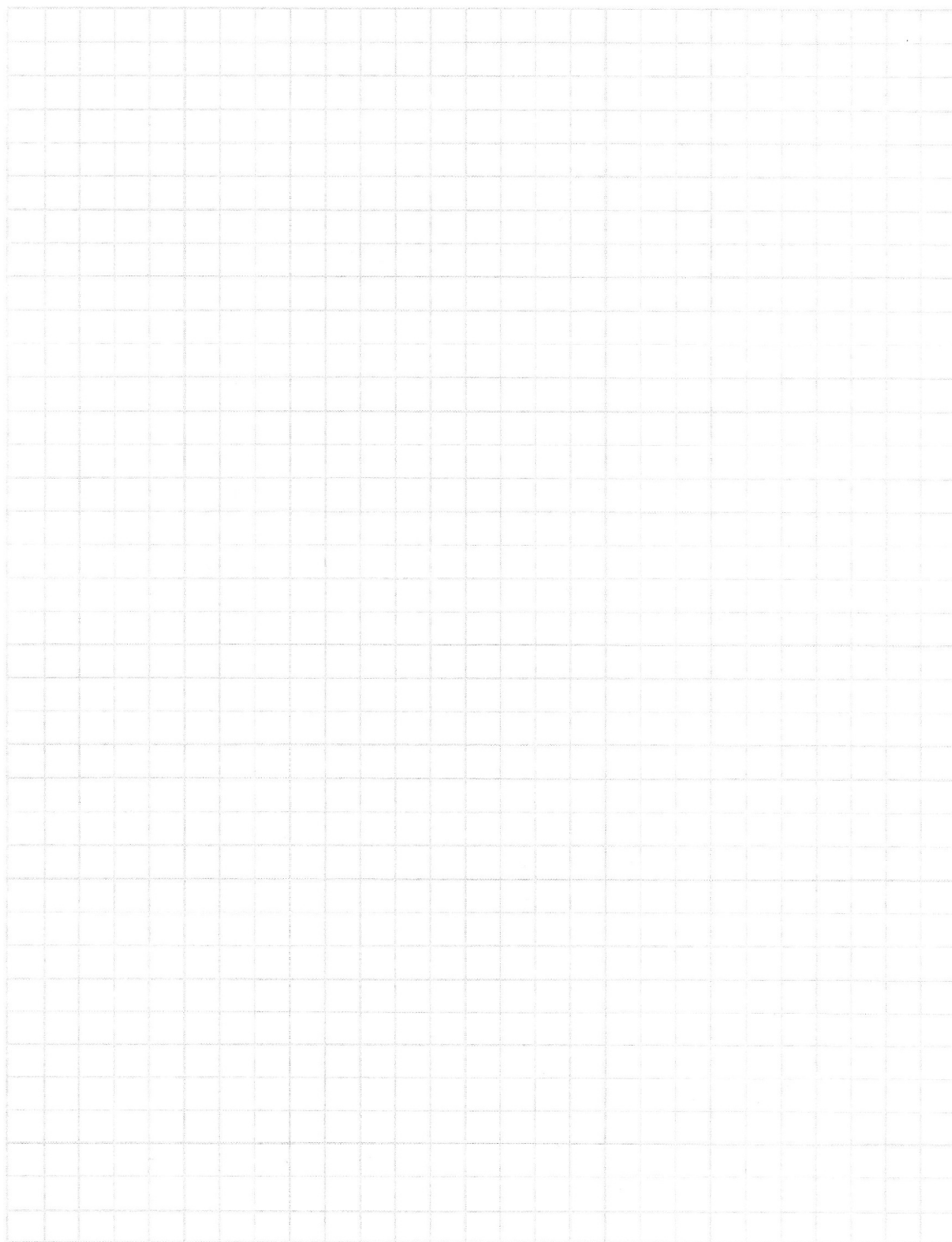
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



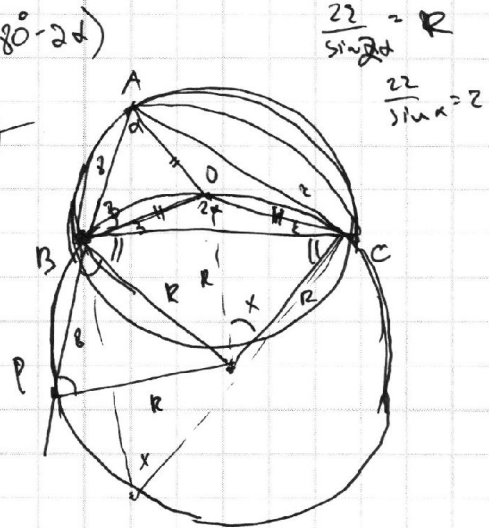
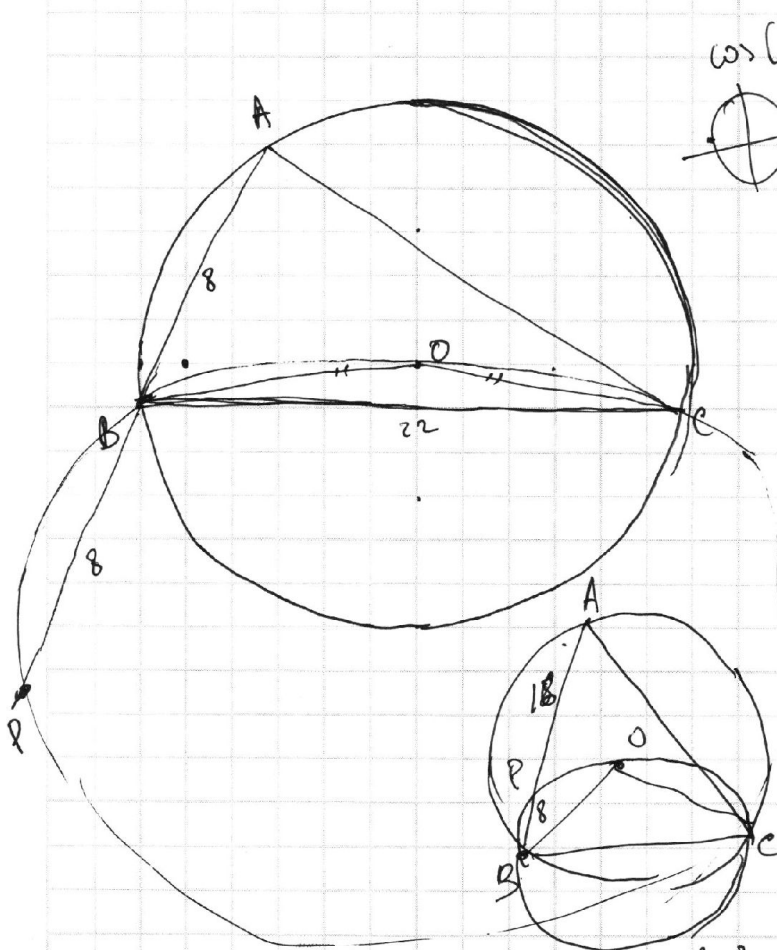


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{22}{R} = \frac{22 \sin 2\alpha}{\sin \alpha \cdot 22}$$

$$= 2 \cos \alpha$$

$$22 = 2 \cos \alpha R$$

$$2\alpha + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 2\alpha$$

$$2\alpha$$

$$22^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha$$

$$R^2 \cdot 4 \cos^2 \alpha = 2R^2 (1 - \cos \alpha)$$

$$1 - 2\cos^2 \alpha + 1 \quad 2 \cos^2 \alpha = (1 - \cos \alpha)$$

$$\cos \alpha = -\cos 2\alpha$$

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha - 1$$

$$R^2 = R^2 + 22^2 - 2 \cdot 22 \cdot R \cos \alpha$$

$$22 = 2R \cos \alpha$$

$$BC^2 = 22^2 (1 - \cos 2\alpha)$$

$$22^2 = 22^2 + 8^2 - 2 \cdot 22 \cdot 8 \cdot \cos \beta$$

$$22 \cdot 8 \cos \beta = 8^2$$

$$22 \cos \beta = 8$$

$$2 \cos \beta = 4$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = R = 4$$

$$R^2 = R^2 + 8^2 - 2 \cdot R \cdot 8 \cos (180^\circ - \alpha - \beta)$$

$$R \cos (180^\circ - \alpha - \beta) = 4$$

$$-R \cos (\alpha + \beta) = 4$$

$$\frac{R (\cos \alpha + \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta)}{2 \cos \alpha \cos \beta} = -1$$

$$\frac{1}{2} - \tan \alpha \tan \beta = -1$$

$$\alpha + \beta = \frac{8(8-m)}{2} + \frac{8m}{8} \quad \tan \alpha \tan \beta = \frac{9}{2}$$

$$\frac{22^2}{8^2} = \frac{22^2}{8^2} = \frac{7}{m}$$