МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$ $= (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} \left(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha\right)\left(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 169. \end{cases}$$

   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [X] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №1.

1. ABC – квадрат $\Rightarrow A \cdot B \cdot C = n^2$, $n \in \mathbb{N}$

2. A – 4значное с одинаковыми цифрами $\Rightarrow A = 1111 \cdot x$, $x \in [1; 9]$ $(x \in \mathbb{N})$

3. $ABC = x \cdot 1111 \cdot BC = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow n \vdots 101$ (101–простое).

C не может иметь делитель 101 $\Rightarrow B \vdots 101 \Rightarrow B = y \cdot 101$, $y \in [1; 9]$ $(y \in \mathbb{N})$

4. $ABC = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot y \cdot 101 \cdot C = n^2$. B имеет цифру 6 $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = 6$, $B = 606$. $x \not\vdots 11 \Rightarrow C \vdots 11$, т.к. $ABC = n^2$.

$C = z \cdot 11$, $z \in [1; 9]$ $(z \in \mathbb{N})$, причём в C есть 3 $\Rightarrow z = 3$, $C = 33$

5. $ABC = x \cdot 11 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = n^2 = x \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2 \cdot m^2$, $x \in [1; 9] \Rightarrow x = 2$ или $x = 8 = 2 \cdot 2^2$.

Отсюда $(A; B; C) = (2222; 606; 33)$ или $(A; B; C) = (8888; 606; 33)$

Ответ: $(2222; 606; 33)$ и $(8888; 606; 33)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №2

а) $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$; $x, y > 0$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{(y+2) + (x-2) + 5}{(x-2)(y+2)} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} y+x+5=0 \quad ① \\ xy=(x-2)(y+2) \quad ② \end{array}\right. \\ x \notin \{0;2\} \text{ и } y \notin \{-2;0\} \end{array}\right.$$

① $y+x+5=0 \iff y+x=-5$, но $x, y>0 \Rightarrow$ невозможно.

② $xy=(x-2)(y+2) \iff xy=xy-2y+2x-4 \iff 2x-2y-4=0$

$x-y-2=0 \Rightarrow x-y=2$

$M = x^3-y^3-6xy = (x-y)(x^2+xy+y^2)-6xy = 2x^2+2xy+$
$+2y^2-6xy = 2x^2-4xy+2y^2 = 2(x^2-2xy+y^2) = 2\cdot$
$\cdot(x-y)^2 = 2\cdot 2^2 = 8$

Ответ: $M=8$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №3

а) $(\sin \pi x + \sin \pi y)\sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y)\cos \pi x$

$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$

$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cos(\frac{\pi}{2} - \pi x) + \cos \pi y \sin(\frac{\pi}{2} - \pi x) - \cos^2 \pi x = 0$

$\sin(\pi y + \frac{\pi}{2} - \pi x) - \cos 2\pi x = 0$

$\cos(\pi x - \pi y) = \cos 2\pi x$

$\left[\begin{array}{l} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -(\pi x - \pi y) + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \pi x + \pi y = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 3\pi x - \pi y = 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x + y = 2k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 3x - y = 2l, \quad l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Подходит любая пара, где $y = (2k - x)$, $k \in \mathbb{Z}$ или $y = (3x - 2l)$, $l \in \mathbb{Z}$

б) $\arcsin \alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin \alpha + \arcsin \beta \leq \pi$,

причём равенство достигается только если $\arcsin \alpha = \arcsin \beta = \frac{\pi}{2}$

arcsin существует $\Rightarrow x \in [-6; 6]$ и $y \in [-2; 2]$. Из рассуждения выше запрещена единственная пара — $(x, y) = (6; 2)$ (именно при этой паре $\arcsin\frac{x}{6} + \arcsin\frac{y}{2} = \pi$). Заметим, что из решения пункта а выходит, что при x - чётное, y тоже чётное, а при x - нечётное, y - нечётное.

[Пояснение: $2k$ - чёт = чёт; $2k$ - нечёт = нечёт; ~~нечёт~~

$3 \cdot$ чёт $- 2k =$ чёт; $3 \cdot$ нечёт $- 2k =$ нечёт]

Т.к. $x \in [-6; 6]$, $y \in [-2; 2]$, то x имеет 7 чётных значений, 6 нечётных, а y имеет 3 чётных, 1 нечётное.

Тогда пар: $7 \cdot 3 + 6 \cdot 1 - 1 = 21 + 12 - 1 = 32$ пары

(-1, т.к. убрали пару $(6; 2)$)

Ответ: а) $(x, y) = (x_0; 2k - x_0)$ или $(x, y) = (x_0; 3x_0 - 2\ell)$, где x_0 - любое действительное, $k, \ell \in \mathbb{Z}$

б) 32 пары

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №4.

n – одиннадцатиклассников ; x – добавленное к концу месяца количество билетов.

p(П и В попадут на начало месяца) = p(П и В начало) =

$$= \frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3)}{2\cdot 1} : \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{4\cdot 3}{n(n-1)}$$

p(П и В попадут на конец месяца) = p(П и В конец) = $\frac{C_{n-2}^{2+x}}{C_n^{4+x}}$ =

$$= \frac{(n-2)(n-3)\cdot\ldots\cdot(n-3-x)}{(2+x)!} : \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-3-x)}{(4+x)!} = \frac{(4+x)(3+x)}{n(n-1)}$$

Из условия: $6\cdot p$(П и В начало) $= p$(П и В конец)

$$6\cdot\frac{4\cdot 3}{n(n-1)} = \frac{(4+x)(3+x)}{n(n-1)}$$

$$6\cdot 4\cdot 3 = (4+x)(3+x) = 12+3x+4x+x^2$$

$$x^2+7x+12-72=0$$

$$x^2+7x-60=0$$

$$(x+12)(x-5)=0$$

$\left[\begin{array}{l} x=-12 \\ x=5 \end{array}\right.$ Т.к. билетов добавили ≥ 1, то $x>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=5$

В конце месяца имеем $4+x=4+5=9$ билетов

Ответ: 9 билетов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

по сумме углов: $\angle PH_pC = 180^\circ - \angle H_pPC - \angle H_pCP =$

$= 180^\circ - \gamma - (\alpha + \beta) = 90^\circ$.

$\angle OH_pC = 90^\circ \Rightarrow H_p$ – середина AC (сер. пер. AC проходит через т. O). Тогда $AH_p = \frac{AC}{2} = 17{,}5$

Построим высоту BH в $\triangle ABC$. Из подобия $\triangle ABH \sim \triangle APH_p$ (по 2 углам): $BH : PH_p = BA : PA =$

$= \frac{30}{25} = \frac{6}{5}$

$PH_p = \sqrt{25^2 - 17{,}5^2}$

$S_{\triangle ABC} = \frac{BH \cdot AC}{2} = \frac{\frac{6}{5} PH_p \cdot 35}{2} = 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{25^2 - 17{,}5^2} =$

$= 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{\left(\frac{50}{2}\right)^2 - \left(\frac{35}{2}\right)^2} = 3 \cdot 7 \cdot \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot (10^2 - 7^2)} = \frac{3 \cdot 7 \cdot 5}{2}\sqrt{51} =$

$= 52{,}5\sqrt{51}$

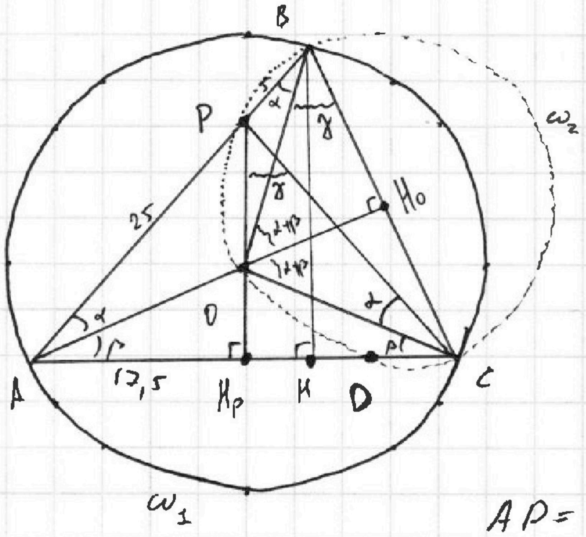
Ответ: $52{,}5\sqrt{51}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача №5 $AC = 35.$



По степени точки для окр. ω_2, относительно т. A: $AP \cdot AB = AC \cdot x$, где x – расстояние до [illegible] AC, где AC пересекает ω_2

$AP = 25$; $AB = AP + PB = 25 + 5 = 30$

$x = \dfrac{AP \cdot AB}{AC} = \dfrac{25 \cdot 30}{35} = \dfrac{150}{7} < 35 \Rightarrow$ т. $D \in AC$, что $AD = x$, $\omega_2 = (BPODC)$

Из O – центр оп. окр. $\triangle ABC$: $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$; $\angle OAC = \angle OCA = \beta$

Из вписанностей: $\angle PBO = \angle PCO = \alpha$; $\angle OPC = \angle OBC = \gamma$

$\angle BOC = 2\angle BAC$, т.к. центральный угол в окр. ω_1 $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle BOC = 2(\alpha+\beta)$. Построим перпендикуляр из т. O на BC (основание – т. H_0). Тогда, т.к. $\triangle BOC$ р/б, то $\angle BOH_0 = \angle COH_0 = (\alpha+\beta)$; $\angle OH_0B = 90°$

Из $\triangle OH_0B$ получаем, что $(\alpha+\beta) + \gamma = 90°$

Если продлить PO до пересечения с AC (т. H_p), то в $\triangle PCH_p$

$13^2-50\sin^2\beta,\ 13^2-50\cos^2\beta>0$. Тогда надо

$\sqrt{13^2-50\sin^2\beta}=\sqrt{13^2-50\cos^2\beta}$

$13^2-50\sin^2\beta=13^2-50\cos^2\beta$

$\sin^2\beta=\cos^2\beta$, $\beta\in[0;\frac{\pi}{2}]$

$\sin\beta=\cos\beta \Rightarrow \beta=\frac{\pi}{4}$

Итак, max достигается при $\beta=\frac{\pi}{4}$

$M=13\pi+2\left(\sqrt{13^2-50\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}+\sqrt{13^2-50\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}\right)=$

$=13\pi+4\sqrt{169-25}=13\pi+4\cdot\sqrt{144}=13\pi+4\cdot12=$

$=48+13\pi$

Достигаю при $\beta=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Также достигаемо при симметричных отн. оси x или y, т.е.

$\beta=\pi+\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $\beta=\pi-\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $\beta=2\pi-\frac{\pi}{4}+2\pi k$.

Итого: $\left[\begin{array}{l}\beta=\frac{\pi}{4}+2\pi k\\ \beta=\frac{3\pi}{4}+2\pi k\\ \beta=\frac{5\pi}{4}+2\pi k\\ \beta=\frac{7\pi}{4}+2\pi k\end{array}\right.\xrightarrow{\text{вернёмся к }\alpha}\left[\begin{array}{l}\alpha=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\\ \alpha=-\frac{\pi}{4}+2\pi k\\ \alpha=\frac{\pi}{4}+2\pi k\\ \alpha=\frac{3\pi}{4}+2\pi k\end{array}\right.$

$\boxed{\alpha=\beta-\pi}$ Ответ: $M=48+13\pi$;

$\alpha\in\left\{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right\}$, $k\in\mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Можно решать в условиях $\beta \in [0; \frac{\pi}{2}]$, ~~т.~~ (в первой четверти), т.к. решения, достигающие макс. периметра M — это симметричные отражения относительно оси x, или y, или обеих сразу случаи.

Заштрихованная область на картинке — наша фигура $\Phi(\alpha)$. Сначала посчитаем длину дуг ABC и DE.

BCEF — р/бокая трапеция $\Rightarrow \cup BC = \cup EF$. $\triangle ADD$ — р/б $\Rightarrow$ $\Rightarrow \cup AB = \cup BD$. Тогда $\cup ABC + \cup DE = \cup AB + \cup BC + \cup DE =$ $= \cup BD + \cup DE + \cup EF$ — пол-окружности. Длина $= \pi \cdot 13$.

Осталось посчитать $AO + OC + OD + OE$. Это тоже, что и $2(AO_y + CO_x)$

$$AO_y = \sqrt{13^2 - (5\sqrt{2}\sin\beta)^2}; \quad CO_x = \sqrt{13^2 - (5\sqrt{2}\cos\beta)^2}$$

$$\max(2AO_y + 2CO_x) = 2\max\left(\sqrt{13^2 - 50\sin^2\beta} + \sqrt{13^2 - 50\cos^2\beta}\right)$$

$$f(\beta) = \sqrt{13^2 - 50\sin^2\beta} + \sqrt{13^2 - 50\cos^2\beta}$$

$$f'(\beta) = \frac{-50 \cdot 2\sin\beta\cos\beta}{2\sqrt{13^2 - 50\sin^2\beta}} + \frac{-50 \cdot 2\cos\beta(-\sin\beta)}{2\sqrt{13^2 - 50\cos^2\beta}} = \frac{50}{2}\sin(2\beta) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{\sqrt{13^2 - 50\cos^2\beta}} - \frac{1}{\sqrt{13^2 - 50\sin^2\beta}}\right) = 0 \quad \text{(для поиска max)}$$

1) $\sin(2\beta) = 0$, $\beta \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$

2) $$\frac{1}{\sqrt{13^2 - 50\cos^2\beta}} - \frac{1}{\sqrt{13^2 - 50\sin^2\beta}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{13^2 - 50\sin^2\beta} - \sqrt{13^2 - 50\cos^2\beta}}{\sqrt{13^2 - 50\cos^2\beta} \cdot \sqrt{13^2 - 50\sin^2\beta}} = 0$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

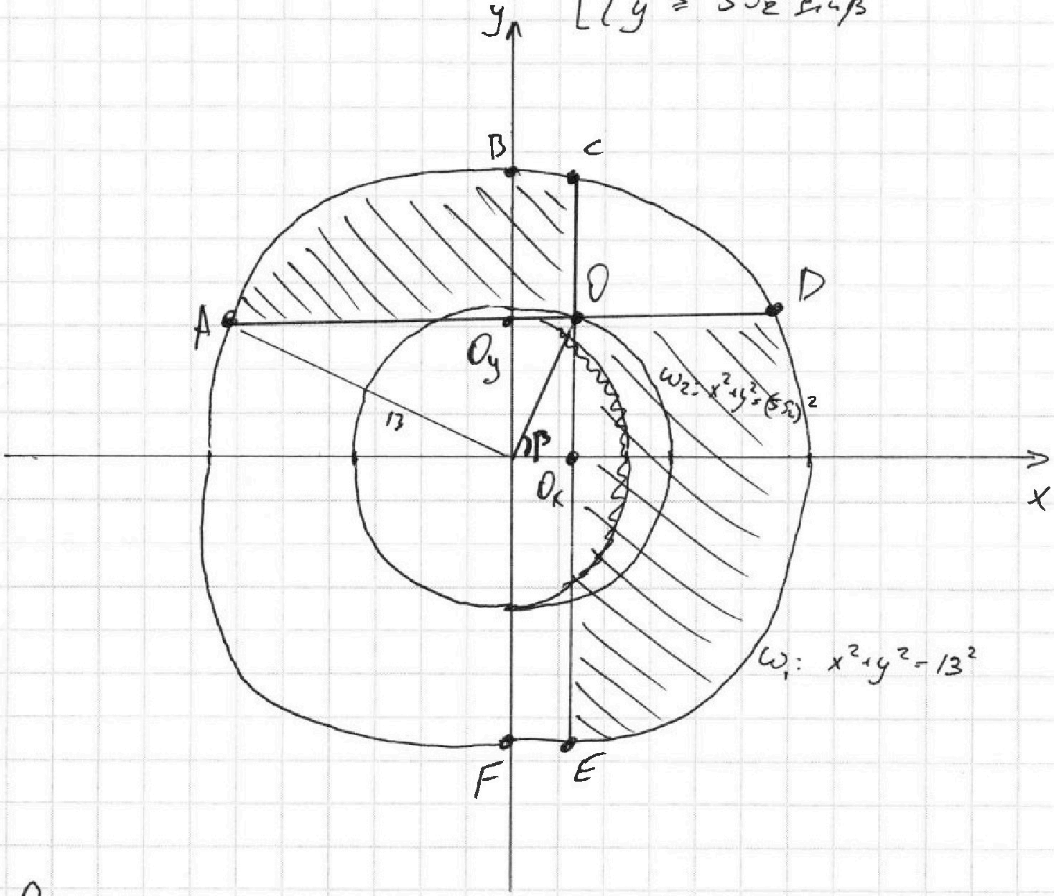
Задача №6

$$\begin{cases}(x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha)\le 0\\ x^2+y^2\le 169\end{cases}$$

Изобразим решения данной системы на графике.

$\beta=\pi+\alpha$: $\cos\beta=-\cos\alpha$; $\sin\beta=-\sin\alpha$

Решения первого уравнения: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 5\sqrt{2}\cos\beta\\ y\le 5\sqrt{2}\sin\beta\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 5\sqrt{2}\cos\beta\\ y\ge 5\sqrt{2}\sin\beta\end{cases}\end{array}\right.$



Построим окружности ω_1 и ω_2 радиуса 13 и $5\sqrt{2}$ соотв.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sqrt{13^2 - 50\sin^2\beta} + \sqrt{13^2 - 50\cos^2\beta} = f(\beta) \qquad \beta \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$f'(\beta) = \frac{-50\cdot 2\sin\beta\cos\beta}{2\sqrt{13^2-50\sin^2\beta}} + \frac{-50\cdot 2\cos\beta\cdot(-\sin\beta)}{2\sqrt{13^2-50\cos^2\beta}} = \frac{50\sin(2\beta)}{2}\cdot$

$\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{13^2-50\cos^2\beta}} - \frac{1}{\sqrt{13^2-50\sin^2\beta}}\right) = 0 \qquad \boxed{2\beta = \frac{\pi}{2}} \to \beta = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\sqrt{13^2-50\sin^2\beta} - \sqrt{13^2-50\cos^2\beta}}{\sqrt{\underbrace{13^4 - 13^2\cdot 50}_{>0}\cancel{\ldots}\beta + \underbrace{50^2\sin^2\beta\cos^2\beta}_{\geq 0}}} = 0$

$\sqrt{13^2 - 50\sin^2\beta} = \sqrt{13^2 - 50\cos^2\beta}$

$50\sin^2\beta = 50\cos^2\beta \qquad \sin^2\beta = \cos^2\beta \qquad \sin\beta = \cos\beta \to \beta = \frac{\pi}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\sin^2\pi x + \sin\pi y \sin\pi x = \cos^2\pi x - \cos\pi y \cos\pi x$

$PH = \sqrt{25^2 - 17{,}5^2}$

$\sin\pi y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi y\right)$

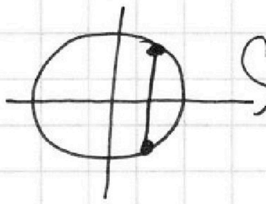
$BD' = \frac{6}{5} \cdot PH$

$\sin\pi y \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) + \cos\pi y \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi x\right) = \sin\left(\pi y + \frac{\pi}{2} - \pi x\right) = \cos^2\pi x -$

$- \sin^2\pi x = \cos 2\pi x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\pi x - \pi y)\right) = \cos(\pi x - \pi y)$

$\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$



$S = \frac{BD' \cdot 35}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -(\pi x - \pi y) + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

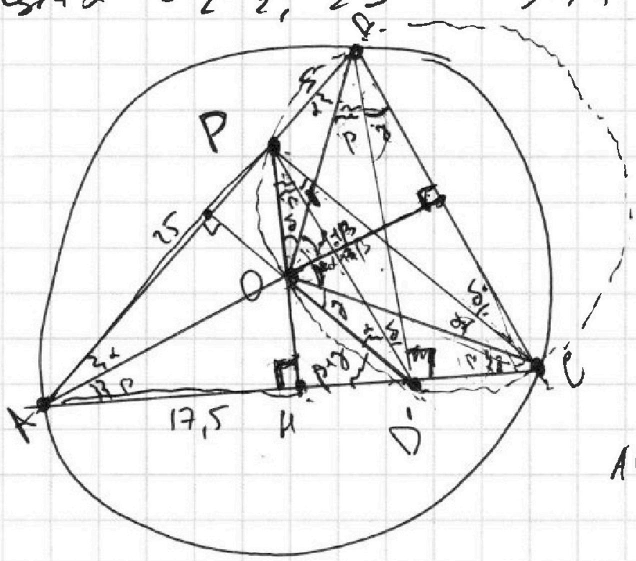
$\frac{\text{н}4+\text{н}4}{4+4}$ $\frac{\text{н}4+\text{н}4}{4+4}$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x = -\pi y + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \to y + x = 2k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 3\pi x = \pi y + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z} \to 3x + y = 2l,\ l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

2н4 3ч $y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ Запрет. пара: $(x, y) = (6; 2)$

6н4 7ч $x \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$\arcsin\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ $3 \cdot 7 + 6 \cdot 2 - 1 = 21 + 12 - 1 = 32$



$\frac{AD}{AP} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AP}{AC}$

$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 90^\circ - \alpha - \beta$

$2\alpha + \beta + \delta = 90^\circ =$

$AP : PB = AH : HD' = 5 : 1$

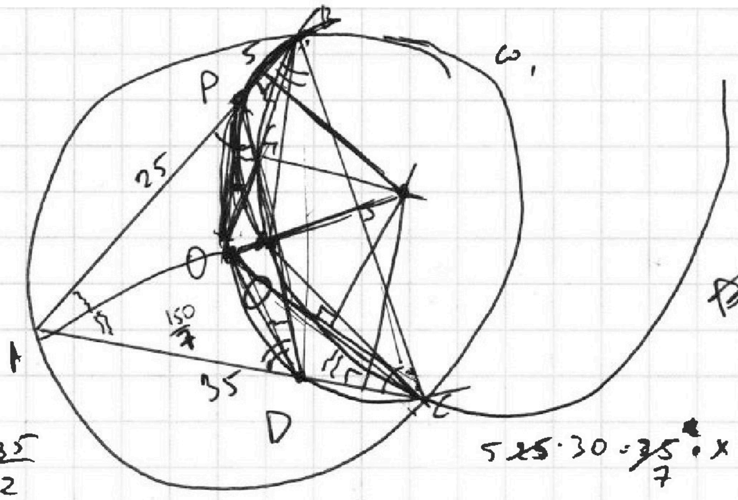
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~1 2 3 4 5~~ 6 7



$7\cdot 35 = 245$

$\gamma + \beta\gamma + 2(\gamma+\beta\gamma) = 180°$

$3(\gamma+\beta\gamma) = 180°$

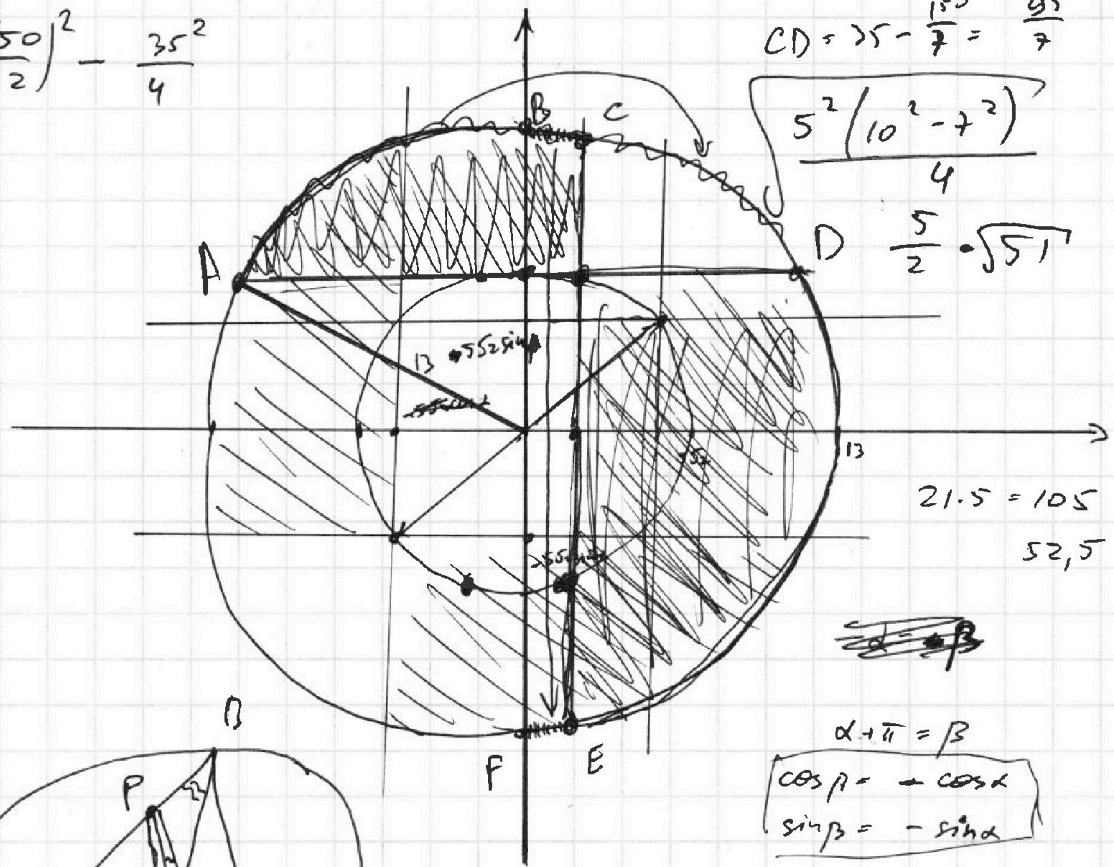
$\gamma + \beta\gamma = 60°$

$17{,}5 \quad \frac{35}{2}$

$\left(\frac{50}{2}\right)^2 - \frac{35^2}{4}$

$5\cdot 30 = \frac{35}{7}\cdot x \qquad x = \frac{150}{7}$

$CD = 35 - \frac{150}{7} = \frac{95}{7}$



$\sqrt{\frac{5^2(10^2-7^2)}{4}}$

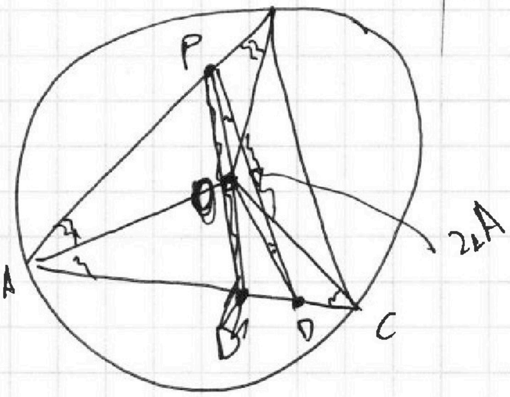
$\frac{5}{2}\cdot\sqrt{51}$

$21\cdot 5 = 105$

$52{,}5$

$\alpha + \pi = \beta$

$\boxed{\begin{aligned}\cos\beta &= -\cos\alpha\\ \sin\beta &= -\sin\alpha\end{aligned}}$



$P = 2\sqrt{13^2 - 50\sin^2\beta} + 2\sqrt{13^2 - 50\cos^2\beta} +$

$+ \frac{\pi\cdot 13}{\text{const}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$1111 \cdot x \quad x \in [1; 9] \qquad ABC = n^2$

$\underbrace{11 \cdot 101}$ – простые

$11 \cdot 101 \cdot x \cdot B \cdot C = n^2 \qquad n \vdots 101$

$\boxed{B \vdots 101}$

$B = 101 \cdot y \quad y \in [1; 9] \quad 6$ – цифр $B \Rightarrow \boxed{B = 6 \cdot 101}$

$\underbrace{x \cdot 11 \cdot 101} \cdot \underbrace{6 \cdot 101} \cdot C = n^2 = 101^2 \cdot n_2^2$

$C \vdots 11 \quad 3$ – цифры $C \quad \boxed{C = 33}$

$x \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \qquad x = 2$ или 8

8888; 606; 33
2222; 606; 33

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{(y+2)} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{(y+2)+(x-2)+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\left[\begin{array}{l} x+y+5=0 \to x+y=-5 \quad \boxed{?} \qquad \boxed{x-y=2} \\ xy = (x-2)(y+2) = xy - 2y + 2x - 4 \to x-y-2=0 \end{array}\right.$$

$(x-y)(x^2+xy+y^2) - 6xy \qquad 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$

$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 6xy = 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x-y)^2 = 2 \cdot 2^2 = 8$

n 11-пластинок

$(4+x)$ билетов

$$p(П_и B) = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2 \cdot 1}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}$$

$$p_н(П_и B) = \frac{C_{n-2}^{2+x}}{C_n^{4+x}} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)\cdot \ldots \cdot (n-3-x)}{(2+x)!}}{\frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-3-x)}{(4+x)!}}$$

$$p(П_и B) = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$$

$\cancel{x=-12}$

$(x+12)(x-5) = 0 \to x=5$

$$p_н(П_и B) = \frac{(4+x)(3+x)}{n(n-1)}$$

$5 + 4 = \underline{\underline{9}}$

$$6 \cdot \frac{4 \cdot 3}{\cancel{n(n-1)}} = \frac{(4+x)(3+x)}{\cancel{n(n-1)}} \to 72 = 12 + 3x + 4x + x^2$$

$x^2 + 7x - 60 = 0$