



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:
- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
  - $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
  - $C$  — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
  - произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .  
б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
- $$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одноклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одноклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одноклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$A = \overline{aaaa} \implies A = a \cdot 11 \cdot 101 \quad (a \in \{1; 2; \dots; 9\})$$

$$\begin{aligned} B &= \overline{bc1} \text{ или } \overline{1bc} \text{ или } \overline{b1c} \\ &\uparrow \\ C &= \overline{d5}, \overline{5d} \\ &\uparrow \\ &\text{Ч.т.д.} \\ B:101 & \\ A \cdot B \cdot C &= k^2, k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Заметим, что для того чтобы  $A \cdot B \cdot C$  было полным квадратом при усл. 2), то

$$A = a \cdot 11 \cdot 101 \quad (a \in \{1; 2; \dots; 9\})$$

↑  
простые

( $A; B; C$ ) - ?

$B \cdot C$  хотят быть  $11 \cdot 101$ , но ~~это квадрат~~  
~~если одна из парных~~  
~~чисел~~, то

Пусть  $\cdot A = 1111 = 11 \cdot 101 \neq \emptyset$

$$\Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = 55$$

$$B:101 \rightarrow 1). B = \overline{1bc} \Rightarrow B = 101 \neq \emptyset$$

$$2). B = \overline{bc1} \neq \emptyset$$

$$3). B = \overline{b1c} \Rightarrow B = 101 \neq \emptyset$$

$B$  квадрат  
должен быть  
и  $11$ , и  $101$   
 $\Rightarrow B:101$   
 $C:11$   
 $\Rightarrow C = 55$

Если  $C = 55$ ,  
как можно, чтобы  
б  $A \cdot B$  было "квадратом"  
то  $B = 101$ .

$$A = 5555 = 5 \cdot 11 \cdot 101$$

$$B = 101$$

$$\Rightarrow (5555; 101; 55) \quad \text{+}$$

$$C = 55 = 5 \cdot 11$$

11  
22  
33  
44  
55  
66  
77  
88  
99

101 (101)

202  
303  
404  
505  
606  
707  
808  
909

$$\begin{aligned} A &= 9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101 \\ B &= 101 \\ C &= 99 \end{aligned}$$

Ответ:  $(9999; 101; 99)$

Ч.т.д.  
 $B:101$   
 $B = \overline{bc1}$  или  $\overline{b1c}$   
 $\Rightarrow$  единичн. трёхзначн.  
 числа  $\Rightarrow B = 101$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x, y > 0 \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \rightarrow M = ?$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad \left| \cdot \frac{1}{x+y+1} \text{ (т.к. } x+y+1 > 0 \text{)} \right.$$

$$\Rightarrow xy + 3x - 3y - 9 = xy \Rightarrow (x-y) = 3 \quad \left| \begin{array}{l} x \neq 3 \\ y \neq -3 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array} \right.$$

Решение:

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy =$$

$$= (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 9xy = 3(3xy + 9) - 9xy =$$

= 27

[Ответ: 27]



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отмьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

5).

$$\begin{cases} y < \frac{9}{4}x \\ x \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \end{cases}$$

$$y \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$$y = 3x - 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 1 + 2n < \frac{9}{4}x \\ -x + 1 + 2n < \frac{9}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$y = -x + 1 + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

при чётных  $x=y$  будут чётные  
при неч.  $x \Rightarrow y$  - нечётные

$$\begin{cases} \frac{3}{4}x < 1 - 2n \\ \frac{3}{4}x > 2k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{4}{3} - \frac{8}{3}n \quad (1) \\ x > \frac{8}{3}k + \frac{4}{3} \quad (2) \end{cases}$$

$$y = \frac{4}{3} - \frac{8}{3}n \Rightarrow n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \Rightarrow n \in \{-1; 0; 1; 2\}$$

ПУСК!  $\begin{cases} x=4, \\ y \in \{-9; \dots; 9\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 11 + 2n \\ y = 3 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow$  можно получить все неч.  $y$

$x=3$   
 $y \in \{-9; \dots; 9\}$

(9) - вероятно  
уровень.

$$\begin{cases} x=3 \\ y \in \{-9; \dots; 9\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 + 2n \\ y = 2 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow$$

Чёт  $y$ .  
может получ. Чётные  $y < 6^3$

$$\begin{cases} x=2 \\ y \in \{-9; \dots; 9\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 + 2n \\ y = -1 + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1 \\ y \in \{-9; \dots; 9\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 + 2n \\ y = -4 + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-2 \\ y \in \{-9; \dots; 9\} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=-3 \\ y < -\frac{2}{3} \\ y \in \{-3; \dots; 9\} \end{cases} \Rightarrow$$

(7)

(6)

(5)

$$x=-4 \Rightarrow$$

Ответ: 43 пары

(4)

(1)

(2)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

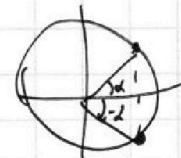
№3

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

$$\Rightarrow -\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\Rightarrow \cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$



Обратите внимание:  
 $(t; 3t-1) \quad t \in \mathbb{R}$   
 $(K; -K+1) \quad K \in \mathbb{R}$

$$\pi - 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\pi - 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$y = 3x - 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \quad (1)$$

$$y = -x + 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

$$\cos(\arccos t) = t, t \in [-1, 1]$$

$$\Leftrightarrow y = 3x - 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

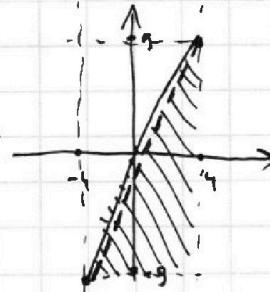
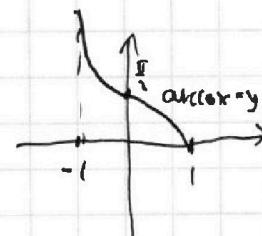
$$\cancel{\sin \pi x - \sin(3\pi x - \pi + 2\pi n)} \sin \pi x = \cos \pi x + \cos(3\pi x - \pi + 2\pi n) \cos \pi x$$

$$\cancel{\sin \pi x + \sin 3\pi x} \sin \pi x = \cancel{(\cos \pi x - \cos 3\pi x)} \cos \pi x$$

$$\delta). \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \\ \frac{x}{4} \in [-1, 1] \\ \frac{y}{9} \in [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-4, 4] \\ y \in [-9, 9] \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{9} < \cos(2\pi - \arccos \frac{x}{4})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{y}{9} < \frac{9}{4}x \\ x \in [-4, 4] \\ y \in [-9, 9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$





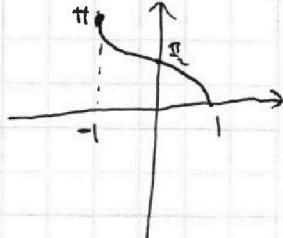
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                                       |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\delta) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \Leftrightarrow \text{диаграмма}$$



$$x \in [-4, 4] \quad f = \arccos \frac{x}{4} \quad E(f) = [0; \pi]$$

$$y \in [-9, 9]$$

$$g = \arccos \frac{y}{9} \quad E(g) = [0; \pi]$$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 3x - 1 + 2n \\ y = -x + 1 + 2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y \in \{-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\} \end{cases} \quad (9)$$

$$x = -2 \\ y \in \{-9; -7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9\} \quad (10)$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y \in \{-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} < \pi \\ \arccos \frac{y}{9} < \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 4 \\ y < 9 \end{cases}$$

множества однажды

$$\begin{cases} x = -9 \\ y \in \{-7; -5; -3; -1; 1; 3; 5; 7; 9\} \end{cases} \quad (9)$$

при иез.  $x$  будут попадать все значения  $y \in [-9; 9]$

при чётных  $x$  будут попадать все иез.  $y \in [-9; 9]$ , кроме точек  $(-4; 5)$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ошибки: } 4 \cdot 9 + 4 \cdot 10 \cdot 9 = 85 \text{ ошибок}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\text{№} 4$   
 Чайника  
 Плюсик в  
 конце

$$\Rightarrow \begin{cases} (\text{Чайника} + k) \text{ десертов}, k \geq 1 \\ n \text{ плюсиков} \end{cases}$$

Чайника  
 $\underbrace{\bullet \bullet \bullet \bullet}_{n}$

Распределение чайника на плюсиков

Биномие мес.

$$P_1 = \frac{12}{n(n-1)}$$

б. конце мес.

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{k+2}}{C_n^{n+k}} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{(k+2)!(n-k-1)!} \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{n(n-1)}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^n} = \frac{(n-2)!(n-1)!}{\frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!}}$$

$$= \frac{(n-2)!(n-1)! \cdot 2!}{(n-4)! \cdot 2 \cdot 4! \cdot n(n-1)}$$

$$\rightarrow 35P_1 = P_2$$

$$\frac{42}{n(n-1)} = \frac{(k+4)(k+3)}{n(n-1)} \Rightarrow k=3$$

Ответ: всего было выделено 7 десертов в конце мес

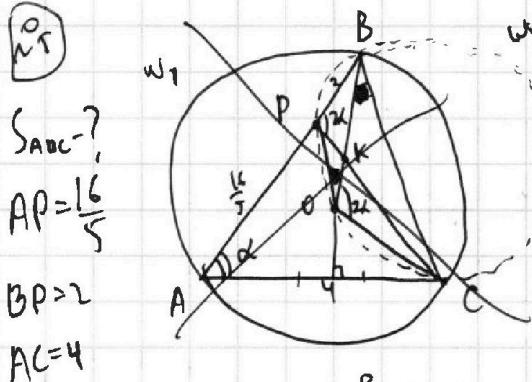


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

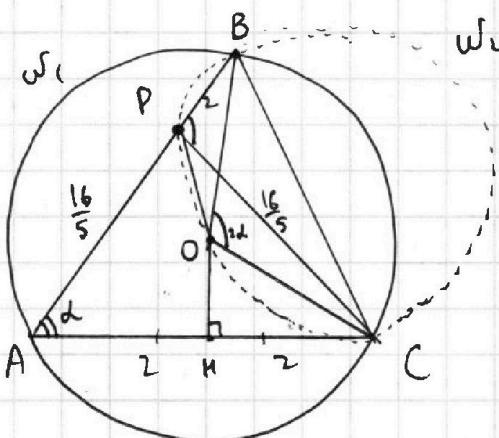
СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$OK = \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

O-центр  $w_1$ ,  
 $\Rightarrow \angle BOC$ -центр.



1) Рисунок  $\angle BOC = 2d$  (центральный в  $w_1$ )

$\Rightarrow \angle BAC = d$  (внеш. остр. на тч  
к  $\angle BOC$ , тк  $\angle BOC$  центр в  $w_1$ )

2).  $\angle BPC = \angle BOC = 2d$  (внеш. остр. на огн. 94ч  
в  $w_2$ )

$\Rightarrow \angle APC = \angle ACP = 2d - d = d$  (внешний  
для  $\triangle APC$ )

$\Rightarrow \triangle APC - p/d$  No призм.

$$\Rightarrow PC = \frac{16}{5}$$

3). № +. Косинус для  $\triangle APC$ :

$$\left(\frac{16}{5}\right)^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{16}{5} \cos d$$

$$\cos d = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow \sin d = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \quad (\text{округл})$$

$$\Rightarrow S_{APC} = \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^2 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \frac{1}{2}}{AB \cdot AC \cdot \sin d \cdot \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{26 \cdot 4 \cdot \sqrt{39}}{5 \cdot 8 \cdot 8} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

Ответ:  $S_{APC} = \frac{13\sqrt{39}}{10}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

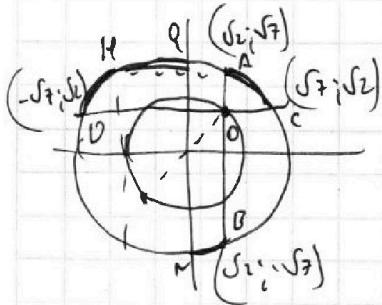
7

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(№6)

Ответ: что  $P_{\max}$  будет при  $\cos \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

 $\Rightarrow$ 

1

$$\Rightarrow P = AB + BC + CD + DE + EF + FG + GH + HA =$$

$$= DC + AG + AC + DG = 2S_7 + 2\sqrt{7} + 3\pi \quad \text{или друг}$$

$$= 2AB + AC + DG =$$

Ответ:  $P_{\max} = 4\sqrt{7} + 3\pi$ ,  
при  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$\overline{DH} = \overline{AC} \\ \overline{HQ} = \overline{MB} \quad \left( \begin{array}{l} \text{бисект} \\ \text{секущ} \end{array} \right)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.










СТРАНИЦА  
1 из 1

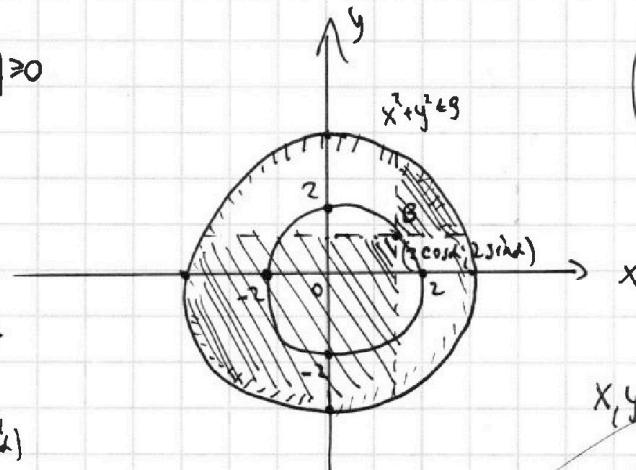
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\text{№6}$

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \\ x \leq 2 \cos \alpha \\ y \leq 2 \sin \alpha \end{cases}$$

$$S(o; B) = 2$$



$$\begin{cases} 2 \cos \alpha \in [-2; 2] \\ 2 \sin \alpha \in [-2; 2] \end{cases}$$

$$x, y : x^2 + y^2 = 81$$

$$\begin{cases} y = 2 \sin \alpha \\ x^2 = 9 - 4 \sin^2 \alpha \\ x = 2 \cos \alpha \\ y^2 = 9 - 4 \cos^2 \alpha \end{cases}$$

Всевозможные (T, B) лежат на  $1^\circ$  окр. с центром в  $B(0, r)$  и  $R=2$

$$P_{\max} = 3\pi + 2\sqrt{5} + 6$$

6 симметрий  
для x равна y.  
= периметр  
одной пол. окр.

Рассмотрим правильн. (T, B)  
с координатами  $(2 \cos \alpha; 2 \sin \alpha)$

по Т. о пересеч. хордах:

$$a \cdot b = c \cdot d$$

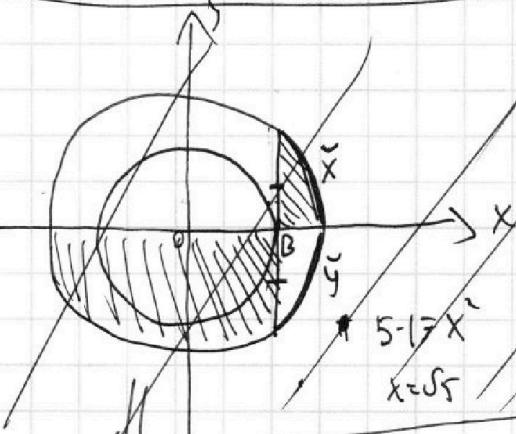
$$\Rightarrow (\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} + 2 \cos \alpha)(\sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} - 2 \cos \alpha) =$$

$$= (\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + 2 \sin \alpha)(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} - 2 \sin \alpha) =$$

T.e.  $a \cdot b = c \cdot d = 5$  ( $a+b=6$  и  $c+d=6$ )

$$\begin{cases} a+b \rightarrow \max & (a+\frac{b}{2})^2 \rightarrow \max \\ c+d \rightarrow \max & (c+\frac{d}{2})^2 \rightarrow \max \end{cases}$$

оптимальн. корда  
или  $\begin{cases} a=\sqrt{5} \\ b=\sqrt{5} \end{cases}$  и  $\begin{cases} c=\sqrt{5} \\ d=\sqrt{5} \end{cases}$



Алгоритм, шаги



(6 случаев  
симметрии)

$$P_{\max} = 3\pi + 2\sqrt{5} + 6, \text{ при}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = 1 \\ \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = 1 \\ \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 0 \\ \sin \alpha = -1 \end{cases}$$

Объем:  $P_{\max} = 3\pi + 2\sqrt{5} + 6$

$$\text{при } \alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N<sup>o</sup> 7

$$O_1 \in SO \\ OO_1 \perp (ABC)$$

нормаль  
пиралику A

Пусть K-центр в  
F-центр S<sub>2</sub>

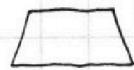
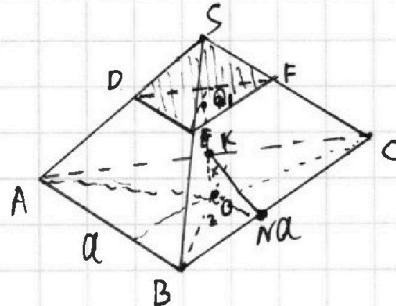
Т.к.  $\omega$  кас. всех граней усог. пирамиды  $\Rightarrow \omega \cap (ABC) = O$

$\triangle DEF$ -нр.  $\Rightarrow$

O<sub>1</sub>-центр  $\triangle DEF$

$\triangle ABC$ -нр.  $\Rightarrow$

$\Rightarrow O$ -центр  $\triangle ABC$



$\Rightarrow$  центр  $\omega$  лежит на  $[OO_1]$ :  $KO = KO_1$ ,

$\Rightarrow F = K$

•  $S_2$  кас. всех ребер  $\Rightarrow$  центр  $S_2$  лежит на  $[OO_1]$ :  $FO = FO_1$

$$BO = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad \text{Пусть } KO = x$$

$$ON = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$BO_1 = \sqrt{4x^2 + \frac{a^2}{3}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

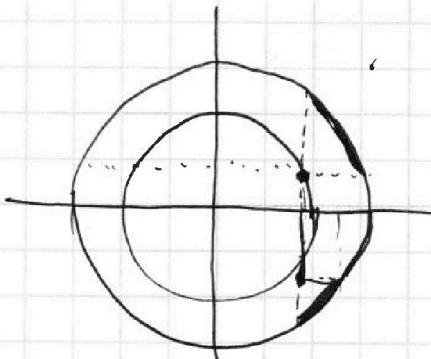
5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\cos \angle = \frac{x}{5}$$

$$\sin(\arccos \frac{x}{5})$$

$$\cos \frac{x}{5} \cdot \frac{y}{3} - \frac{\sqrt{16-x^2}}{5} \cdot \frac{\sqrt{81-y^2}}{3} < 1 \quad x \in [-4, 4]$$

$$xy - \sqrt{16-x^2} \cdot \sqrt{81-y^2} < 36$$

$$x^2y^2 - 72xy + 36 < 16(1 - 16y^2 - x^2) - 16y^2 - x^2y^2 + x^2y^2$$

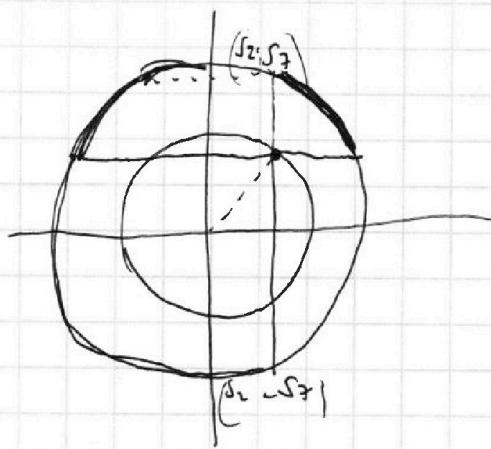
$$(4y - 9x)^2 < 0$$

$$4y = 9x \quad y = \frac{9x}{4} \quad \frac{9x}{4}$$

$$\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}$$

$$2500 + 600 \\ + 36$$

$$3136$$



$$2\sqrt{5} + 6 \vee 4\sqrt{7}$$

$$36 + 20 + 24\sqrt{5} \vee 16 \cdot 7$$

$$56 + 24\sqrt{5} \vee 112$$

$$24\sqrt{5} \vee 56$$

$$24\sqrt{5} \vee 56$$

$$\frac{7}{3} \quad \left(2\frac{1}{3}\right)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$A = \overline{aaaa}$

$B = \overline{1bc}, \overline{b1c}, \overline{bc1}$

$C = \overline{d5}, \overline{5d}$

$A \cdot B \cdot C = p^2, p \in \mathbb{N}$

$9 \cdot 4 \sin^2 x - 4 \cos^2 x$

$5(2 \sin x + 1)(\sqrt{-2 \sin x})$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$

$M = x^3 y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy =$

$= (x-y)((x-y)^2 + 3xy) - 9xy$

$3(9+3xy) - 9xy = 27$

$\pi x - \pi + \pi x = 2\pi$

$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \sin \pi y \cdot \sin \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$

$1), y = 1-x+2k$

$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos(2\pi x - \pi - 2\pi k) - \cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$

$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$

$\pi - 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\pi - 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\sin \pi x - \sin(\pi(3x-2\pi k))$

$= \sin(\pi(3x-\pi))$

$\sin(2\pi n + 3\pi x - \pi)$

$\sin(3\pi x - \pi)$

$\cos(\pi(3x-2\pi k))$

$\cos(\pi(3x-\pi))$

$\cos x + \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$

$\cos(3\pi x - \pi)$

$a+b \rightarrow \text{MAX}$

$ab = cd = 5$

$q+r = 5$

$\frac{3}{a} + \frac{1}{b} = \frac{5}{ab}$

$\frac{3}{a} + \frac{1}{b} = \frac{5}{5} = 1$

$a=5, b=1$

$x+y=0 \quad T.K. x, y > 0$

$(x-3)(y+3) - xy = 0$

$xy(x-3)(y+3) = 0$

$3x-3y-9=0$

$x=0, y=0$

$x \neq 3, y \neq -3$

$b = \frac{16}{7}, \frac{26}{7}$

$1-2x = x-y+2n$

$1-2x = y-x+2n$

$y = 3x-1+2n$

$y = 1-x+2k$

$\cos 2\pi x = \cos 2\pi x$

$\frac{C_{n-2}}{C_n} = \frac{C_{n-2}}{C_n}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!