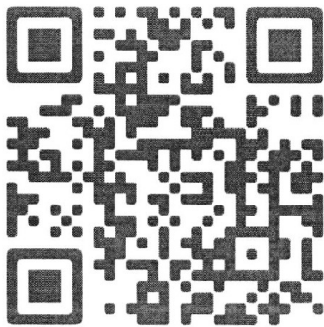




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha) (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1.

$A = \overline{xxxx}$ Заметим, что A обязательно кратно 1111 , т.к.

$$A = x \cdot 1111$$

$1111 = 11 \cdot 101$. Значит $A \cdot B \cdot C : 1111$, а, т.к. это квадрат, то

$$A \cdot B \cdot C : 1111^2 \quad (\text{т.к. } ABC : 11, 101 - \text{простые числа})$$

$$A = 1111 \cdot x, 0 < x \leq 9 \Rightarrow x \nmid 11, 101$$

$$\text{Значит } B \cdot C : 11, 101$$

Т.к. это простые числа, то либо B , либо C кратно 101 .

$$C - \text{двузначное число} \Rightarrow C \nmid 101 \Rightarrow B : 101$$

Пусть $B : 11$, тогда $B \geq 11 \cdot 101 = 1111$, но B - трёхзначное - это невозможно.

Тогда $C : 11$. B - трёхзначное, кратно 101 ^{хотел бы} $\Rightarrow$ одна из цифр равна 2

$$\Rightarrow B = 202 \quad (B = y \cdot 101, 0 < y < 10 \Rightarrow B = 101, 201, 301, \dots, 901 - \text{всё, кроме } 201 \text{ не подходит})$$

$$C : 11, \text{ двузначное, одна из цифр } 3. \Rightarrow C = 33, (C = 2 \cdot 11, 22 < 10, C = 11, 22, 33, \dots, 99 - \text{всё, кроме } 33 \text{ не подходит})$$

$$A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot x \cdot 101 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 = 1111^2 \cdot x \cdot 2 \cdot 3 = 2^2$$

$$x \neq 0 \Rightarrow x : 2, 3, x < 10 \Rightarrow x = 6 - \text{единственной вариант}$$

Ответ: (6666, 202, 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad / \cdot xy(x-1)(y+1)$$

 $x, y \neq 1, 0$

$$\underline{xy^2 - y^2 + xy - y} + \underline{x^2y - xy + x^2 - x} + \underline{2xy - 2y + 2x - 2} = \underline{xy^2 + xy + x^2y - xy + 2xy}$$

$$x^2 + x - y^2 - 3y - 2 = 0$$

Решим кв. ур-е отн. x^2

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(y^2 + 3y + 2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4y^2 + 12y + 9}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{(2y+3)^2}}{2} = y+1, -y-2$$

$$(x - y - 1)(x + y + 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = y+1 & 1) \\ x = -y-2 & 2) \end{cases}$$

1 случай $x = y+1$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3y^2 - 3y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

2 случай $x = -y-2$ $y, x > 0$ по условию $\Rightarrow -y < 0, -y-2 < 0$

$$\cancel{M = x^3 - y^3 - 3xy = (-y-2)^3 - y^3 - 3(-y-2)y}$$

Невозможно.

Значит $M = 1$, достигается из 1 - единственное возможное $y = 2, x = 3$, например.

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3.

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$\Updownarrow$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$0 = (\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x) + (\cos \pi x \cdot \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y)$$

$$\cos(2\pi x) + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$\cos(2\pi x) = -\cos(\pi x + \pi y)$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} 2\pi x + \pi x + \pi y = \pi + 2\pi k \\ 2\pi x - \pi = \pi x + \pi y + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$\Updownarrow$

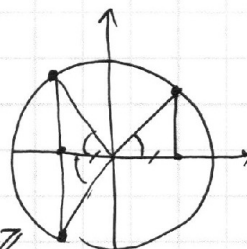
$$\begin{cases} 3x + y = 1 + 2k \\ x - y = 1 + 2k \end{cases}$$

то есть подходит пара чисел

$$(x, 1 + 2k - 3x)$$

$$(x, x - 1 - 2k) \text{ где } x - \text{любое, и } k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(x, 1 + 2k - 3x); (x, x - 1 - 2k)$ x -любое, $k \in \mathbb{Z}$



б)

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

Тогда $\frac{x}{5} \leq 1, -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$

Заметим, что $\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \arccos \frac{y}{4} \leq \pi$

Значит, $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$, причем равенство только при $\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$ и $\arccos \frac{y}{4} = \pi$

Подходят любые x, y , удовлетворяющие условиям из а), и условие из б), кроме таких (одновременно)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\{-5 \leq x \leq 5 \quad -4 \leq y \leq 4\} - \text{ОДЗ}$$

$$\begin{cases} y = 1 + 2k - 3x \\ y = x - 1 - 2k \end{cases}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$$

$\uparrow$

$$\frac{x}{5} = 1$$

$\uparrow$

$$x = 5$$

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi$$

$\uparrow$

$$\frac{y}{4} = -1$$

$\uparrow$

$$y = -4$$

~~$x = -5, -4, -3, -2, -1$~~
 ~~$y_1 = 1 + 2k - 3x$~~
 ~~$y_2 = x - 1 - 2k$~~
 ~~$16 - 6 - 2k$~~

x	-5	-4	...	5
y ₁	-4, -2, 0, 2, 4	-3, -1, 1, 3	...	-2, 0, 2, 4

При x - нечетном, y - любое четное

или x - четном, y - любое нечетное, в ОДЗ

$x = -5, -3, -1, 1, 3$ - $y = -4, -2, 0, 2, 4$ $5 \cdot 5 = 25$ пар

$x = -4, -2, 0, 2, 4$ $y = -3, -1, 1, 3$ $5 \cdot 4 = 20$ пар

$x = 5$ $y = -2, 0, 2, 4$ 4 пары

(Т.к. $x=5$ и $y=-4$ не подходит, ~~не будет~~ будет равно (сбо))

Ответ: 49 пар.



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Пусть x одинаковых билетов

Тогда вероятность попасть, и Петя, и Вера на концерт с 4 билетами

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)! \cdot 4! \cdot (x-4)!}{x! \cdot 2! \cdot (x-4)! \cdot 2!}$$

← кол-во способов с Петей и Верой (выбираем или еще 2 билета)
← кол-во всех билетов

Аналогично вероятности попасть на концерт, если y билетов

$$\frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} = \frac{(x-2)! \cdot y! \cdot (x-y)!}{(y-2)! \cdot (x-y)! \cdot x!}$$

Дано, что

$$\frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} \cdot \frac{C_x^4}{C_{x-2}^2} = 2,5 = \frac{(x-2)! \cdot y!}{(y-2)! \cdot x!} \cdot \frac{x! \cdot 2}{4! \cdot (x-2)!} = \frac{y!}{(y-2)! \cdot 12} =$$

$$\frac{(x-2)! \cdot x! \cdot y! \cdot 2 \cdot (x-y)! \cdot (x-4)!}{(y-2)! \cdot (x-y)! \cdot 4! \cdot y!} = \frac{y(y-1)}{12}$$

$$y(y-1) = 30$$

$$y^2 - y - 30 = 0$$

$$(y-6)(y+5) = 0$$

$$y > 4 \Rightarrow y = 6$$

Ответ: 6 билетов



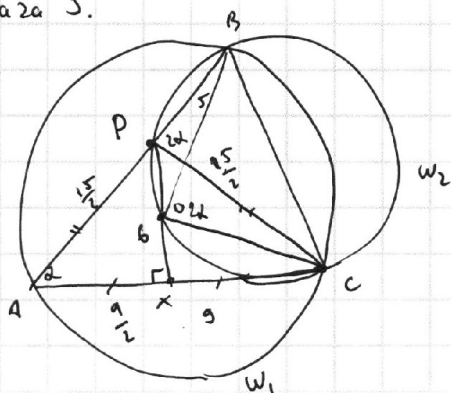
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5.



$$\text{Также } \angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha = \angle BPC$$

$$\Rightarrow \angle APC = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\angle PCA = 180^\circ - \angle APC - \angle PAC = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

$\Rightarrow \triangle APC$ - равнобедренный

$\triangle AOC$ - тоже равнобедренный $\Rightarrow OP \perp AC$

O, P лежат на сеп. н. к AC

$$\text{Также } OP \perp AC \text{ в } X, \quad AX = \frac{1}{2} AC = 4,5, \quad PC = AP = \frac{15}{2}$$

$$\angle APX = 90^\circ - \alpha \quad \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AX}{AP} = \frac{9 \cdot 2}{2 \cdot 15} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2(90^\circ - \alpha)} = \pm \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \pm \frac{4}{5}, \text{ т.к. } \triangle ABC \text{ - остроугольный,}$$

$$\text{то } \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$PX^2 = AP^2 - AX^2 = \frac{225 - 81}{4} =$$

$$= \frac{144}{4} = 36$$

$$\boxed{PX = 6}$$

$$S_{ABC} = S_{APC} + S_{BPC} = PX \cdot AX + \frac{\sin 2\alpha \cdot AB \cdot AC}{2} = 6 \cdot \frac{9}{2} + \frac{24 \cdot 5 \cdot 15}{25 \cdot 2 \cdot 2} =$$

$$= 27 + 3 \cdot 6 = 27 + 18 = 45$$

Ответ: 45.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\overline{DH} + \overline{GC} + OD + OA + OB + OC \stackrel{?}{=} \overline{FB} + \overline{AE} + KX + XF + XE + XB$$

Заметим, что $\overline{DH} = \overline{FB}$, т.к. $HF \parallel DB$, $\overline{AE} = \overline{GC}$ т.к.

$AC \parallel EG$

$$OA + OB + OC + OD \stackrel{?}{=} KX + XF + XE + XB$$

$$10 + 10 \stackrel{?}{=} HF + EG$$

Заметим, что KF хорда в окружности,

а 10 - её диаметр $\Rightarrow 10 > KF$

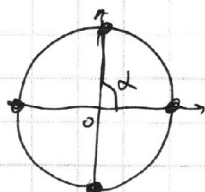
$$10 > EG$$

$$20 > KF + EG \text{ т.т.т. (если } X \neq O)$$

Значит наибольший периметр достигается, когда $X = (3\sqrt{2}, 0)$,

$(0, 3\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2}, 0)$,

$(0, -3\sqrt{2})$



Тогда $\alpha = 2\pi k$, $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\alpha = \pi + 2\pi k$, $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
 $k \in \mathbb{Z}$

И периметр равен $20 + \frac{2 \cdot \pi \cdot 5}{2} = 20 + 5\pi$

Ответ: $M = 20 + 5\pi$, $\alpha = \frac{\pi}{2}k$, где $k \in \mathbb{Z}$



$$P = 2\pi r = 10\pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

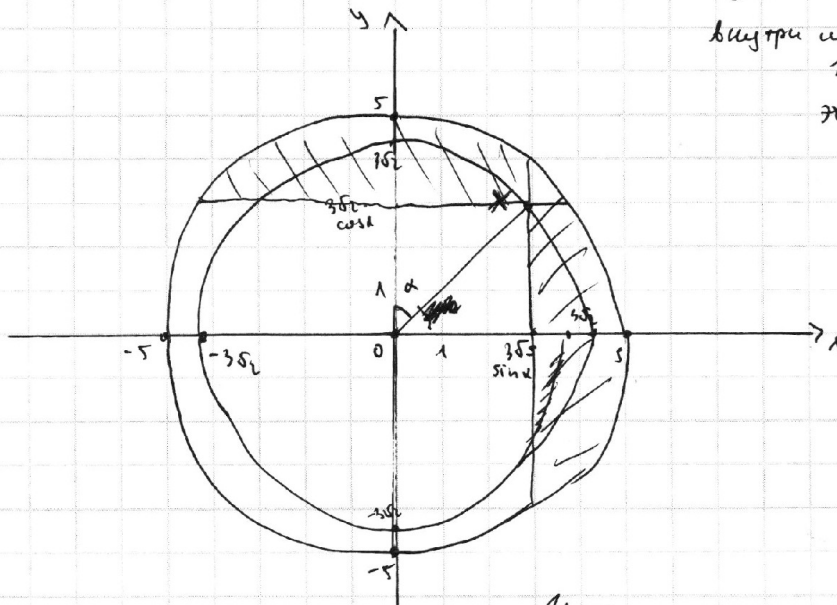
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

Изобразим на графике второе нер-во, это ур-е окр-ы

x, y должны лежать
внутри или на
границе
этой окружности.

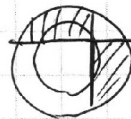


$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} \sin \alpha &\leq 5 \\ 3\sqrt{2} \cos \alpha &\leq 5 \end{aligned}$$

Изобразим такую окружность
окружность с центром (0,0)
и радиусом $3\sqrt{2}$

Если мы от оси y отложим угол α по часовой стрелке, то
X - пересечение стороны угла с окр-ой, то проекции OX на y - $3\sqrt{2} \cos \alpha$, а на ось X $3\sqrt{2} \sin \alpha$. (0 - (0,0))

Тогда решение системы



выглядит так, т.к.

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha \\ x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

Заметим, что для
любой точки X на окружности с рад. $3\sqrt{2}$

мы можем определить соответствующую ей α (с точностью
до 2π)

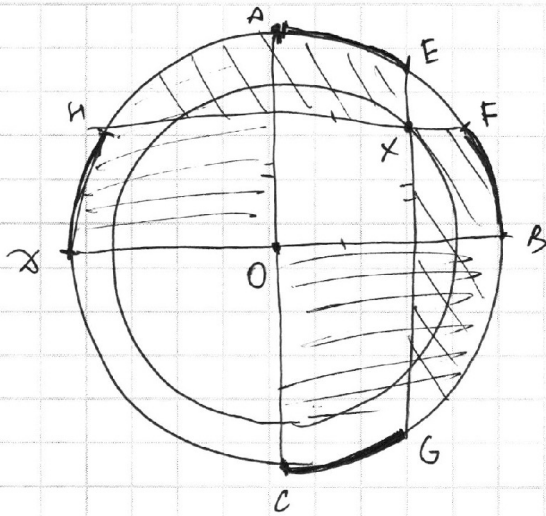


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

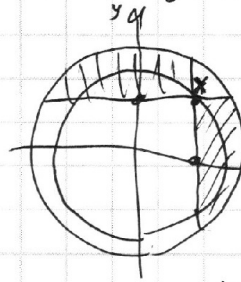
СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

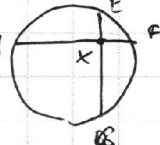


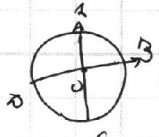
~~Докажем, что~~

Будем рассматривать все фигуры, которые получаются, если взять X на окружности радиуса 30 и провести параллельно оси OX через X (получается 2 фигуры как на картинке)



Докажем, что если эти фигуры совпадают с осью OX , то P периметр наибольший. Возьмём произвольную точку X , построим фигуру. Сравним её периметр с  такой фигурой. (Везде штрихами обозначается соответствующая область!)

Обозначим 30 E, F, G, H .  пересечение с осью

Окружности именно в таком порядке. За A, B, C, D .  такие точки в таком порядке. Пусть X лежит в первой четверти, другие X аналогично. Тогда периметр первой фигуры равен $HX + XF + FE + EB + HA + AE +$
 $+ FB + BG$

Дуги всегда меньше!

периметр второй ~~то~~ $HN + NA + BG + GC + OD + DA + OB + OC$

$HN + NA + BG + GC + OD + DA + OB + OC > FB + HA + BG + AE + OD + OC +$
 $+ HX + XF + FE + EB$



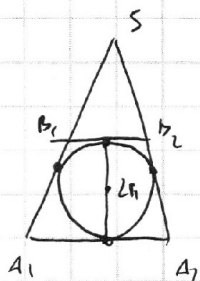
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

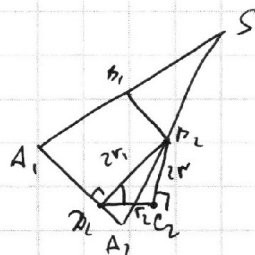
СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда



$$p(A, A_2, B, B_2) = 2r,$$



Пусть касание B_2 из
 $A, A_2 \dots A_n, C_1$

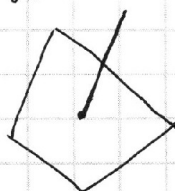
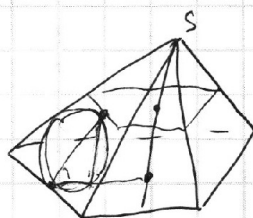
$$B_2 C_2 = 2r,$$

$$B_2 \in A_1 A_2, B_2 P_2 \perp A_1 A_2$$

$$B_2 D_2 = 2r,$$

$$r_2 = 2r_1 \cdot \cos \varphi,$$

где φ - двугр. угол



$$\frac{S_{\text{ок}}}{S_{\text{ок}}} = \frac{P_{A, A_2, B_2} \cdot r_1 \cdot n}{P_{A, A_2, \dots, A_n} \cdot r_2} =$$

r_2 - радиус окр. вписанной в

$A_1 A_2 \dots A_n$

$$= \frac{(A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_n B_n + \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{2} + \dots + \frac{A_n A_1 + B_n B_1}{2}) \cdot r_1}{\frac{A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_1}{2} \cdot r_2} = \frac{P_{A, A_2, B_2} \cdot n}{P_{A, A_2, \dots, A_n}} \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{P_{S, A_1} \cdot \left(1 - P_{S, A_2} \cdot \frac{S B_1}{S A_1}\right) \cdot n \cdot \sin \varphi}{P_{A, A_2, \dots, A_n}}$$

Заметим, что центры сфер их содержат
совпадают, т.к. ~~это~~ перпендикуляры из центр впис.

окр. граней



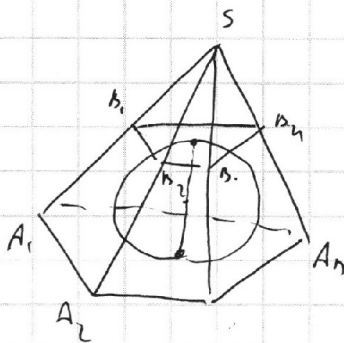
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7.



Рассмотрим правильную пирамиду

$SA_1A_2 \dots A_n$

Пусть O_1 - центр ω

O_2 - центр Ω

$b_1, b_2, \dots, b_n$ - верхнее основание усеченной пирамиды.

ω - вписанная в пирамиду сфера, т.к. $\exists$ ровно 1 сфера, касающаяся граней $A_1A_2 \dots A_n, A_1A_2S, A_2A_3S, \dots, A_{n-1}A_nS, A_nA_1S$.

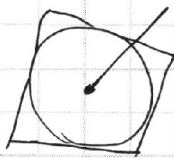
Значит $\rho(A_1A_2 \dots A_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) = 2r$, где r - радиус впис. ~~сферы~~ сферы ω в $SA_1A_2 \dots A_n$.

Ω касается всех ребер $A_1A_2 \dots A_n, b_1, b_2, \dots, b_n \Rightarrow$ она касается всех ребер $SA_1A_2 \dots A_n$. Такая сфера только 1, ~~Она касается~~

ее центр если ее центр спроецировать

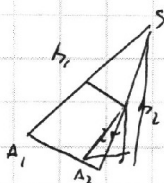
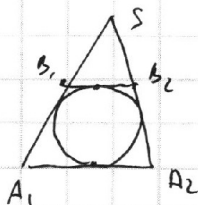
на все грани, то получится центр впис.

окружности грани. ~~Вывод~~ ~~Вывод~~



Но также эта сфера должна касаться $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, b$.

Значит грани усеченной пирамиды - описанные четырехугольники.



Пусть r_1 - ~~радиус~~ радиус вписанной окружности $\triangle SA_1A_2$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} : 1111$$

$$b \quad \overline{2bc} \quad \overline{b2c} \quad \overline{bc2}$$

$$c \quad \overline{3d} \quad \overline{d3}$$

$$ABC :$$

$$\begin{array}{r} 999 \\ \times 93 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 102 \\ \times 13 \\ \hline 306 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 - p \\ 13 \cdot 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2976 \\ 8928 \\ \hline 93356 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 102 \\ 102 \\ \hline 1326 \end{array}$$

~~202~~

~~202~~

1111

2222

3333

4444

$$b : 101 = 202$$

$$c : 11$$

$$c = 33$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ 101 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline \end{array}$$

$$101 \cdot 11$$

~~11200~~

$$202 \cdot 33 = 1111 \cdot 6$$

$$1111 \cdot x$$

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

$$(x^3 - y^3) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$6666$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x \cdot y(x-1)(y+1)$$

$$x^3 - y^3 - 3xy = ?$$

$$y(x-1)(y+1) + x(x-1)(y+1) + 2(x-1)(y+1) = xy(y+1) + xy(x-1) + 2xy$$

$$\begin{array}{l} x^2 - y^2 + xy - y + x^2y - xy + x^2 - x \\ + 2xy - 2y + 2x - 2 \end{array} = x^2y + x^2y + x^2y - xy + 2xy$$

$$x^2 + x - y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$\begin{array}{l} x^3 - 3xy = x^2y - x^2 + 2x \\ x^2y + y^3 - x^2 + 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 + 2y^2 + 3y + 2 \\ -1 \pm \sqrt{(y+1)(y+2)} \\ \hline 2 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + x - y^2 - 3y - 2 = 0$$

$$x^3 - 3xy = xy^2 - x^2 + 2x$$

$$xy^2 - x^2 + y^3 + 2x$$

$$(y^2 + 2)^2 + 4y^3$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$0 = \cos 2\pi x + \cos(\pi y + \pi x)$$

$$\cos a = -\cos b$$

$$a = -b + 2\pi k$$

$$b = \pi - a + 2\pi k$$

$$2\pi x = -\pi y - \pi x + 2\pi k$$

$$3x = 2k - y$$

$$3x + y = 2k$$

$$\pi y + \pi x = \pi - 2\pi k + 2\pi k$$

$$3x + y = 1 - 2k$$

3, 5,

$$x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\sin \pi x + \sin \pi y = \left(\sin \pi x \cdot \frac{1}{2} + \sin \pi y \cdot \frac{1}{2} \right)$$

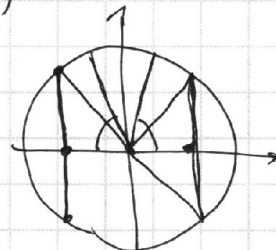
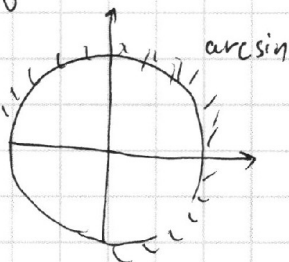
$$\sin(\pi x + \pi y) = 2 \sin \pi x \cdot \cos \pi y + \cos \pi x \cdot \sin \pi y$$

$$\sin d \cdot$$

$$2 \sin \frac{x+y}{2} = \cos \frac{x-y}{2} =$$

$$= \left(\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{y}{2} + \sin \frac{y}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \right) \\ \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{y}{2} - \sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{y}{2} \right)$$

$$\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{x}{5} \\ + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$



$$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$$

$$-4 \leq y \leq 4 \\ -5 \leq x \leq 5$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x \quad \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{C_{x-2}^4}{C_x^6}$$

$$1 + \begin{matrix} \nearrow \cos \pi \\ \searrow \cos -\pi \end{matrix}$$

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \cdot \frac{C_{x-2}^{4-2}}{C_x^2} = \frac{C_{x-2}^{4-2}}{C_x^2}$$

$$\frac{4! \cdot (x-4)!}{2! \cdot (x-4)!} = \frac{y! \cdot (x-y)!}{(y-2)! \cdot (x-y)!}$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot 4 \cdot 3 \cdot x}{2 \cdot (x) \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)} = 2,5$$

$$\frac{4! \cdot (x-4)!}{(x-4)! \cdot 2} = \frac{6! \cdot (x-6)!}{4! \cdot (x-6)!}$$

$$\frac{y! \cdot (x-y)!}{(y-2)! \cdot (x-y-2)!} = y \cdot (y-1) \cdot (x-y) \cdot (x-y-1)$$

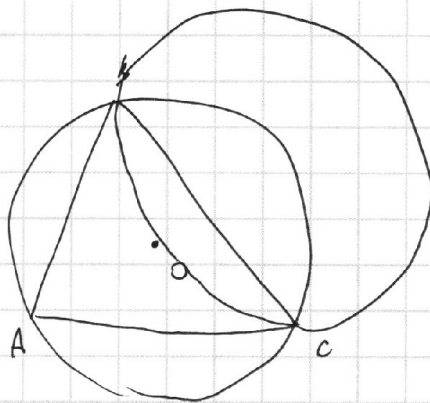
$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2,5}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$

$$2,5 \cdot \frac{12}{(x-4)(x-3)}$$

$$y(y-1)(x-y)(x-y-1)(x-2)(x-3)$$

$$y \quad x-2$$

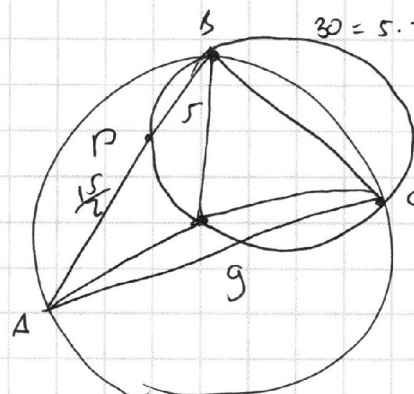
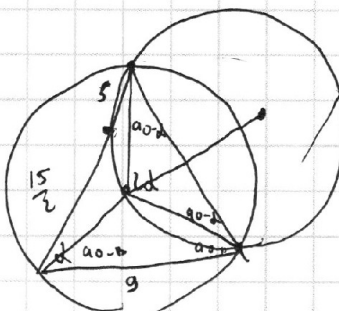
$$\frac{11}{30}$$



$$y \neq 4$$

$$30 = 5 \cdot 2 \cdot 3$$

$$\frac{225}{144}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☒ ☒ ☒

СТРАНИЦА
4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4.

Черновик

Пусть x — количество классов.

Тогда вероятность попасть к Пете, и все же концерт будет

$$\frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} \leftarrow \begin{array}{l} \text{кол-во проверок} \\ \text{вероятность с Петей и Насей, т.к. нужно выбрать} \\ \text{к ним 2 людей} \end{array}$$

$\leftarrow$ все проверки

$$\frac{(x-2)!}{2 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{12}{x(x-3)}$$

Пусть теперь детей y , $y \geq 4$

$$\frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} = \frac{(x-2)! \cdot y! (x-y)!}{(y-2)! (x-y)! \cdot x!} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$

аналогично рассуждая вероятность

$$\frac{y(y-1)}{x(x-1)} = \frac{12}{x(x-3)} \cdot 2,5$$
$$(x+3)(y)(y-1) = 30(x-3)$$

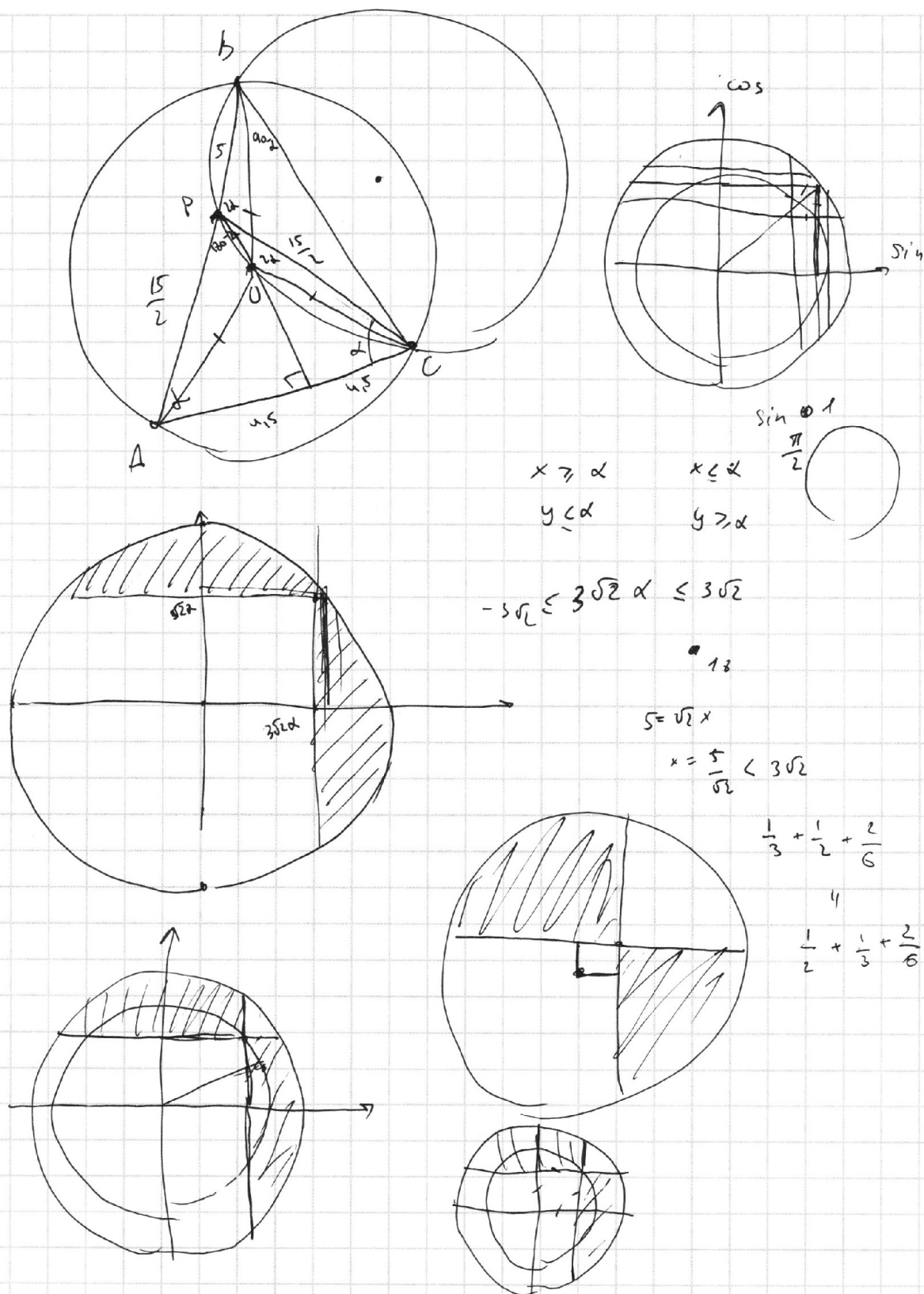


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad (x-1)(y+1) = xy - y + x - 1$$

$$\cancel{xy^2} - y^2 + \cancel{xy} - y + \cancel{x^2y} - \cancel{xy} + x^2 - x + \cancel{2xy} - 2y + 2x - 2 = \cancel{xy^2} + \cancel{xy} + \cancel{x^2y} - \cancel{xy} + 2xy - y^2 + x^2 - x - 2 = xy^2 + xy + x^2y - y^2 + x^2 - x - 2$$

$$x^2 + x - y^2 - 3y - 2 = 0$$

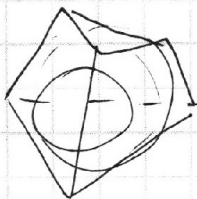
$$x^3 - y^3 - 3xy = x(x^2 + x - y^2 - 3y - 2) - x^2 + xy^2 + 2x - y^3$$

$$\overset{11}{x^3 + x^2 - xy^2 - 3xy - 2x} \quad (y+1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$$

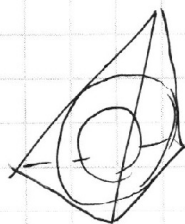
$$x^2y + xy - y^3 - 3y^2 - 2y \quad -y^3 - 3y^2 - 3y$$

$$x(5) + y(5) = x^2 + xy^2 + 2x - x^2y - xy + 3y^2 + 2y$$

$$3y^2 + xy^2 - x^2 - x^2y + 2x + 2y - xy$$



$$x = y + 1$$



$$1 + 4(y^2 + 3y + 2)$$

$$4y^2 + 12y + 9$$

$$(2y + 3)^2$$

$$x(x+1) - (y+2)(y+1)$$

$$(x+y-2)(x-y+1)$$

$$\frac{-1 \pm (2y+3)}{2}$$

$$y+1$$

$$-y-2$$

$$(x+y+2)(x-y-1) = 0$$

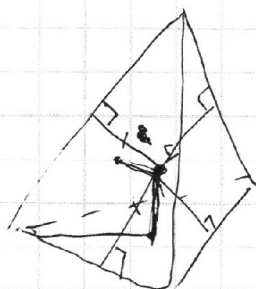
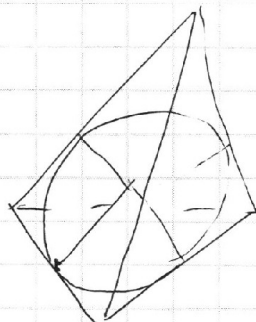
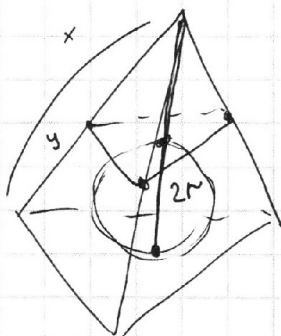
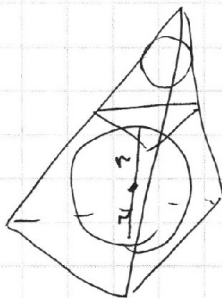
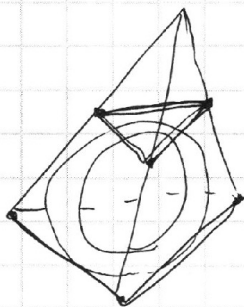


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



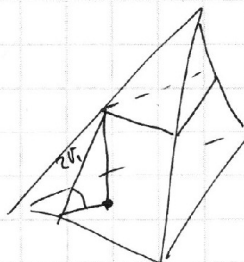
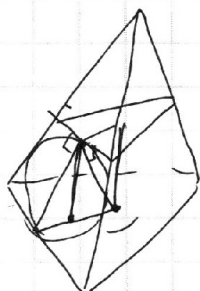


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

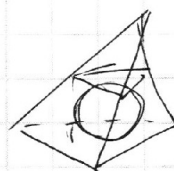
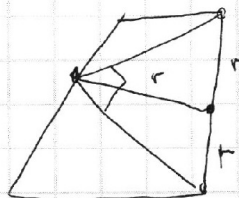
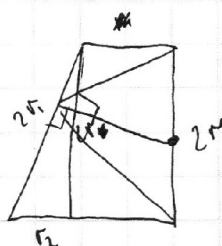
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

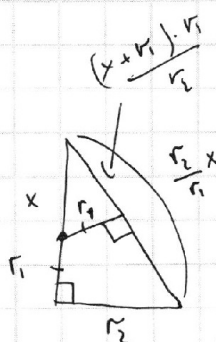
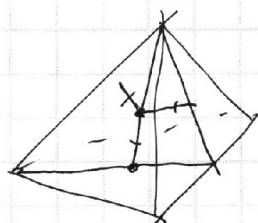


$$2r_1 \cdot \sin \varphi = 2r_2$$

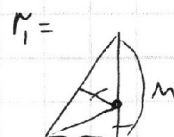
$$\frac{r_1}{r_2} = \sin \varphi$$



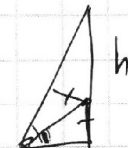
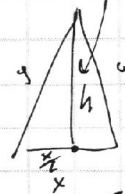
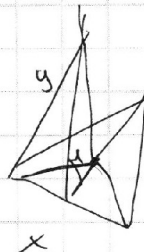
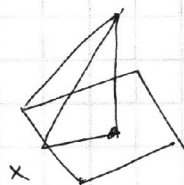
или



$$\mu = \frac{h \cdot \cos \varphi + \lg \varphi}{h \cdot \cos \varphi}$$



$$r_1 < r_2$$



$$r_1 = \frac{h \cdot x}{2} \cdot \frac{\arctg \frac{2h}{x}}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

