



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- † 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- † 2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- † 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

- † 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

- ✓ 5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

- † 6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

51

$$A = 1111 \cdot x, \text{ где } x \in [1; 9], x \in \mathbb{N} (\text{цифра}).$$

$$B = _ _ 2 \text{ или } _ _ \text{ или } 2 _ _$$

$$C = 3 _ \text{ или } _ 3.$$

$$A \cdot B \cdot C = N^2, \text{ где } N - \text{некоторое натур. число.}$$

$$A \cdot B \cdot C = 1111x \cdot B \cdot C$$

Рассмотрим число 1111 и подбьем его делители.

$$1111 = 11 \cdot 101$$

простое простое

$$3 \cdot x \quad 2 \cdot x \quad \text{циф.}$$

$$\text{Но тогда } N^2 = 11 \cdot 101 \cdot x \cdot \underbrace{B}_{202} \cdot \underbrace{C}_{33}$$

такими образом у нас должны быть еще 11 и 101, как делители B или C, но тогда

$$B: 101 \Rightarrow \text{подходит только } 202, \text{ т.к. } 2 \text{ входит в } B,$$

$$\text{а } C: 11 \Rightarrow C = 33, \text{ т.к. } 3 \text{ входит в } C.$$

Такими образом $x = 2 \cdot 3 = 6$ - чтобы дописать произведение до полного квадрата.

$$\text{Из этого } A = 1111 \cdot 6 = 6666$$

$$B = 202 = 101 \cdot 2$$

$$C = 33 = 11 \cdot 3.$$

$$A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot 6 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 6^2 = (101 \cdot 11 \cdot 6)^2$$

- а это нам и надо было добиться

Из этого: нам ~~надо~~ подходит только $A, B, C: (6666; 202; 33)$.

Ответ: $(6666; 202; 33)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ω § 2

Запишем полуз. выражения, согласно условию задачи: (x, y - положительные).

$$\begin{cases} K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \quad | \cdot xy \\ K = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad | \cdot (x-1)(y+1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} xyK = x+y+2 \\ (x-1)(y+1)K = y+1+x-1+2 \end{cases} \text{сокр.}$$

получаем: $\begin{cases} xyK = x+y+2 \\ (x-1)(y+1)K = x+y+2 \end{cases}$ - порежим:

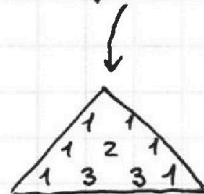
$$\frac{xy}{(x-1)(y+1)} = 1 \Rightarrow xy = (x-1)(y+1) \Rightarrow \cancel{xy} = \cancel{xy} + x - y - 1 \Rightarrow \Rightarrow \underline{x = y + 1.}$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Из этого $M = 1$.

Ответ: 1

пирамида.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ω3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x.$$

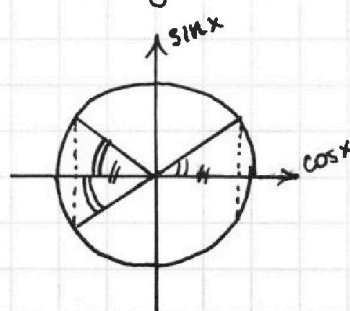
$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x.$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = -(\cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y).$$

$$\cos(2\pi x) = -\cos(\pi x + \pi y).$$

Из картинки можно увидеть
выбор, что:

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi x = \pi + \pi x + \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi - \pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \begin{array}{l} : \pi \\ : \pi \end{array}.$$



$$\left[\begin{array}{l} 2x = 1 + x + y + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 1 - x - y + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \begin{array}{l} x = 1 + y + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 1 - y + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

пусть $y = t$, где t - некоторое действит. число, $t \in \mathbb{R}$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 + t + 2k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{3} - \frac{t}{3} + \frac{2}{3}k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

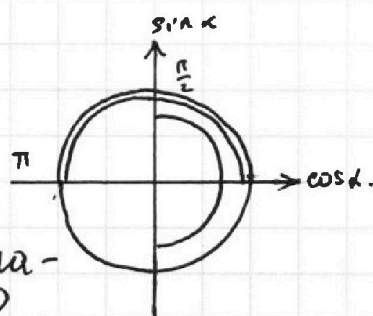
Тогда нам удовлетворяют пары $(x; y)$ такие, что.

$$(1 + t + 2k; t), t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} \text{ и } \left(\frac{1}{3} - \frac{t}{3} + \frac{2}{3}k; t\right), t \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}$$

Ответ на пункт а.

$$\delta) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

Заметим, что это выполняется для любых $(x; y)$, кроме $x=5; y=4$.
В этом случае между левоб и прав-
вой частями будет равенство, но
такие $(x; y)$ должны удовлетворять ОДЗ для
арс-функций, т.о. $(x \in [-5; 5]; y \in [-4; 4])$ $(5; 4)$ вне
отбросим $\Rightarrow x \in [-5; 5)$ и $y \in [-4; 4]$ или
 $x \in [-5; 5]$ и $y \in [-4; 4)$. (Отбрасываем или $x=5$,
или $y=4$ одновременно - одновременно).





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но мы знаем (из пункта а), что $y = t$, тогда т.к. по условию y — целое, попробуем перебрать $y = -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$ в какое из условий попад. ответов из пункта а.

1: $(1+t+2k; t), y=t, k \in \mathbb{Z}$

$t = -4: -3+2k \Rightarrow$ подход. $x = -5; -3; -1; 1; 3; 5$. (6).

$t = -3: -2+2k \Rightarrow$ подход. $x = -4; -2; 0; 2; 4$ (5)

$t = -2: -1+2k \Rightarrow$ подход $x = -5; -3; -1; 1; 3; 5$ (6).

$t = -1: 2k \rightarrow$ подход $\neq$ (5)

$t = 0: 1+2k \rightarrow$ подход $\neq$ (6)

$t = 1: 2+2k \rightarrow$ подход (5)

$t = 2: 3+2k \rightarrow$ подход (6)

$t = 3: 4+2k \rightarrow$ подход (5)

$t = 4: 5+2k \rightarrow$ подход. (6). $-1 = \underline{\underline{(5)}}$

т.к. (5; 4) не подход.

1: $(\frac{1}{3} - \frac{t}{3} + \frac{2}{3}k; t), t=y, k \in \mathbb{Z}$

$t = -4: \frac{5}{3} + \frac{2}{3}k, \text{ т.к. } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ подход $x = -5; -3; -1; 1; 3; 5$ (6)

$t = -3: \frac{4}{3} + \frac{2}{3}k, \text{ подход } x = -4; -2; 0; 2; 4$ (5)

$t = -2: x = -5; -3; -1; 1; 3; 5$ (6).

$t = -1: x = -4; -2; 0; 2; 4$ (5)

$t = 0: (6)$

$t = 1: (5)$

$t = 2: (6)$

$t = 3: (5)$

$t = 4: (6) - 1 = \underline{\underline{(5)}}$.

Но такие варианты уже были $\Rightarrow$ можно расписать верхнюю проверку, так как условие, найд. решение $(x; y)$:

Всего их: $\underbrace{6+5+6+5+6+5+6+5} + \underline{\underline{5}} = 11 \cdot 4 + 5 = 49$.

Ответ: а) см. выше; б) 49.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

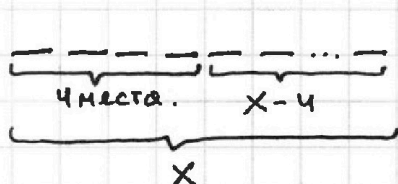
У4

4 билета

x - ординация тикетов.

вероятность $\uparrow 2,5$ раза.

найти y - дополн. билеты



1) В начале:

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$$

2) В конце:

$$\frac{4+y}{x} \cdot \frac{3+y}{x-1}$$

Из условия следует:

$$\frac{\frac{4+y}{x} \cdot \frac{3+y}{x-1}}{\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}} = 2,5 \Rightarrow \frac{(4+y)(3+y)}{4 \cdot 3} = 2,5.$$

$$12 + 7y + y^2 = 2,5 \cdot 4 \cdot 3.$$

$$12 + 7y + y^2 = 30.$$

$$y^2 + 7y - 18 = 0.$$

по обратной теореме Виетто: $\begin{cases} y_1 = -9 \\ y_2 = 2 \end{cases}$

(но кол-во год. билетов отриц. быть не может $\Rightarrow y = -9$ или не подходит $\Rightarrow y = 2$)

Ответ: $2+4 = 6$ билетов было выдано к концу месяца.

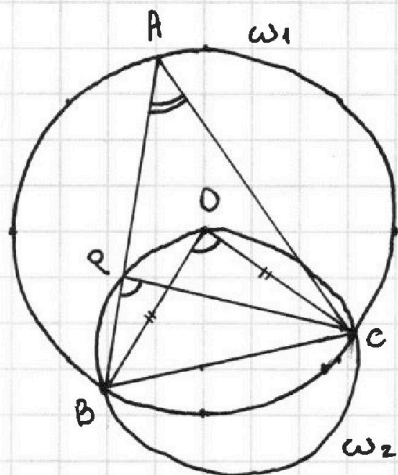


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5 5



$$AP = \frac{15}{2}; BP = 5; AC = 9.$$

Пусть $\angle BAC = 2\varphi$
но $\angle BAC$ - впис в окр ω_1 и опирается на $\widehat{BC}$, а $\angle BOC$ - центр. угол (O - центр ω_1) и опирается на $\widehat{BC} \Rightarrow \angle BOC = 2\angle BAC = 2\varphi$.

Но $\angle BOC, \angle BPC$ - впис в окр ω_2 и опираются на $\widehat{BC} \Rightarrow \angle BOC = \angle BPC = 2\varphi$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle PAC: PC^2 &= AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot \cos \varphi. \\ \text{Из } \triangle BPC: BC^2 &= BP^2 + PC^2 - 2BP \cdot PC \cdot \cos 2\varphi \\ \text{Из } \triangle BAC: BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \varphi. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{подставим } PC^2 \\ \text{приравняем.} \end{array} \right\}$$

$$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \varphi = BP^2 + AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cos \varphi - 2BP \cdot PC \cdot \cos 2\varphi$$

$$\uparrow$$

$$BP^2 + AP^2 + 2BP \cdot AP$$

$$2BP \cdot AP - 2(AP + BP)AC \cos \varphi = -2AP \cdot AC \cos \varphi - 2BP \cdot PC \cdot \cos 2\varphi.$$

$$2 \cdot 5 \cdot \frac{15}{2} - 2\left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 9 \cos \varphi = -2 \cdot \frac{15}{2} \cdot 9 \cos \varphi - 2 \cdot 5 \cdot PC \cos 2\varphi.$$

$$75 - 45 \cos \varphi = -15 \cdot 9 \cos \varphi - 10 \cdot PC \cos 2\varphi \quad | : 5$$

$$15 - 45 \cos \varphi = -27 \cos \varphi - 2PC \cdot \cos 2\varphi, \quad \cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi =$$

$$15 - 45 \cos \varphi = -27 \cos \varphi - (4 \cos^2 \varphi - 2)PC. \quad = 2 \cos^2 \varphi - 1.$$

$$PC(4 \cos^2 \varphi - 2) = 45 \cos \varphi - 27 \cos \varphi - 15$$

$$PC = \frac{18 \cos \varphi - 15}{4 \cos^2 \varphi - 2}, \quad \text{пусть } \cos \varphi = x, \text{ тогда } PC = \frac{18x - 15}{4x^2 - 2}$$

$$\text{Но } PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cos \varphi$$

$$PC^2 = \frac{225}{4} + 81 - 2 \cdot \frac{15}{2} \cdot 9 \cos \varphi.$$

$$2PC = \frac{18x - 15}{2x^2 - 1}$$

$$4PC^2 = 225 + 4 \cdot 81 - 4 \cdot 9 \cdot 15x.$$

$$(2PC)^2 = 4PC^2 = \frac{(18x - 15)^2}{(2x^2 - 1)^2}$$

$$\text{Из этого: } \frac{(18x - 15)^2}{(2x^2 - 1)^2} = 225 + 4 \cdot 81 - 4 \cdot 9 \cdot 15x.$$

Если решить его, то мы получим $\cos \varphi = x \Rightarrow \sin \varphi = \sqrt{1 - x^2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow S = \frac{(AP + BP) \cdot AC}{2} \sin \varphi \leftarrow \text{доставить до конца не удалось.}$

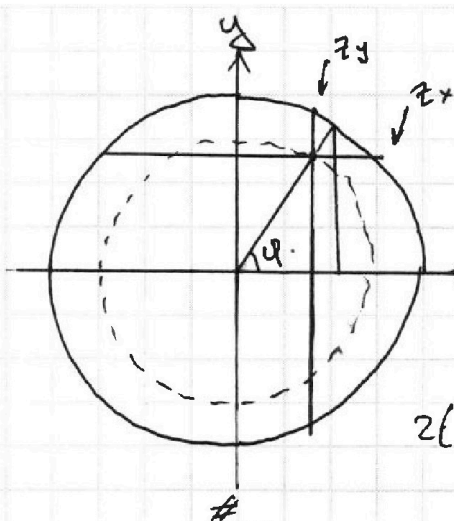


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$z_y = 2\sqrt{5^2 - (3.52 \cos \varphi)^2}$$

$$z_x = 2\sqrt{5^2 - (3.52 \sin \varphi)^2}$$

$$z_y + z_x = 2(\sqrt{25 - 18 \cos^2 \varphi} + \sqrt{25 - 18 \sin^2 \varphi})$$

Найдем $\max(z_y + z_x)$:

$$2(\sqrt{25 - 18 \cos^2 \varphi} + \sqrt{25 - 18 \sin^2 \varphi}) =$$

Заметим, что это выражение принимает наибольшее значение при $\varphi = 45^\circ + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

$$\max(z_y + z_x) = 2(\sqrt{25 - 18 \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{25 - 18 \cdot \frac{1}{2}}) =$$

$$= 2(4 + 4) = 16$$

$$\text{Сумма } p_{\text{пл}} = \frac{S_{\text{окр}}}{2} = \frac{2\pi R}{2} = \frac{2\pi \cdot 5}{2} = 5\pi - \text{const}$$

Из этого $P_{\text{max}} = M = 5\pi + 16$. — принимает такое значение при $\varphi = 45^\circ + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Но тогда } \lambda = \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}k = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}d, \text{ где } d \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $M = 5\pi + 16$, принимает такое значение при $\lambda = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}d, \text{ где } d \in \mathbb{Z}$.

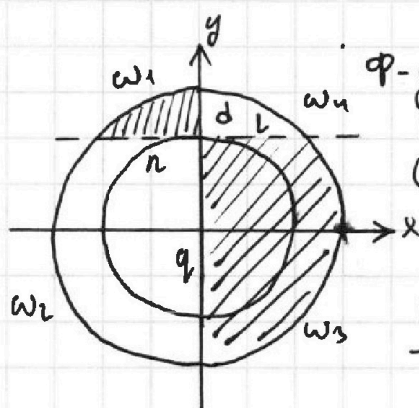


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



φ -защитная.

$$\varphi = 90^\circ$$

($\varphi = \frac{\pi}{2} k$), где $k \in \mathbb{Z}$ - будут симметричны.

Отметим отрезки ограничивающих линий, как n, d, L, q - показано на рисунке.

но тогда эти n, q треугольники имеют катеты опирающиеся на дуги $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, будем обозначать такие катеты, как $k(\omega_1), k(\omega_2)$ и т.д.

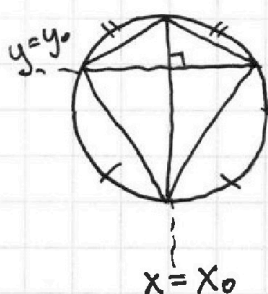
$$k^2(\omega_1) = n^2 + d^2$$

$$k^2(\omega_2) = n^2 + q^2$$

$$k^2(\omega_3) = q^2 + L^2$$

$$k^2(\omega_4) = d^2 + L^2$$

$$\text{но тогда } k(\omega_1)^2 + k(\omega_3)^2 = k(\omega_2)^2 + k(\omega_4)^2$$



$$k(\omega_1) + k(\omega_3) = k(\omega_2) + k(\omega_4),$$

случае, когда $\varphi = 90^\circ$.

Если ~~нечетно~~ сместим x_0 на некоторое $\Delta\omega$, то получим (рис 2), но тогда

$$k'(\omega_1) = k(\omega_1) - \Delta\omega$$

$$k'(\omega_2) = k(\omega_2) + \Delta\omega$$

$$k'(\omega_3) = k(\omega_3) - \Delta\omega$$

$$k'(\omega_4) = k(\omega_4) + \Delta\omega$$

$$\Rightarrow \text{сумма сохраняется } k'(\omega_1) + k'(\omega_4) = k'(\omega_2) + k'(\omega_3)$$

но если теперь будем сдвигать y_0 , то такие сдвиги на некоторое $\Delta\omega_2$, и тогда сохраняется равенство $k(\omega_1) + k(\omega_3) = k(\omega_4) + k(\omega_2)$ $\Rightarrow$ у нашей фигуры $\varphi(L)$ длина дуг всегда равна (сумма длин дуг) $= \frac{1}{2} S_{\text{окр}}$.

А это означает, что длина периметра.

Нашей фигуры φ зависит только от суммы длин ограничивающих прямых $y = y_0$ и $x = x_0$, входящих внутрь исходного круга.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

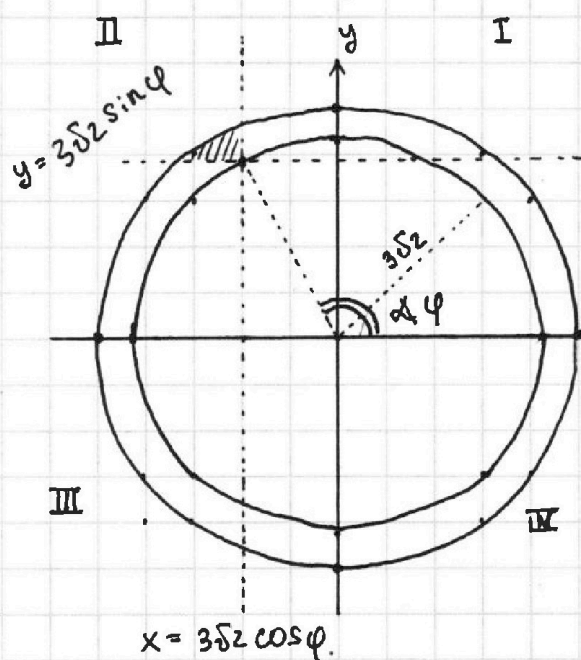
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

56

$\varphi(\lambda): \begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$ - уравнение окружности с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 5 (окружность заполнена внутри т.к. $x^2 + y^2 \leq R^2 \rightarrow$ круг.)



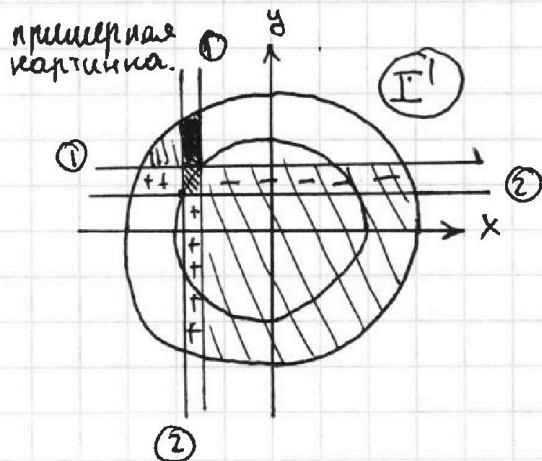
$$\lambda = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi))(y - 3\sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)) \\ (x - 3\sqrt{2} \cos \varphi)(y - 3\sqrt{2} \sin \varphi) \end{cases}$$

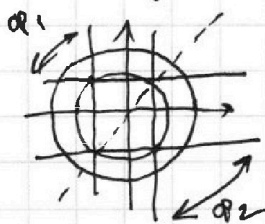
$(x - 3\sqrt{2} \cos \varphi)(y - 3\sqrt{2} \sin \varphi) \leq 0$
 $\Rightarrow x - 3\sqrt{2} \cos \varphi$ и $y - 3\sqrt{2} \sin \varphi$ должны иметь разные знаки или $x = 3\sqrt{2} \cos \varphi$, $y = 3\sqrt{2} \sin \varphi$ (прямые показаны на рисунке).

Обозначим области с I по IV относительно нашего построенного перекрестия прямых $y = 3\sqrt{2} \sin \varphi$ и $y = -x = 3\sqrt{2} \cos \varphi$, как

это показано на рисунке. (нам подходит II и IV четверть).



Заметим, что $\varphi(\lambda)$, будет симметрична, относительно оси биссектрисы I' четверти, т.е. фигуры $\varphi_1(\lambda_1)$ и $\varphi_2(\lambda_2)$ будут иметь оринокосый периметр.





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Черновик:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad | \cdot xy.$$

$$y+x+2 = \frac{xy}{x-1} + \frac{xy}{y+1} + \frac{2xy}{(x-1)(y+1)} \quad | \cdot (x-1)(y+1).$$

$$\begin{array}{r} .81 \\ 4 \\ \hline 324 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ +324 \\ \hline 549 \end{array}$$

$$AB \cdot AC$$

$$549 - 2 \cdot 3 \cdot 15 = 549 - 270.$$

$$\cos \varphi = x, \quad \sin \varphi = \sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{array}{r} .30 \\ 9 \\ \hline 270. \end{array} \quad \begin{array}{r} .549 \\ -270 \\ \hline 279 \end{array}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x.$$

$$2 \sin \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \frac{\pi}{2}(x-y) \cos \pi x$$

$$\sin \frac{\pi}{2}(x+y) \sin \pi x = \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cos \pi x.$$

$$\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}(x+y)) \operatorname{tg} \pi x = 1.$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y.$$

$$\cos 2\pi x = -\cos(\pi y + \pi x).$$

$$2\pi x = \pi y + \pi x + \pi k, \text{ где } k = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-3; 1; 3; 5; -3; -5.$$

$$x^2 \cdot x^2 \cdot x \cdot x^0 = (x^2 \cdot x^2 \cdot x^0) (x^0 \cdot x).$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = k \cdot xy.$$

$$y+x+2 = kxy.$$

$$x-1+y+1+2 = k(x-1)(y+1).$$

$$A; B; C$$

$$A = 1111 \cdot x, x \in [1; 9], x \in \mathbb{N}$$

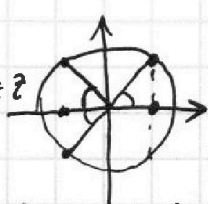
$$1111x \cdot BC.$$

$$\frac{(y-15)^2}{(\frac{21}{2}-1)^2} = \frac{6^2}{\frac{1}{4}} = 36 \cdot 4 = 144.$$

$$\begin{array}{r} .1111 \\ 93 \\ \hline 181 \end{array} \quad \begin{array}{r} 31 \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \times 1, 1 \\ 2 \times 1, 2 \\ 3 \times 1, 2 : 2 \\ 4 \times 1, 1 \\ 5 \times 2, 1 : 1 \\ 6 \times 1, 2, 3 : 3 \\ 7 \end{array}$$

$$+32.$$



$$\begin{array}{r} .1111 \\ 7 \\ \hline 77 \\ 41 \\ \hline 35 \\ 61 \\ \hline \dots \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ .39 \\ 3 \\ \hline 117 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} .1111 \\ 78 \\ \hline 331 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} .39 \\ 2 \\ \hline 78 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} .29 \\ 3 \\ \hline 87 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} .39 \\ 9 \\ \hline \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Черновик.

$\varphi(a)$

$$A = \overline{XXXX}$$

$$B = \overline{2yz}, \overline{y2z}, \overline{yz2}$$

$$C = \overline{3n}, \overline{n3}$$

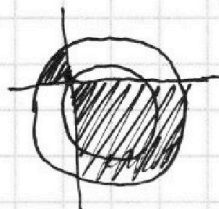
$$A \cdot B \cdot C = N^2, N - \text{натур. число.}$$

$$1111 \cdot 112 \cdot 13 = 1617616.$$

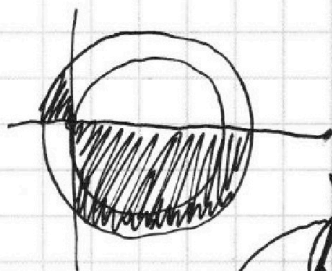
$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha.$$

$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha.$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ \cdot 2,5 \\ \hline 10,0 \end{array}$$



X орт-в.



$S_{\triangle ABE} = ?$

$$AP = \frac{15}{2}$$

$$BP = 5$$

$$AC = 9.$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}.$$

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

48 иллы.

$$\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$$

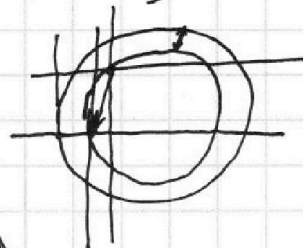
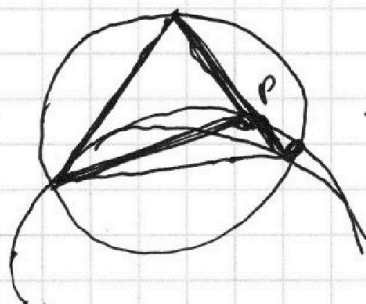
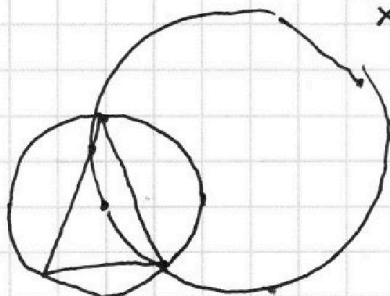
4

$x-4$.

$$\frac{4}{x} - \text{в иллы.}$$

$$\frac{4+y}{x} + \frac{4+y-1}{x-1}.$$

$$\frac{4+y}{x}$$



$$5-353$$



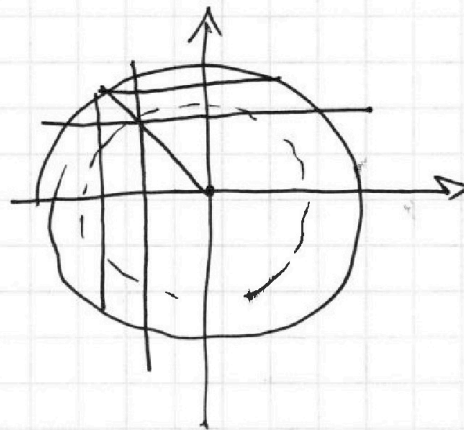
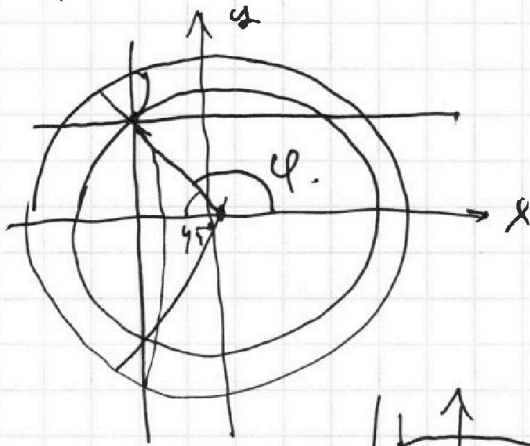
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

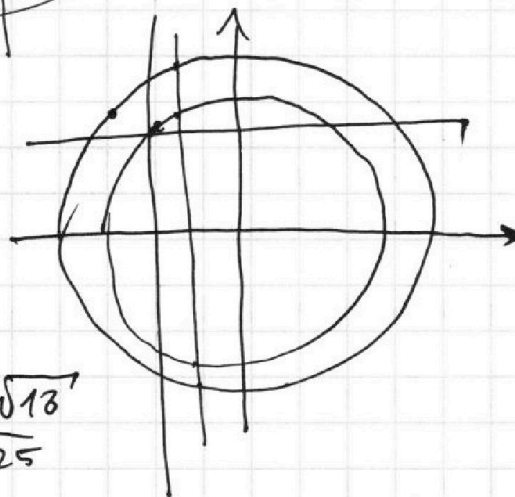
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

черновик.



101



$$\begin{aligned} 5 \cos \varphi \\ 5 \sin \varphi \\ 3\sqrt{2} \sin \varphi \\ 3\sqrt{2} \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} &= \sqrt{18} \\ 5 &= \sqrt{25} \end{aligned}$$

$$18 \cdot \frac{1}{2} = 9$$

$$\left(2\sqrt{25-18\cos^2\varphi} + 2\sqrt{25-18\sin^2\varphi} \right)'$$

$$= 5 + \sqrt{25-18} = 5 + \sqrt{7}$$

$$\sqrt{25-9} + \sqrt{25-9} = 4 + 4 = 5 + 3$$

$$\begin{array}{r} 33 \\ 33 \\ \hline 99 \\ 99 \\ \hline 1089 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111 \mid 13 \\ -101 \mid 7 \\ \hline 7 \mid 1 \\ -31 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 110 \\ 110 \\ \hline 110 \\ 11 \\ \hline 12100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 50 \\ 50 \\ \hline 2500 \\ 20 \\ 20 \\ \hline 700 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ 30 \\ \hline 300 \\ 35 \\ 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$