

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
- $$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1 Задача 1, что $A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$. $a \in \{1; 9\}$, $a \in \mathbb{N}$

значит, $A \equiv 0 \pmod{11}$. $A - B \cdot C = k$, где $k \in \mathbb{N}$,

значит, B или C делится на 11. c - кратное 101 (но т.к. c - губиничное число $\Rightarrow B \equiv 101$)

B - трехзначное и кратно 11. Число 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909. $B = 707$.

$$A - B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot C = 101^2 \cdot aC \cdot 11 \cdot 7$$

a - цифра, отличная от 0. c - губиничное число и кратно 11. $c = 10, 11, 12, \dots, 18, 19$, $\text{или } c = 21, 31, 41, \dots, 91$

- ① $a=1 : C : 77 \not\models$
- ② $a=2 : C : 277 \not\models$ - (т.к. $aC \cdot 11 \cdot 7$ - двузначное число)
- ③ $a=3 : C : 11 \cdot 7 \cdot 3 \not\models$ недостаточно
- ⋮ $\not\models$ т.к. c - губиничное
- ⑦ $a=7 : C : 11$ и 11 является полным квадратом $\Rightarrow C = 11$
- ⑧ $\not\models$
- ⑨ $\not\models$

Ответ: $(7777; 707; 11)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{xy} = k = \frac{1}{x+4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x+4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x+4)(y+4)}$$

$$① \quad x+y+3=0$$

$$x+y = -3$$

∅ m.k.

$$② \quad x+y+3 \neq 0 \quad \text{т.ч. } x>0, y>0$$

$$x>0, y>0$$

$$\begin{cases} xy = (x-4)(y+4) \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ky = xy + 4x - 4y - 16 \\ x \neq 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y = 4 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4+y \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Подставляем в $M = x^2y^3 - 12xy =$

$$= (4+y)^3 - y^3 - 12(4+y)y = 4^3 + 3 \cdot 4^2 y + 3 \cdot 4 y^2 - 12 \cdot 4 y - 12 y^2$$

$$= 4^3. \quad \text{Значит, } M = 4^3 \quad \text{при всех } \begin{array}{l} x \neq 4 \\ x+y > 0 \end{array}$$

Ответ: $4^3 = 64$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 а)

$$\sin \pi y (\sin \pi y - \sin \pi x) = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi y \cdot \sin \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$-\cos 2\pi y = \cos(\pi y + \pi y - \pi x)$$

$$\cos(2\pi y - \pi) = \cos(\pi(y-x))$$

$$2\pi(y-1) = \pm \pi(y-x) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2y-1 = y-x+2n \\ 2y-1 = x-y+2k \end{cases} \quad | \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} y = 1-x+2n \\ 3y = 1+x+2k \end{cases} \quad | \quad n, k \in \mathbb{Z} \quad \begin{cases} y = (-x+2n)/3 \\ y = (1+x+2k)/3 \end{cases} \quad | \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(t; 1-t+2n); (t; \frac{1+t+2k}{3})$,
где $t \in \mathbb{R}; n, k \in \mathbb{Z}$

5) $\arccos \frac{x}{7} + \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{y}{4} > 0$

$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0, \text{ значит, пер-во}$$

действие

влияет при
всех допустимых x и y

$$\text{и кроме } \begin{cases} \arccos \frac{x}{7} = 0 \\ \arccos \frac{y}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{7} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \\ x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -7 \leq x < 7 \\ a-4 \leq y < 4 \end{cases}$$

(1)

$$y = 1 - x + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-9 \leq 1 - x + 2n < 4$$

Всего таких задач $\frac{1}{2}(7-(-7)) = 11$

$$n = -6: \quad y = 1 - x + 12 = 13 - x$$

$$\begin{cases} y = -4 \\ x = -4 \end{cases} \quad y \in [-4; 4] \quad \text{только при}$$

$$n = -5: \quad y = 1 - x + 10 = 11 - x$$

$$-4 \leq -9 - x < 4$$

$$-13 \leq x < -5$$

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = -4 \end{cases}; \begin{cases} x = -6 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = -7 \\ y = -2 \end{cases} \quad 3 \text{ нпр}$$

$$n = -4: \quad y = 1 - x - 8 = -7 - x$$

$$-4 \leq -7 - x < 4$$

$$-10 \leq x \leq -3$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -4 \end{cases}; \begin{cases} x = -5 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -7 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -7 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -7 \\ y = 1 \end{cases} \quad -5 \text{ нпр}$$

$$n = -3: \quad y = 1 - x - 6 = -5 - x$$

$$-4 \leq -5 - x < 4$$

$$-9 \leq x \leq -1$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -4 \end{cases}; \begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}; \begin{cases} x = -5 \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = -6 \\ y = 1 \end{cases}; \begin{cases} x = -7 \\ y = 2 \end{cases} \quad -7 \text{ нпр}$$

$$n = -2: \quad y = 1 - x - 4 = -3 - x$$

$$-4 \leq -3 - x < 4$$

$$-7 \leq x \leq 1$$

$$x = 1 \quad x = 0 \quad x = -1 \quad x = -2 \quad x = -3 \quad x = -4 \quad x = -5 \quad x = -6$$

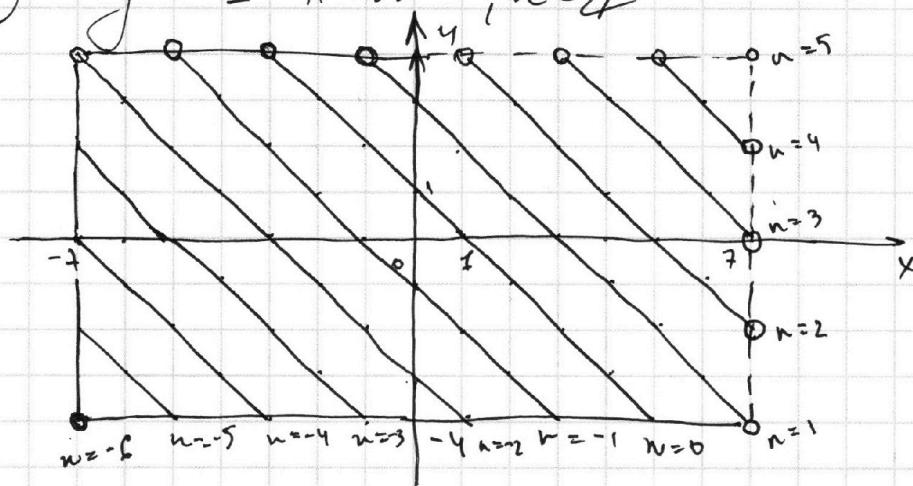
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

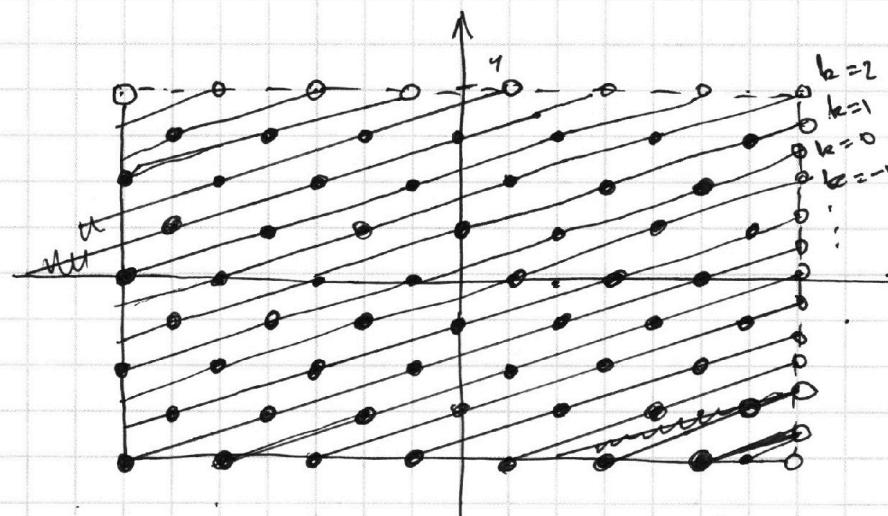
1) $y = 1 - x + 2n$, $n \in \mathbb{Z}$



Всего
членов
пар 3⁷ = 2187

(т.е. кол-во
точек с
членами
координаты-
ми) - 56

2) $y = \frac{1+x+2k}{3}$



Засчитано,
так как все
этот пары
условий
выполнены

Более
исчислений
не сн. ①

Ответ: 56



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4) Пусть однодневных билетов было n . Тогда
А билетов было $\binom{n}{k}$ штук

$$P(\text{б. пасаж}) = P(n) = \frac{n!}{(n) \cdot (n-1) \cdot (n-4)! \cdot C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3)}{C_n^4}$$

$$P(\text{б. штук}) = P(k) = \frac{n!}{n \cdot (n-1) \cdot (n-k)! \cdot C_n^k}$$

Из пр. по упр. II) $P(n) = P(k)$

$$\frac{n!}{n(n-1)(n-4)! \cdot C_n^4} = \frac{n!}{n(n-1)(n-k)! \cdot C_n^k}$$

$$(n-k)! \cdot C_n^k = (n-4)! \cdot C_n^4$$

$$\frac{(n-k)! \cdot h!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{(n-4)! \cdot n!}{(n-4)! \cdot 4!}$$

$$\frac{h!}{k!} = \frac{1}{4!}$$

$$h! = 1 \cdot 4!$$

$$P(H) = P(\text{б. пасаж}) = \frac{C_{n-2}^{4-2}}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{n-2!}{(n-4)! \cdot 2!}}{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}} =$$

$$= \frac{(n-2)! \cdot (n-4)! \cdot 4!}{(n-4)! \cdot 2! \cdot n!} = \frac{(n-2)! \cdot 3 \cdot 4}{n!}$$

$$P(k) = P(\text{б. штук}) = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{М.н. } \Pi P(n) = P(k)$$

$$\Pi \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{k-2}{n-2}}{\binom{k}{n}}$$

$$\Pi \cdot \binom{n}{n-2} = \binom{n}{k} = \binom{n}{4} \cdot \binom{k-2}{n-2}$$

$$\Pi \cdot \frac{(n-3)!}{(n-4)! 2!} \cdot \frac{n!}{(n-k)! k!} = \frac{n!}{(n-4)! 4!} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-k+2)! (k-2)!}$$

~~$$2 \cdot \frac{11}{(n-k)! k!} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (n-4)! \cdot (k-2)!$$~~

~~$$2 \cdot 11 \cdot (n-4)! \cdot (k-2)! = (n-k)! k!$$~~

~~$$12 \cdot 11 = (n-k-3)(n-k-2)(n-k-1)(n-k)(k-1) \cdot k$$~~

$$\frac{11}{2 \cdot k!} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (k-2)!}$$

$$12 \cdot 11 = (k-1)k, \quad \text{м.н. } k \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} k = 12 \\ k = -11 \end{cases} \quad \emptyset$$

Ответ: 12



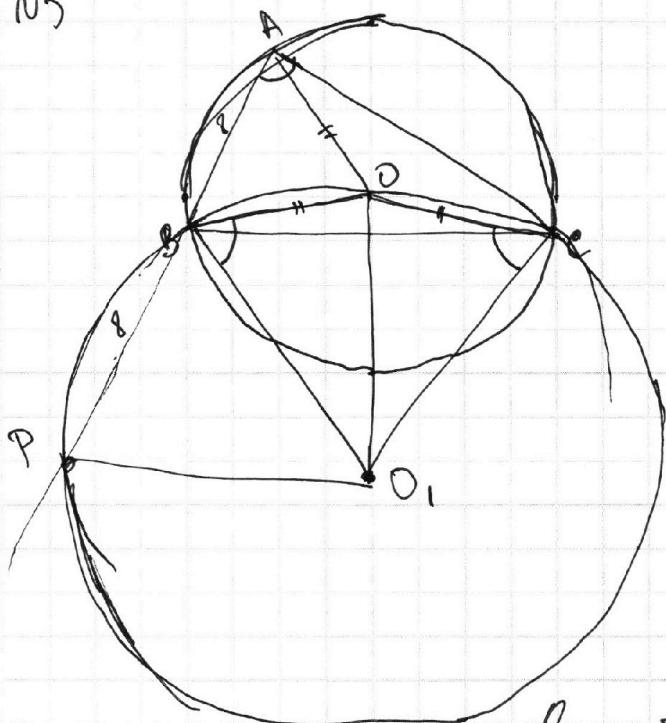
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5



Рассмотрим четырехугольник ABCP.
 $\angle BOC = \alpha$. $AO = BO = OC = R$

$$\angle BAC = \alpha. AO = BO = OC = R$$

В четырехугольнике ABCP
 $\angle BAC = \alpha$, $\angle BOC = \alpha$, $\angle BCP = \angle CAP = \alpha$
 т.к. $\angle BOC$ - центральный
 $\angle BOC = 2\alpha$

т.к. $\angle BPC$ - внешний \Rightarrow

$$\Rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$$

По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$$\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R \quad ; \quad \triangle BOC: \frac{BC}{\sin 2\alpha} = 2R$$

$$\frac{BC}{R} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = 2 \cos \alpha$$

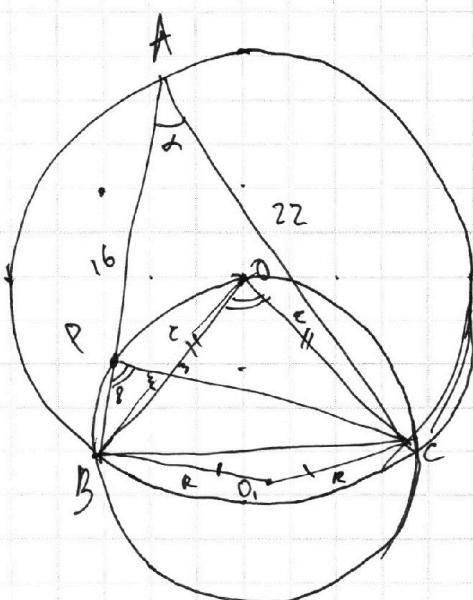
По теореме косинусов в $\triangle ABC$:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cos \alpha$$

$$= 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \alpha \approx 4$$

$$\triangle BOC: BC^2 = 2R^2 (1 - \cos 2\alpha)$$

$$2R^2 = \frac{16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \alpha}{2(1 - \cos 2\alpha)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Delta BPC: BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2 \cdot BP \cdot PC \cos 2\alpha = \\ = 8^2 + PC^2 - 2 \cdot 8 \cdot PC \cdot \cos 2\alpha \quad (2)$$

$$\Delta APC: PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos 2\alpha = \\ = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos 2\alpha \quad (3)$$

как центральный угол ω_2

$$\angle BO_1C = 2(180^\circ - 2\alpha) = 360^\circ - 4\alpha$$

$$\angle OBO_1 = \angle OBC + \angle CBO_1 = \cancel{2} \angle DCB + \angle BCO_1 = \\ = \angle OCO_1$$

$$\text{б) } OBO_1: \angle OBO_1 = \frac{360 - \angle BO_1C - \angle BOC}{2}$$

$$= \frac{4\alpha - 2\alpha}{2} = \alpha$$

~~Мы можем записать~~ $\angle BOC = 2\pi - \angle BOC = 2\pi - 2\alpha$

$$\Rightarrow \angle BOC = 2\pi - 2\alpha \quad (\angle BOC)$$

~~$\angle BOC = 2\sin^2 \alpha = 2\alpha$~~

Решиваем (1) и (3) по (2)

$$2\alpha^2(1 - \cos 2\alpha) = 8^2 + 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos 2\alpha - 2 \cdot 8 \cdot PC \cos 2\alpha$$

Деление выражения на $\cos 2\alpha$ (здесь $\cos 2\alpha \neq 0$)

$$\frac{2\alpha^2}{\cos 2\alpha} = \frac{8^2 + 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

Выразим $\cos 2\alpha$ через α .

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Найдём длины BD и AC . Решаем $4 \sin \alpha = a$
 $4 \cos \alpha = b$

$BN = \sqrt{36 - a^2}$ $BN = \sqrt{36 - a^2}$ (н.к. т.о. $A, B, C, D \in \text{окр-щ}$)

$DN \parallel$

$AN = NC = \sqrt{36 - b^2} = \sqrt{36 - (4^2 - a^2)} =$
 $= \sqrt{36 - 16 + a^2} = \sqrt{20 + a^2}$

Докажем $\exists a \geq 0$ $f(a) = BD + AC = 2BN + 2NC =$

 $= 2 \left(\sqrt{36 - a^2} + \sqrt{20 + a^2} \right)$
 $f'(a) = 2 \left(\sqrt{36 - a^2} + \sqrt{20 + a^2} \right)' = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{36 - a^2}} \cdot (-2a) + \frac{2 \cdot 2a}{\sqrt{20 + a^2}} =$
 $= 2a \left(\frac{1}{\sqrt{20 + a^2}} - \frac{1}{\sqrt{36 - a^2}} \right) = 2a \frac{\sqrt{36 - a^2} - \sqrt{20 + a^2}}{\sqrt{20 + a^2} \cdot \sqrt{36 - a^2}} =$
 $= 2a \frac{36 - a^2 - 20 - a^2}{(\sqrt{20 + a^2} + \sqrt{36 - a^2}) \sqrt{20 + a^2} \sqrt{36 - a^2}} =$

$= 2a \frac{(16 - 2a^2)}{(\sqrt{20 + a^2} + \dots) \sqrt{20 + a^2} \sqrt{36 - a^2}}$

Значит, $f(a)$ max при $a = \pm 2\sqrt{2}$
 $f(\pm 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{28} = 8\sqrt{7}$ (смешанное норм.)

Решаем $4 \sin \alpha = a$

Одн.: $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ т.к. $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Макс. $f_{\max} = 6\pi + f(\pm 2\sqrt{2}) = 6\pi + 8\sqrt{7}$ при $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{NB} \quad \left\{ \begin{array}{l} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0 \quad (1) \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{имеет вид} \\ \text{окруженность с центром} \\ \text{в } O(0,0) \text{ и } R=6 \end{array}$$

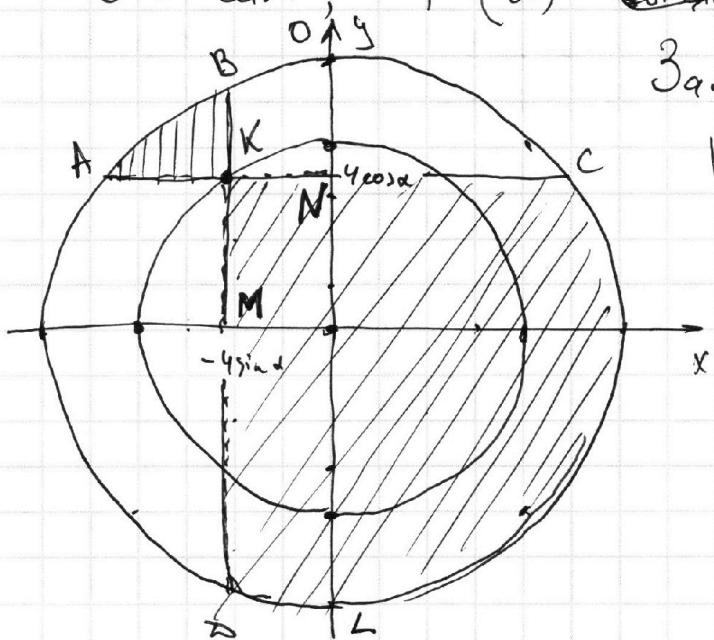
(1) Рассмотрим арифметический вид:

т.е. делит плоскость на 4 и подходит нам только закрашенные части областей (также первая координата $-4\sin\alpha$, вторая $4\cos\alpha$)

При этом все точки $(-4\sin\alpha, 4\cos\alpha)$ лежат на окружности с центром $O(0,0)$ и

$$x = 4 \quad (B \text{ иду OTT: } (4\sin\alpha)^2 + (4\cos\alpha)^2 = \\ = 4^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4^2)$$

Значит, $\varphi(\alpha)$ имеет вид:



Значит, что $|UAB| + |UCD| =$

$$= |UAO| - |UBO| + |UCO| + |ODL| = \\ = |UAO| - |UBO| + |UCO| + |ODL| = \\ (\text{но в силу симметрии} \\ |UBO| = |ODL|)$$

$$= |UAO| + |UCO| = \\ = |UOC| + |UCO| = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R = 6\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a \quad \text{с} \in [10; 19], 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91$$

$B =$

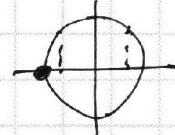
$$ABC = \overline{aaaa} \cdot B \cdot C$$

$$3 - 3x + 6u = 1 + x + 2k$$

$$2 + 6u - 2k = 4x$$

$$x = \cancel{u}$$

$$\begin{aligned} a \cdot \overline{1111} &= \frac{\overline{101}}{\overline{101}} \cos(2\pi y - x) \\ &= \frac{a \cdot \overline{11101}}{1111} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos(\omega t + 2\pi y - x) &= \cos 2\pi y \cdot \cos x + \sin 2\pi y \sin x \\ \cos x &= -1 \\ \sin x &= 0 \end{aligned}$$

$$1 - x + 2u = \frac{1 + x + 2k}{3}$$

$$\arccos \frac{x}{7} > \arcsin \frac{4}{7} + \frac{\pi}{2}$$

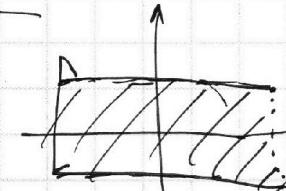
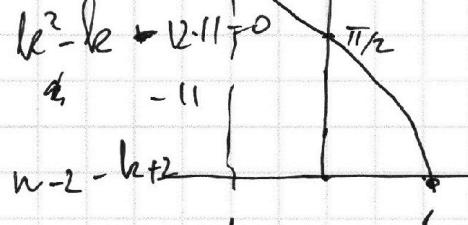
$$\arccos \frac{x}{7} + \arcsin \frac{4}{7} > 0$$

$$3 - 4 \leq -11 - x \leq 4$$

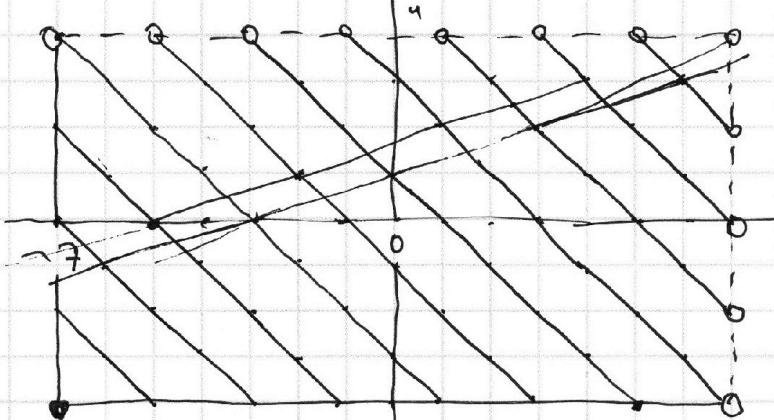
$$< x \leq -7$$

$$-4 \leq -9 - x \leq 4$$

$$< x \leq -5$$



$$y = \frac{1 + x + 2k}{3}$$



$$4 \sin \alpha = 6.56$$

$$\begin{aligned} 4 \cos \alpha &= 6 \\ \sin \alpha &= \frac{3}{2} \\ \cos \alpha &= \frac{3}{2} k \\ k &= 1 \end{aligned}$$

$$\frac{x+3}{3} = \frac{x+1}{3}$$

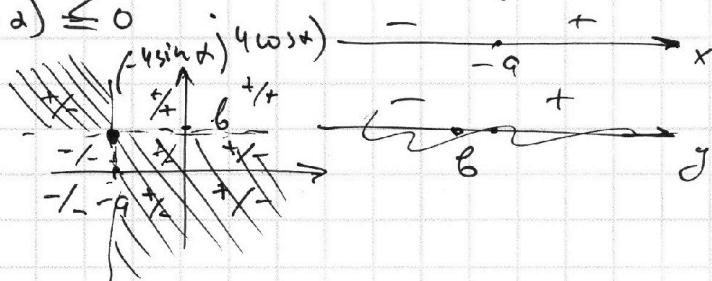
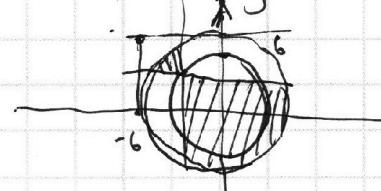
$$k = 2$$

$$\frac{x+5}{3}$$

$$(x+9)(y-6) \leq 0$$

$$a^2 + b^2 = 16$$

$$\begin{cases} (x+4 \sin \alpha)(y-4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x+y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy \quad \text{① } x+y+3 \neq 0$$

$$x^3 - y^3 - 12(x-4)(y+4) = x^3 - y^3 - 12x$$

$$\arccos \frac{1}{4} > \arcsin \frac{4}{4} - \frac{\pi}{2} = -\arccos \frac{4}{4}$$

Множ. N \neq задача из начальной класс.

$$\frac{x+y+3}{14} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$\begin{aligned} 4y &= xy + 4x - 4y - 16 \\ 4(x-y) &= 16 \\ x-y &= 4 \end{aligned}$$

$$\frac{n!}{C_n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} \cdot C_n^k \quad x=4+y$$

$$P(k) = \frac{n!}{n \cdot (n-1) \cdot (n-k)! \cdot C_n^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{C_n^k} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{n \cdot (n-1) \cdot (n-k)! \cdot C_n^k}$$

$$\text{так} \quad (n-k)! \cdot C_n^k = n! C_n^k \cdot (n-k)!$$

$$\frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{так}$$

$$P(k) = \frac{n!}{n \cdot (n-1) \cdot (n-k)! \cdot C_n^k} \quad \text{так} \quad k! = 11 \cdot 4!$$

$$P(k) = \frac{n!}{n \cdot (n-1) \cdot (n-k)! \cdot C_n^k}$$

$$\begin{aligned} P(H) &= P(k) \\ \frac{n!}{n(n-1)\dots(n-k)! \cdot C_n^k} &= \frac{n!}{n(n-1)\dots(n-k)!} \end{aligned}$$

$$16 \cdot (16+8) = x \cdot 22$$

$$16 \cdot 24 = x \cdot 22$$

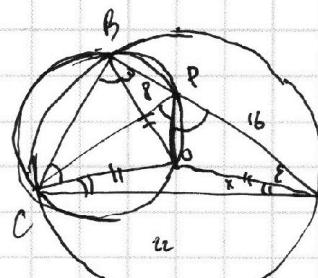
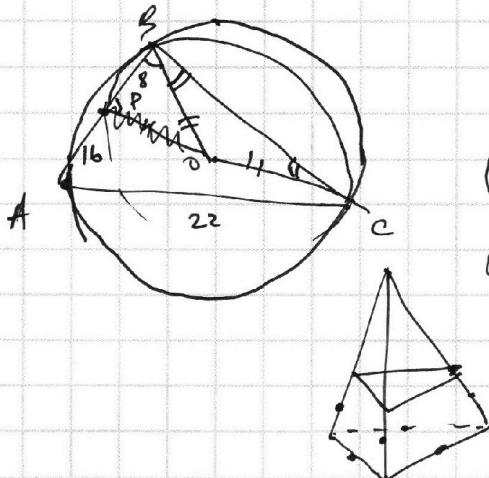
$$x = 8 \cdot 24$$

$$24((16+8y+y^2)(4xy) -$$

$$= 4^3 + 2 \cdot 4^2 y + 4y^2 +$$

$$+ 4^2 y + 2 \cdot 4 y^2 + y^3$$

$$= 4^3 + 4^3 + 3 \cdot 4^2 y + 3 \cdot 4 y^2$$



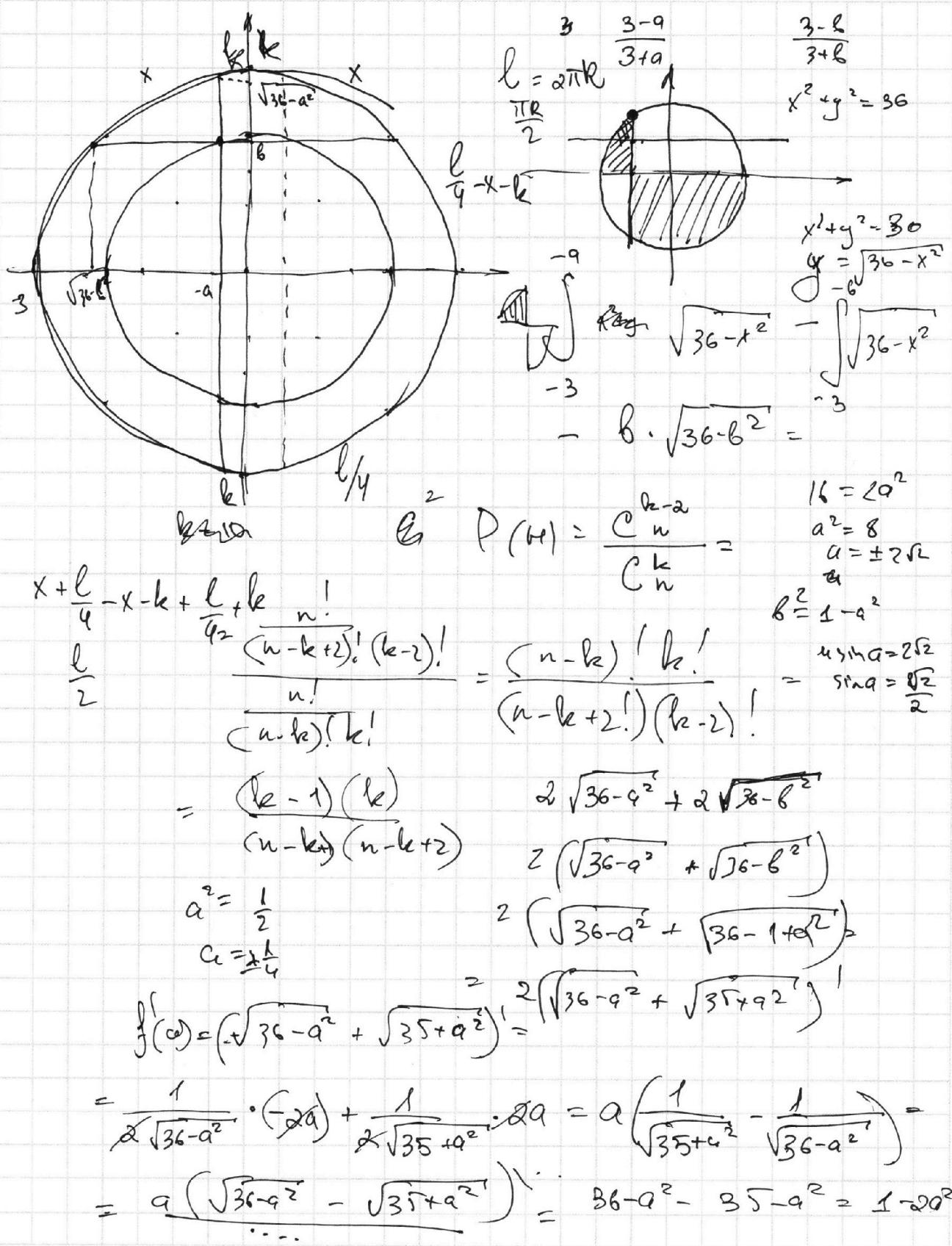
$$= 4^3 + 4^3 + 3 \cdot 4^2 y + 3 \cdot 4 y^2$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Diagram illustrating the geometry of the problem:

- Left diagram: A circle with center O and radius R. Points A, B, C are on the circumference. Chords AB and BC are both labeled 8. Angle AOB is labeled α . A line segment from O to point P on the circle is labeled 22. A small circle with center O' is shown near the top left.
- Middle diagram: A larger circle with center O. Points A, B, C are on the circumference. Chords AB and BC are both labeled 8. Radii OA and OC are labeled R. A point P is on the circle such that OP = 22. A horizontal line through P intersects the circle at points M and N. Chords AM and CN are labeled R. A vertical chord PC is also labeled R. Angles α , 2α , x , and $2x$ are indicated.
- Bottom diagram: A circle with center O. Points A, B, C are on the circumference. Chords AB and BC are both labeled 8. Radii OA and OC are labeled R. A point P is on the circle such that OP = 22. A horizontal line through P intersects the circle at points M and N.

Given: $\omega \approx (180^\circ - 2\alpha)$

Calculation steps:

- $\frac{22}{\sin 2\alpha} \approx R$
- $\frac{22}{\sin x} \approx 2$
- $R = \frac{22 \sin 2\alpha}{\sin x} \approx 2 \cos \alpha$
- $x = 180^\circ - 2\alpha$
- $2x + x = 180^\circ$
- $x = 180^\circ - 2\alpha$
- $2x = 180^\circ - 2\alpha$
- $\cos x = \frac{\sin 2\alpha}{2}$
- $\cos x = \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{2}$
- $\cos^2 x = \frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{2}$
- $2 \cos^2 \alpha = \sqrt{2} \cos x$
- $\sqrt{2} \cos x = \sqrt{2}(\sqrt{1 - \cos^2 x})$
- $\sqrt{2} \cos x = \sqrt{2}(1 - \cos^2 x)$
- $\sqrt{2} \cos x = \sqrt{2} \sin^2 x$
- $\sqrt{2} \sin^2 x = \sqrt{2} \cos x$
- $\sin^2 x = \cos x$
- $1 - \cos^2 x = \cos x$
- $\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$
- $(\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$
- $\cos x = -1 \quad \text{or} \quad \cos x = 1$
- $\cos x = -1 \Rightarrow x = 180^\circ$
- $\cos x = 1 \Rightarrow x = 0^\circ$
- $180^\circ - 2\alpha = 0^\circ \Rightarrow 2\alpha = 180^\circ$
- $\alpha = 90^\circ$
- $R = \frac{22 \sin 180^\circ}{\sin 0^\circ} = \infty$

Final result:

$$\frac{x}{y} = \frac{2(2-x)}{x}$$