



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 1

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
  - $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
  - $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 1, а  $y$  — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 3xy$ .
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{15}{2}$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 9$ .
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$$A = \overline{xxxx} \quad \text{Заметим, что } A \text{ делится на 1111, т.к.}$$

$$A = x \cdot 1111$$

$$1111 = 11 \cdot 101 \quad \text{Значит } A \cdot B \cdot C : 1111, \text{ т.к. это квадрат, то}$$

$$A \cdot B \cdot C : 1111^2 \quad (\text{т.к. } ABC : 11, 101 - \text{простые числа})$$

$$A = 1111 \cdot x, 0 < x \leq 9 \Rightarrow x \neq 11, 101$$

$$\text{Значит } B \cdot C : 11, 101$$

Т.к. это простые числа, то либо  $B$ , либо  $C$  делится на 101.

$$C - \text{двузначное число} \Rightarrow C : 101 \Rightarrow B : 101$$

Пусть  $B : 11$ , тогда  $B \geq 11 \cdot 101 = 1111$ , но  $B$ -трёхзначное - это неверно.

Тогда  $C : 11$ .  $B$ -трёхзначное, делится на 101  $\Rightarrow$  одна из цифр равна 2

$$\Rightarrow B = 202 \quad (B = y \cdot 101, 0 < y < 10 \Rightarrow B = 101, 202, 303, \dots, 909 - \text{то есть кроме 202}$$

*и 202*

$C : 11$ , двузначное, одна из цифр 3.  $\Rightarrow C = 33$ , ( $C = z \cdot 11, 0 < z < 10, C = 11, 22,$

$33, \dots, 99$  -  $\text{без 202 кроме}$

$$A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot x \cdot 101 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 = 1111^2 \cdot x \cdot 2 \cdot 3 = 2x^2 \quad 33 \text{ не подходит}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x : 2, 3, x < 10 \Rightarrow x = 6 - \text{единственная варианта}$$

Ответ: (6666, 202, 33)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad | \cdot xy(x-1)(y+1)$$

$$xy^2 - y^2 + xy - y + x^2y - xy + x^2 - x + 2xy - 2y + 2x - 2 = xy^2 + xy + x^2y - xy + 2xy$$

$$x^2 + x - y^2 - 3y - 2 = 0$$

Решим кв. ур-е отн.  $x^2$ 

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(y^2 + 3y + 2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4y^2 + 12y + 9}}{2} = \\ = \frac{-1 \pm \sqrt{(2y+3)^2}}{2} = y+1, -y-2$$

$$(x - y - 1)(x + y + 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = y+1 & 1) \\ x = -y-2 & 2) \end{cases}$$

$$1 \text{ случай } x = y+1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3y^2 - 3y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

$$2 \text{ случай } x = -y-2$$

$$y > 0 \text{ по условию} \Rightarrow -y < 0, -y-2 < 0$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = -y^3 - 3y^2 - 3y$$

Невозможно.

Значит  $M = 1$ , получается что  
единственное возможное

Ответ: 1





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

↑

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

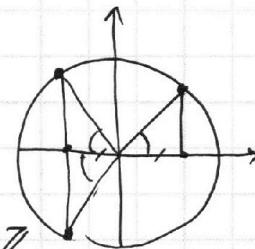
$$0 = (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) + (\cos \pi x \cdot \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y)$$

$$\cos(2\pi x) + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$\cos(2\pi x) = -\cos(\pi x + \pi y)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi x + \pi x + \pi y = \pi + 2\pi k \\ 2\pi x - \pi = \pi x + \pi y + 2\pi k \end{array} \right. , \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 1 + 2k \\ x - y = 1 + 2k \end{array} \right.$$



то есть подходит пары  $x, y$

$$(x, 1+2k-3x)$$

$$(x, x-1-2k) \quad \text{где } x - \text{ любая}, \text{ а } k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $(x, 1+2k-3x); (x, x-1-2k)$ ,  $x - \text{ любая}, k \in \mathbb{Z}$

б)

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

Тогда  $\frac{x}{5} \leq 1, \frac{y}{4} \leq 1$

Значит,  $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{\pi}{2}$

Значит,  $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$ , причём равенство только при

$$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \text{ и } \arccos \frac{y}{4} = \pi$$

Подходит любые  $x, y$ , исключение под ОДЗ и условие из а), ↗

кроме таких (одновременно)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА  
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\boxed{-5 \leq x \leq 5} \quad \boxed{-4 \leq y \leq 4} \quad \text{ODЗ}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi$$

$$y = 1 + 2k - 3x$$

 $\uparrow$ 

$$y = x - 1 - 2k$$

$$\frac{x}{5} = 1$$

 $\uparrow$ 

$$x = 5$$

$$\frac{y}{4} = -1$$

 $\uparrow$ 

$$y = -4$$

$$\begin{array}{c} x / -5 \quad -4 \quad -3 \quad -1 \\ \cancel{y_1} \quad \cancel{y_2} \\ y = 1 + 2k - 3x \\ \cancel{y_1} \quad \cancel{y_2} \\ \text{нек} \quad \text{нек} \\ 16 \quad 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} x \quad -5 \quad -4 \\ \cancel{y_1} \quad -4, -2, 0, 2, 4 \\ \cancel{y_2} \quad -3, -1, 1, 3 \\ \text{нек} \quad \text{нек} \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} 5 \\ -2, 0, 2, 4 \end{array}$$

При  $x$ -целое,  $y$ -любое действ.

при  $x$ -целое,  $y$ -любое действ., в ОДЗ

$$x = -5, -3, -1, 1, 3, \dots \quad y = -4, -2, 0, 2, 4 \quad 5 \cdot 5 = 25 \text{ пар}$$

$$x = -4, -2, 0, 2, 4 \quad y = -3, -1, 1, 3 \quad 5 \cdot 4 = 20 \text{ пар}$$

$$x = 5 \quad y = -2, 0, 2, 4$$

4 пары

(т.к.  $x=5$  и  $y=4$  не подходят, ~~так как~~ будет одна ошибка)

Общ.: 49 пар.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Пять  $x$  одиннадцатаклассников

Тогда вероятность классов, в Пети, в боксе на концерт с 4 билетами

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)! \cdot 4! \cdot (x-4)!}{x! \cdot 2! \cdot (x-4)!}$$

количество гостей с Петей в паре (всегда они есть, чтобы можно было)

количество всех гостей

Аналогично вероятность классов на концерт, если у билетов

$$\frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} = \frac{(x-2)! \cdot y! \cdot (x-y)!}{(y-2)! \cdot (x-y)! \cdot x!}$$

Дано, это

$$\frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} \cdot \frac{C_x^4}{C_{x-2}^2} = 2,5 = \frac{(x-2)! \cdot y!}{(y-1)! \cdot x!} \cdot \frac{x! \cdot 2}{4! \cdot (x-2)!} = \frac{y!}{12}$$
~~$$(x-2)! \cdot x! \cdot y! \cdot 2 \cdot (x-y)! \cdot (x-4)!$$~~
~~$$= \frac{y(y-1)}{12}$$~~

$$y(y-1) = 30$$

$$y^2 - y - 30 = 0$$

$$(y-6)(y+5) = 0$$

$$y > 4 \Rightarrow y = 6$$

Ответ: 6 билетов

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



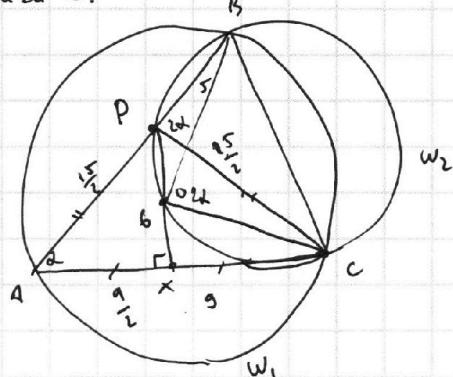





СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



$$\text{Так как } \angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha = \angle BPC$$

$$\Rightarrow \angle APC = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\angle PCA = 90^\circ - \angle APC - \angle PAC = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

$\Rightarrow \triangle APC$  - равнобедренный

$\triangle AOC$  - тоже равнобедренный  $\Rightarrow OP \perp AC$

$O, P$  лежат на ср. лн.  
 $k AC$

$$\text{Так } OP \perp AC - X, \quad AX = \frac{1}{2} AC = 4,5, \quad PC = AP = \frac{15}{2}$$

$$\angle APX = 90^\circ - \alpha \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AX}{AP} = \frac{9}{2 \cdot 15} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2(90^\circ - \alpha)} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \frac{4}{5}, \quad \text{т.к. } \triangle ABC \text{ - остроугольный}$$

$$\text{т.о. } \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$PX^2 = AP^2 - AX^2 = \frac{225 - 81}{4} =$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25} \quad \boxed{PX = 6} = \frac{144}{4} = 36$$

$$S_{ABC} = S_{APC} + S_{BPC} = PX \cdot AX + \frac{\sin 2\alpha \cdot BD \cdot PC}{2} = 6 \cdot \frac{9}{2} + \frac{24 \cdot 5 \cdot 15}{25 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= 27 + \frac{3}{2} \cdot 6 = 27 + 18 = 45$$

Ответ: 45.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\overline{DH} + \overline{GC} + \overline{OD} + \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} ? \quad \overline{FB} + \overline{AE} + kx + xF + xE + xB$$

Заметим, что  $\overline{DH} = \overline{FB}$ , так как  $HF \parallel DB$ , а  $\overline{AE} = \overline{GC}$  т.к.

$$AC \parallel EG$$

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} ? \quad kx + xF + xE + xB$$

$$10 + 10 ? HF + EG$$

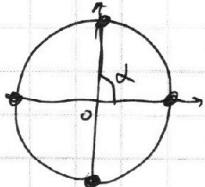
Заметим, что  $HF$  - хорда в окружности,

$$\text{а } 10 - \text{ её диаметр} \Rightarrow 10 > HF$$

$$10 > EG$$

$$20 > HF + EG \text{ т.к. } (если } x \neq 0)$$

Значит наибольший периметр достигается, когда  $x = (3\delta_2, 0)$ ,



$$(0, 3\delta_2), (-3\delta_2, 0),$$

$$(0, -3\delta_2)$$

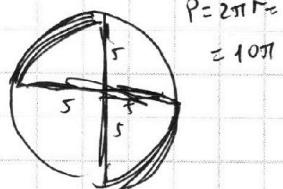
$$\text{Тогда } \alpha = 2\pi k, \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \alpha = \pi + 2\pi k, \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{И периметр равен } 20 + \frac{2 \cdot \pi \cdot 5}{2} = 20 + 5\pi$$

$$\text{Ответ: } M = 20 + 5\pi, \alpha = \cancel{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \cancel{\pi + 2\pi k}, \cancel{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$$

$$\frac{\pi}{2} k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$



$$P = 2\pi r = \\ = 10\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.













СТРАНИЦА  
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

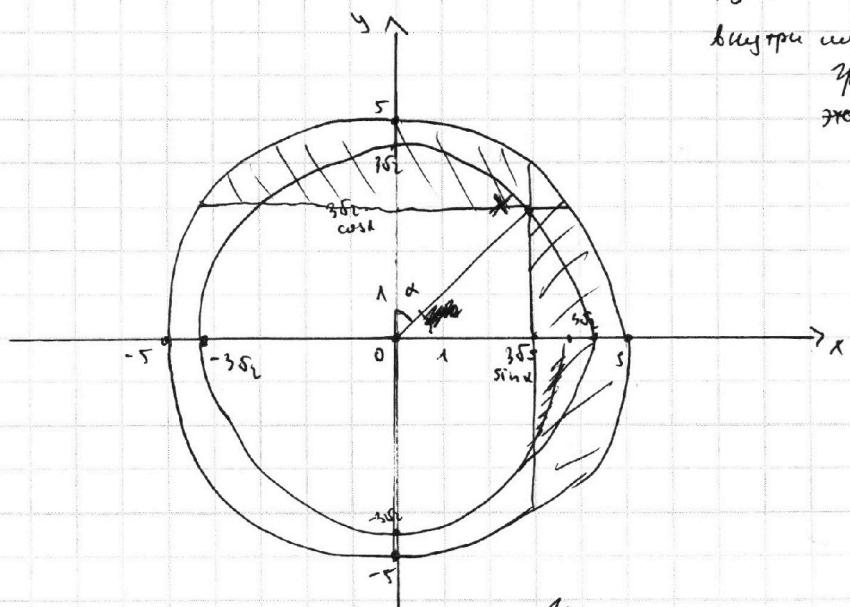
Изобразим на графике второе нер-во, это ур-е окр-и

$x, y$  должны лежать

внутри или на

гранич

этой окружности.



Изобразим также окружность

окружность с центром  $(0,0)$

и радиусом  $3\sqrt{2}$

$$x^2 + y^2 = 18$$

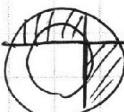
$$3\sqrt{2} < 5$$

$$18 < 25$$

Если мы от оси  $y$  отложим угол  $\alpha$  по часовой стрелке, то  $x$ -пересечение сторон угла с окр-ю, то точки  $Ox$  на  $y$ -оси  $\alpha$  раз.  $3\sqrt{2}$

мы имеем  $x = 3\sqrt{2} \cos \alpha$ , а на оси  $X$   $3\sqrt{2} \sin \alpha$ .  $(0 - (0,0))$

Тогда решения система



выглядят так, т.к.

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha \\ x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \quad \text{Заметим, что где}$$

любой точка  $X$  на окружности с радиусом  $3\sqrt{2}$

мы можем определить соответствующую ей  $\alpha$  ( $\in$  то есть  $0 \dots 2\pi$ )

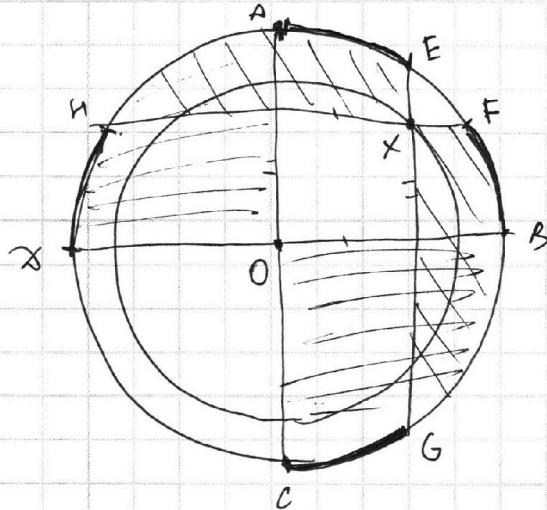


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Доказательство

Будем рассматривать все фигуры, которые получаются, если будет  $X$

на окр радиусом

$ZB$  и проведут

параллельно

оси ходов

через  $X$

(получается 2 фигуры)

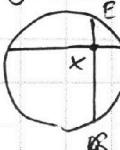
как сса карточки

Докажем, что если  $\exists$  эти числа совпадают с осью, то

Рассмотрим наименьший. Возьмём произвольную точку  $X$  и построим фигуру. Сравним её периметр с

(Всегда стрижением обозначаются подобные  $\exists$ )

Обозначим за  $E, F, G, H$ . пересечение с бисектрисой



Ок-то именно в таком порядке. За  $A, B, C, D$ . такие



точки в таком порядке. Пусть  $X$  лежит в первой четверти, другие  $X$  лежат

тогда периметр первой фигуры левее  $HX + XF + XE + XG + HA + AE$

$$+ FB + BG$$

Дум всегда меньше!

периметр второго  $\approx \overline{DH} + \overline{HA} + \overline{BG} + \overline{GC} + \overline{OB} + \overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OC}$

$$\overline{DH} + \overline{HA} + \overline{BG} + \overline{GC} + \overline{OB} + \overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OC} > ? FB + \overline{HA} + \overline{BG} + \overline{AE} + \overline{OB} + \overline{OA} \\ + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{HX} + \overline{XF} + \overline{XE} + \overline{XG}$$



$$+ \overline{OB} + \overline{OC}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

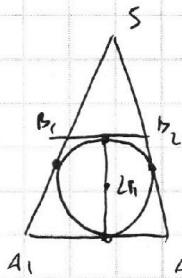


- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |   |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|---|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                                   | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |   |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

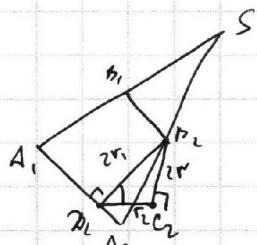
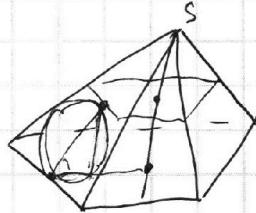
Тогда



$$P(A_1A_2, B_1B_2) = 2r,$$

$$r_2 = 2r_1 \cdot \cos \varphi,$$

т.е.  $\varphi$ -гипр. угол



Пусть проекции  $B_2$  на

$A_1A_2 \dots A_n C_1$

$$B_2C_2 = 2n,$$

$$B_2 \in A_1A_2, B_2P_2 \perp A_1A_2$$

$$B_1B_2 = 2r,$$

$$\frac{S_{\text{окр}}}{S_{\text{окн}}} = \frac{P_{A_1B_1A_2B_2} \cdot M_1 \cdot n}{P_{A_1A_2 \dots A_n} \cdot r_2} =$$

$r_2$  - радиус окр. вписанной в

$A_1A_2 \dots A_n$

$$= \frac{\left( A_1B_1 + A_1B_2 + \dots + A_nB_n + \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{2} + \dots + \frac{A_nA_1 + B_nB_1}{2} \right) \cdot r_1}{\frac{A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_nA_1}{2} \cdot r_2} = \frac{P_{A_1B_1A_2B_2} \cdot n}{P_{A_1A_2 \dots A_n}} \cdot \sin \varphi =$$

$$= P_{SA_1A_2} \cdot \left( 1 - P_{SA_1A_2} \cdot \frac{SB_1}{SA_1} \right) \cdot n \cdot \sin \varphi$$

$P_{A_1A_2 \dots A_n}$

Заметим, что центры сфер, из которых состоят конусы, лежат на прямой, проходящей через вершины конусов.

окр. граний

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

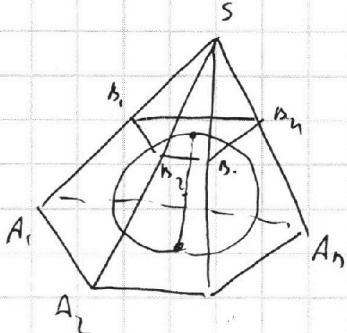
СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.

Рассмотрим правильную пирамиду

$S A_1 A_2 \dots A_n$



Число  $O_1$  - центр  $\omega$

$O_2$  - центр  $S\Omega$

$B_1, B_2, \dots, B_n$  - верхнее основание  
усечённой пирамиды.

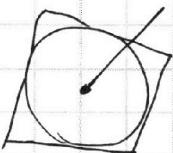
$\omega$  - вписанная в пирамиду сферы, т.к.  $\exists$  радиус 1 сферы,

касающиеся граней  $A_1 A_2 \dots A_n, A_1 A_2 S, A_2 A_3 S, \dots, A_{n-1} A_n S, A_n A_1 S$ .

Значит  $r(A_1 A_2 \dots A_n) = r(S, B_1, B_2, \dots, B_n) = 2r$ , где  $r$  - радиус впис. сферы в  $S A_1 A_2 \dots A_n$ .

$\sum r$  касаются всех ребер  $A_1 A_2 \dots A_n, B_1 \dots B_n \Rightarrow$  она касается  
всех ребер  $S A_1 A_2 \dots A_n$ . Такая сфера только 1,  ~~$O_2$  не подходит~~

если "если ее" центр симметрировать

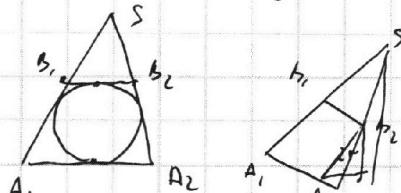


на все грани, то получится центр сферы.

Окружность грани. ~~Приходит~~ ~~один~~

Но также эта сфера должна касаться  $B_1 B_2, B_2 B_3, \dots, B_n B_1$ ,

значит чтобы усечённой пирамиды - описанное звено  $B_1 B_2 \dots B_n B_1$



Число  $r$  - радиус вписанной  
окружности  $S A_1 A_2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overbrace{aaaa} : 1111$$

$$B \quad \overline{2bc} \quad \overline{b2c} \quad \overline{bcb}$$

$$C \quad \overline{3d} \quad \overline{d3}$$

$$ABC :$$

$$1111 - p$$

$$13 \cdot 8$$

$$\begin{array}{r} 992 \\ \times 93 \\ \hline 2976 \\ 8928 \\ \hline 93356 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 102 \\ \times 13 \\ \hline 306 \\ 102 \\ \hline 1326 \end{array}$$

~~102~~

~~333~~

$$1111 \quad 2222 \quad 3333 \quad 4444$$

$$b : 101 \cancel{\times} = 202$$

$$C : 11$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 11 \\ \hline 121 \end{array}$$

$$C = 33$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 1111 \\ \hline 1111 \\ 1111 \\ 1111 \\ \hline 1234321 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 101 \\ \hline 1111 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

~~1111~~

$$202 \cdot 33 = 1111 \cdot 6$$

$$1111 \cdot x$$

$$\begin{aligned} &x^3 - y^3 - 3xy \\ &(x^3 - y^3) - 3xy = ? \end{aligned}$$

$$6666$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad \begin{aligned} &\cdot xy(x-1)(y+1) \\ &x^3 - y^3 - 3xy = ? \end{aligned}$$

$$y(x-1)(y+1) + x(x-1)(y+1) + 2(x-1)(y+1) = xy(y+1) + xy(x-1) + 2xy$$

$$\begin{aligned} &xy^2 - y^2 + xy - y + x^2y - xy + x^2 - x \\ &+ 2xy - 2y + 2x - 2 = xy^2 + xy + x^2y - xy + 3xy \end{aligned}$$

$$x^2 + x - y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$y^3 - 8xy = xy^2 - x^2 + 2x$$

$$xy^2 + y^3 - x^2 + 2x$$

$$\begin{aligned} &1 + \sqrt{y^2 + 3y + 2} \\ &-1 \pm \sqrt{(y+1)(y+2)} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + x - y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$x^3 - 3xy = xy^2 - x^2 + 2x$$

$$xy^2 - x^2 + y^3 + 2x$$

$$(y^2 + 2)^2 + 4y^3$$

$$\sin \pi x + \sin \pi y = (\sin \frac{\pi x}{2} + \sin \frac{\pi y}{2})$$

$$\begin{aligned} \sin(\pi x + \pi y) &= 2 \sin \pi x \cdot \cos \pi y \\ &\quad + \cos \pi x \cdot \sin \pi y \end{aligned}$$

sin d.

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} =$$

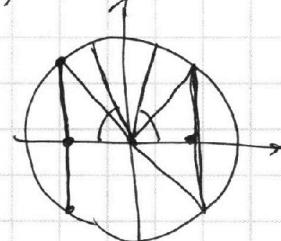
$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$= \left( \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{y}{2} + \sin^2 \frac{y}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \right)$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\left( \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{y}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \sin^2 \frac{y}{2} \right)$$

$$0 = \cos 2\pi x + \cos(\pi y + \pi x)$$



$$\cos \alpha = -\cos \beta$$

$$\alpha = -\beta + 2\pi k$$

$$\beta = \pi - \alpha + 2\pi k$$

$$2\pi x = -\pi y - \pi x + 2\pi k$$

$$3x = 2k - y \quad 3x + y = 2k$$

$$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$$

$$\pi y + \pi x = \pi - 2\pi k + 2\pi k$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$$

$$3x + y = 1 - 2k$$

$$3, 5,$$

$$\begin{aligned} -4 &\leq y \leq 4 \\ -5 &\leq y \leq 5 \end{aligned}$$

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.








СТРАНИЦА  
ИЗ



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x$

$$\frac{C_{y-2}^2}{C_x^4} = \frac{C_{x-2}^4}{C_x^6}$$

$$1 + \begin{cases} \cos \pi \\ \cos -\pi \end{cases}$$

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \cdot 2448 = \frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^4} \cdot 2448$$

$$\frac{2448}{2448} = \frac{6! \cdot 4! (x-y)!}{2! (x-y)!} = \frac{y! (x-y)!}{(y-2)! (x-y)!}$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot (x)(x-1)(x-2)(x-3)} = 2,5.$$

$$\frac{2 \cdot 4! \cdot (x-y)!}{(x-4)! \cdot 2} = \frac{6! \cdot (x-y)!}{4! (x-6)!}$$

$$\frac{y! (x-y)!}{(y-2)! (x-y-2)!} = y \cdot (y-1) \cdot (x-y) \cdot (x-y-1) \quad ||$$

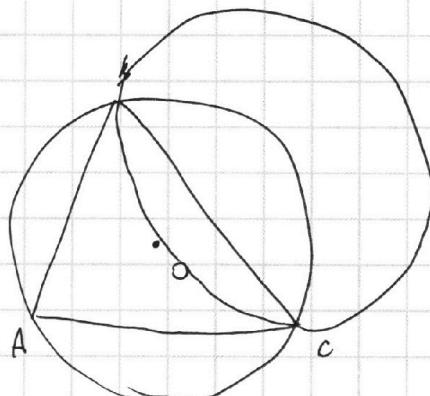
$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2,5}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$

$$2,5 \cdot \frac{12}{(x-2)(x-3)}$$

$$y(y-1)(x-y)(x-y-1)(x-2)(x-3)$$

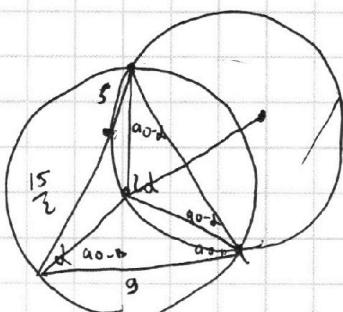
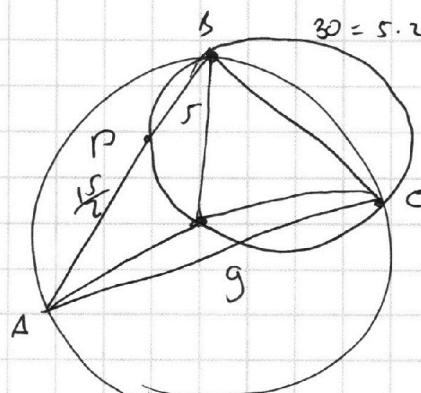
$y \quad x-2$

||  
30



$y=4$

$$\frac{225}{144}$$



$$30 = 5 \cdot 2 \cdot 3$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                          |                          |                          |                                     |                                     |                                     |                                     |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                                   | 5                                   | 6                                   | 7                                   |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА

из \_\_\_\_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Черновик

Тогда  $x$  одноклассников.

Тогда вероятность попасть к Петре, а все ее конкуренты будут

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \leftarrow \begin{array}{l} \text{количество четверок} \\ \text{избирателей с Петрой и ее} \\ \text{конкурентами, т.е.} \\ \text{уже выбраны} \\ \text{2 места} \end{array}$$

← Все четверки

$$\frac{\cancel{(x-2)!}}{2!} \frac{(x-2)(x-1) \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{12}{x(x-1)}$$

Тогда наше дробь  $y, y \geq 4$

$$\frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} = \frac{(x-4)! \cdot \cancel{y!} \cdot (x-y)!}{(y-1)! (x-y)! \cdot \cancel{y!} \cdot x!} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$

аналогично рассчитаем вероятность

$$\frac{y(y-1)}{x(x-1)} = \frac{12}{x(x-3)} \cdot 2,5$$

$$(x+3)(y)(y-1) = 30(x-3)$$

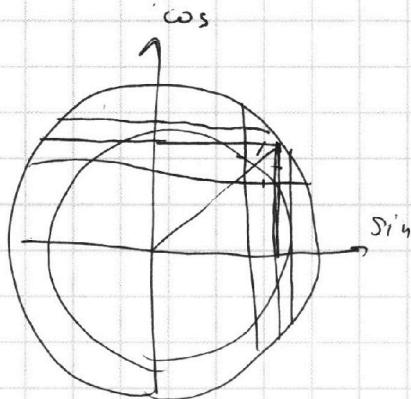
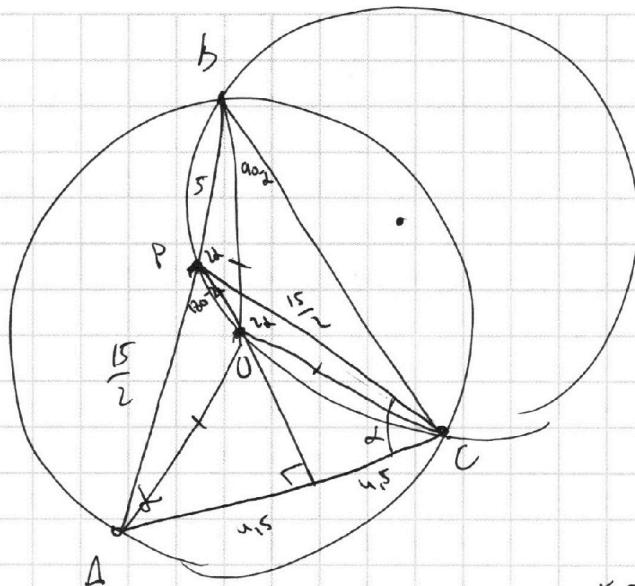


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} x > \alpha & \quad x \leq \alpha \\ y \leq \alpha & \quad y > \alpha \end{aligned}$$

$$\sin \theta = 1$$

$$\frac{\pi}{2}$$

$$-3\sqrt{2} \leq 3\sqrt{2} \alpha \leq 3\sqrt{2}$$

\* 13

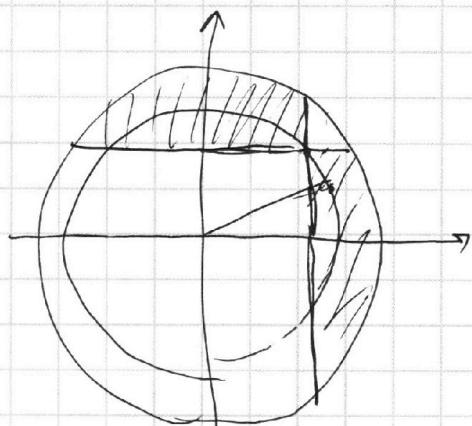
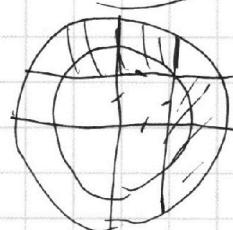
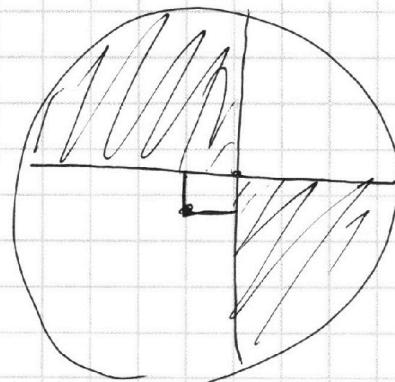
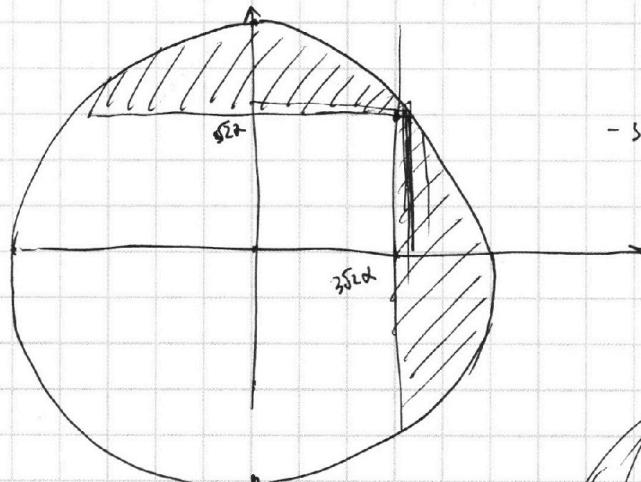
$$S = \sqrt{2} x$$

$$x = \frac{5}{\sqrt{2}} < 3\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{6}$$

4

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{2}{6}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x-1)(y+1) = xy - y + x - 1$$

$$\cancel{xy^2 - y^2 + xy - y} - \cancel{xy} - \cancel{x^2y - xy + x^2 - x} + \cancel{2xy} - \cancel{2y} + \cancel{2x} - \cancel{2} = \cancel{xy^2} + \cancel{xy} + \cancel{x^2y} - \cancel{xy} + \cancel{2xy}$$

$$x^2 + x - y^2 - 3y - 2 = 0$$

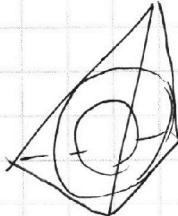
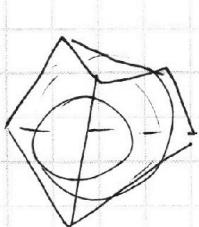
$$x^3 - y^3 - 3xy = x(x^2 + x - y^2 - 3y - 2) - x^2 + xy^2 + 2x - y^3$$

$$\cancel{x^3 + x^2 - xy^2 - 3xy - 2x} \quad (y+1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$$

$$x^2y + xy - y^3 - 3y^2 - 2y \quad - y^3 - 3y^2 - 3y$$

$$x(s) + y(s) - x^2 + xy^2 + 2x - x^2y - xy + 3y^2 + 2y$$

$$3y^2 + xy^2 - x^2 - x^2y + 2x + 2y - xy$$



$$x(x-1) - (y+1)(y+1)$$

$$(x+y-2)(x-y+1)$$

$$x = y+1$$

$$1 + 4(y^2 + 3y + 2)$$

$$\frac{-1 \pm (2y+3)}{2}$$

$$4y^2 + 12y + 9$$

$$y+1$$

$$(2y+3)^2$$

$$-y-2$$

$$(x+y+2)(x-y-1) = 0$$

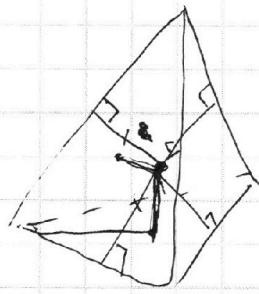
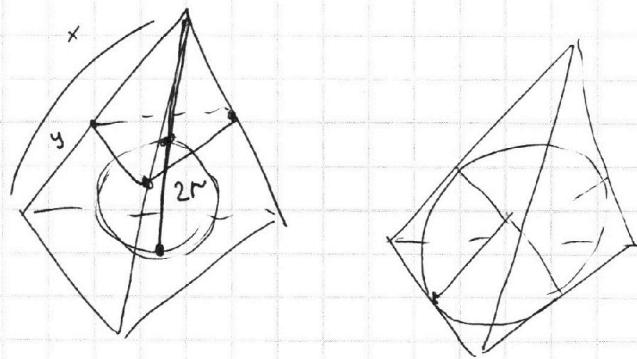
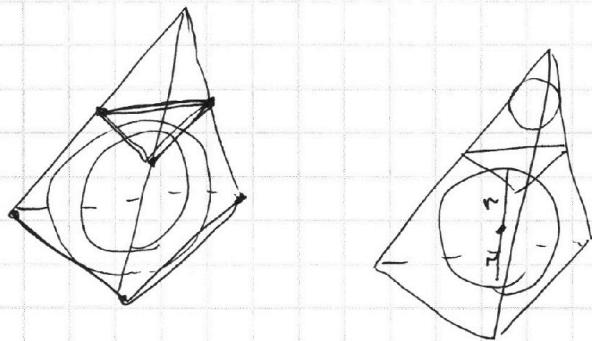


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



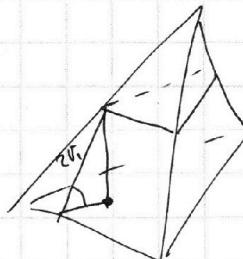
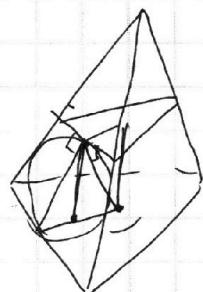


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

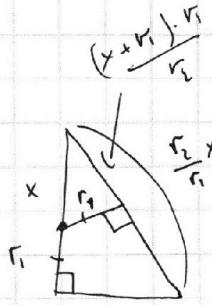
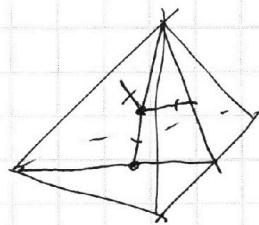
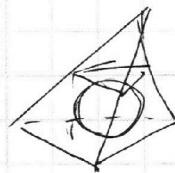
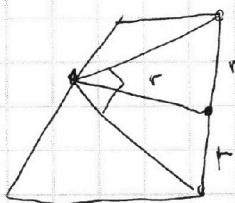
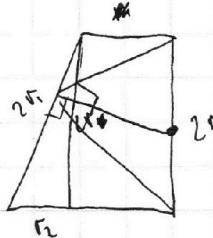
СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$2r_1 \cdot \sin \varphi = 2r_2$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \sin \varphi$$

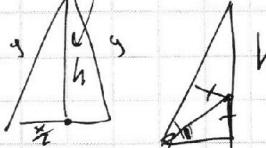


$$h = r \cdot \cos \varphi + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

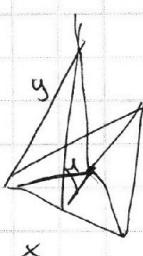
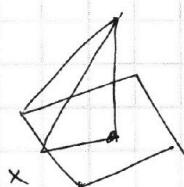
$$r_1 = h \cdot \cos \varphi$$



$$r_1 < r_2$$



$$r_1 = \frac{hx}{2} \operatorname{arctg} \frac{2y}{x}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!