



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a \stackrel{N^1}{=} 11 \cdot 101 \cdot a, \text{ где } 11 \text{ и } 101 \text{ - простые}$$

$$B = \overline{bcd}, \text{ где } b \neq c \neq d = 1$$

$$C = \overline{xy}, \text{ где } x \neq y = 5 \quad k \in N$$

$$A \cdot B \cdot C = k^2 \Rightarrow 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C$$

$k^2 : 11, 101 \Rightarrow k^2 : 11^2, 101^2$, т.к. это простые и если квадрат: $p, q \neq 0 \text{ и } k^2 : p \Rightarrow k^2 : p^2$

запишем, что $C < 100 \Rightarrow (C, 101) = 1 \Rightarrow$ фактор а-цифра не равна 0, т.к. $C \in N$, а если, то $A = 0$.

$\Rightarrow a = 1 \dots 9$, откуда только $B : 101$, так же ..

$B \neq 11$, т.к. иначе $B \geq 11 \cdot 101 = 1101 / 11, 101$, но

$B < 11$, т.к. трехзначное. $a \neq 11$, т.к.

$a < 10 \Rightarrow C : 11$, откуда $x = y$, и тогда

$\text{из } 5x = 5 \Rightarrow C = 55$; $B : 101 \Rightarrow b = d, c = 0$

, но среди $b, c, d = 1 \Rightarrow d = b = 1 \Rightarrow B = 101$.

тогда $k^2 = A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11$

5-простое, $\Rightarrow k^2 : 5^2$ неправдивому виду, групп-

кроме а, остальные множители не могут быть кратны-

ми 5 т.к. же известно $\Rightarrow a : 5$, но $a = 1 \dots 9 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow$

$A = 5555, B = 101, C = 55 \rightarrow$ 1 тройка. Ответ: 1 тройка.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x, y > 0 \quad k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} &= \frac{1+x+y}{xy} \\ k = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} &= \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{1+x+y}{(x-3)(y+3)} \end{aligned}$$

$$k = k = \frac{1+x+y}{xy} = \frac{1+x+y}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow \text{тогда } 1+x+y=0 \text{ либо}$$

$$xy = (x-3)(y+3), \text{ ко } 1+x+y=0 \neq 0, \text{ т.к}$$

$$xy = xy + 3x - 3y - 9$$

$$3x = 3y + 9$$

$$x = y + 3$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 9xy.$$

$$\begin{aligned} \text{поскольку } x = y + 3 \text{ и тогда } (y+3-y)(x^2 + y^2 + xy) - 9xy &= \\ = 3(x^2 + y^2 + xy - 3xy) &= 3(x-y)^2 = \\ = 3 \cdot 3^2 &= 27 \quad \text{Ответ: } M = 27. \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$8) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} \leq \pi$$

$\arccos \alpha$ - приписывает α от $-1 \text{ до } 1; -\pi \leq \alpha \leq \pi$
и возвращает от $0 \text{ до } \pi$

$0 \leq \arccos \alpha \leq \pi$, тогда $\arccos \alpha \geq 0, \leq \pi$

$\Rightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} \leq \pi$ причем

если оба $\arccos \frac{x}{4} = \pi$ и $\arccos \frac{y}{3} = \pi$

иначе получим $\frac{x}{4} = \cos(\pi) = -1 = \frac{y}{3} \Rightarrow$

$y = -3; x = -4$ - 1 случай иначе если

$-1 \leq \frac{x}{4} \leq 1$ и $-1 \leq \frac{y}{3} \leq 1$ то - получим - посчитали

общее кол-во $-1 \leq y \leq 1$ $-4 \leq x \leq 4$

$(-1, 1)$ - не зависит от y . и x не зависит от y .

$(-1, 1) \quad x=4, y=1$

Ответ: 140 четырехугольников.

$$a) \sin^2 \pi x = \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

$$-\cos 2\pi x \quad \cos(\pi_x - \pi_y)$$

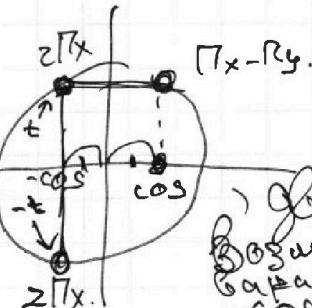
$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi_x - \pi_y)$$

$$\text{ибо } 2\pi x + (\pi_x - \pi_y) = \pi$$

$$\text{ибо } -2\pi x + (\pi_x - \pi_y) = \pi$$

$$\left[\begin{array}{l} 3\pi x - \pi_y = \pi \\ -\pi_x - \pi_y = \pi \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 3x - y = 1 \\ -x - y = 1 \end{array} \right]$$



Факт
возможных
вариантов
 $-\cos$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(\pi_x - \pi_y) = -\cos(\pi - (\pi_x + \pi_y))$$

$$\Rightarrow \cos(\pi - (\pi_x + \pi_y)) = \cos(2\pi_x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi - \pi_x - \pi_y - 2\pi_x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi - \pi_x - \pi_y + 2\pi_x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi - \pi_x - \pi_y - 2\pi_x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \pi - \pi_x - \pi_y + 2\pi_x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array} \right] \quad \Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} -3x + y = 2k - 1 \\ x + y = 2k - 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3x + 2k - 1 \\ y = -x - 1 + 2k \end{array} \right] \quad k \in \mathbb{Z}$$

~~$x + y = 2k - 1$~~

~~$x + y = -1$~~

при добавлении $\pm 2k$

у них x , то ~~$y =$~~

$$600 \quad \sin \pi x \pm 2\pi = \sin \pi x \\ \cos \pi x \pm 2\pi = \cos \pi x$$

Ответ: есть решения для любого

x и y

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 3x + 2k - 1 \\ y = -x - 1 + 2k \end{array} \right.$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

запиши.

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{y - 2k + 1}{3} \\ x = -y - 1 + 2k \end{array} \right.$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

не избавится.

для любого x
 ~~$x \neq 0$~~ решения
будут

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 3x + 2k - 1 \\ y = -x - 1 + 2k \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$

общая схема

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + y = 2k - 1 \\ x + y = 2k - 1 \end{array} \right. \quad k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Из вопросов кол-во билетов ≤ кол-во единиц классиков
 x - кол-во единиц классиков

тогда вероятность выиграть что будут выбраны два эти кол-во случаев, где они выбраны делить на общее число случаев.

$$\frac{\binom{2}{x-2} \cdot 1}{\binom{4}{x}} = \frac{(x-2)!}{(2!)(x-4)!} \cdot \frac{x!}{4!(x-4)!} = \\ = \frac{4!}{2!(x)(x-1)} = \frac{12}{x(x-1)} = a_1$$

а в конце тоже, но не для 4 билетов, а для
 $4+k, 2 \leq k \in \mathbb{N}$

$$\frac{\binom{2+k}{x-2}}{\binom{4+k}{x}} = \frac{(x-2)!}{(2+k)! (x-4-k)!} \cdot \frac{x!}{(4+k)! (x-4-k)!} = \\ = \frac{(4+k)!}{(2+k)! x(x-1)} = \frac{(k+3)(k+4)}{x(x-1)} = a_2$$

$$a_1 \cdot 3,5 = a_2 \text{ (усл.)}$$

$$\frac{(k+3)(k+4)}{x(x-1)} = \frac{12}{x(x-1)} \cdot \frac{7}{2} = \frac{42}{x(x-1)} \Rightarrow (k+3)(k+4) = \\ = 42$$

$$k^2 + 7k + 12 - 42 = 0$$

$$k^2 + 7k - 30 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -7 \\ x_1 x_2 = -30 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -10 - \text{невозможно т.к } k \in \mathbb{N} \Rightarrow k=3 \\ x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{||}$$

Ответ: 7 билетов.

Билетов в конверте
 $= 4+3=7$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

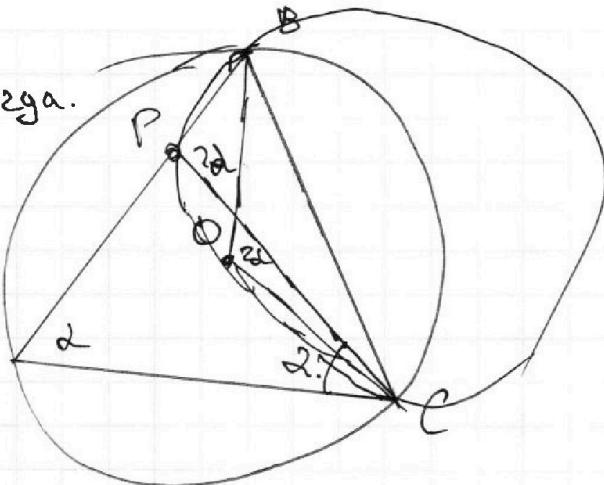
СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\angle BAC = d$, тогда.

Во-первых т.к ABC -
остроугольник, т.о
О-внутри ABC ,

$\angle BOC = 2d$ - центральный
внешний угол BAC отде-
ли один сектор BC .



PBC -вписанной по условию $\Rightarrow \angle BOC = \angle BPC$

Внешний угол при вершине \neq , тогда $\angle APC = 180^\circ - 2d$
как смежный с $2d \Rightarrow \angle ACP = d = 180^\circ - (180^\circ - 2d) - d$

откуда из $\triangle APC$ -равнобедренной $\Rightarrow AP = PC = \frac{16}{5}$

тогда $S_{APC} = \frac{\sin(180^\circ - 2d)}{2} \cdot AP \cdot PC$

$\sin(180^\circ - 2d) = \sin(2d)$ ~~если $2d < 90^\circ$~~ $\Rightarrow S_{APC} = \frac{\sin 2d}{2}$.

$\cdot \left(\frac{16}{5}\right)^2$ также ~~известно~~ S_{APC} через формулу
Герона. ~~$S_{APC} = \sqrt{P(P-AP)(P-PC)(P-AC)}$~~ $P = \frac{AP+PC+AC}{2} = \frac{26}{5}$

$$S_{APC} = \sqrt{P(P-AP)(P-PC)(P-AC)} = \sqrt{\frac{26}{5} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{6}{5}} = \\ = \frac{4}{5} \sqrt{\frac{(13 \cdot 3)^2}{8}} = \sin 2d \cdot \frac{16^2}{50} \Leftrightarrow 5\sqrt{39} =$$

$$= \sin 2d \cdot \frac{256}{25} = \sin 2d \cdot 2^5 \quad \text{Ответ: } S_{APC} = \frac{13\sqrt{39}}{10} \cdot \frac{13\sqrt{39}}{10}$$

$$\sin 2d = \frac{5\sqrt{39}}{32}, \text{ тогда можно посчитать} \\ S_{ABC} = S_{APC} + S_{BPC} = \frac{\sin 2d}{2} \cdot \left(\frac{16}{5}\right)^2 + \frac{\sin 2d}{2} \cdot \frac{16}{5} \cdot BP =$$

$$= \frac{\sin 2d}{2} \left(\frac{32}{5} + \frac{256}{25} \right) = \frac{5\sqrt{39}}{64} \left(\frac{32}{5} + \frac{256}{25} \right) = \sqrt{39} \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{2} \right)$$

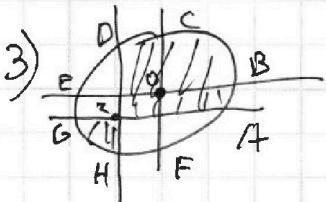


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

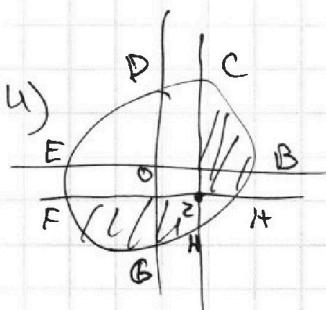
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



3) $z = (2\cos \alpha; 2\sin \alpha) - \beta \pi$ четверти
переведем в 0, тогда
добавятся углы: $\angle HF - \angle GE$
будут: $\angle AB; \angle DC$, но $\angle HF = \angle DC + \angle DH \parallel HF$
 $\angle GE = \angle AB + \angle AC \parallel BE$
также как в 0



4) $z = (2\cos \alpha; 2\sin \alpha) - \beta \pi$ четверти
переведем в 0, тогда
добавятся углы $\angle EF + \angle DC$, будут
 $\angle GH + \angle AB$ и $\angle AB = \angle EF + \angle AF \parallel BE$
 $\angle PC = \angle GH + \angle DC \parallel HC$
также как в 0

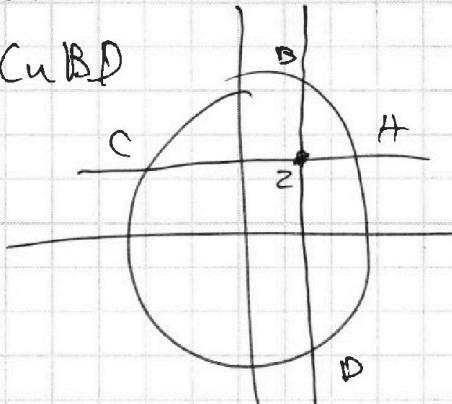
Тогда сумма в аркиметрии $\pi R = 3\pi$

Теперь BP входит только $AC \cup BD$

AC - посчитаем AC

$$y = 2\sin \alpha \Rightarrow x^2 + 4\sin^2 \alpha = 9 \\ x = \pm \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}$$

$$AC = 2\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}$$



$$AC + BD = \max = 2\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} + 2\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} \Rightarrow$$

квадрат максимален - максимально

$$\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} \Rightarrow \text{максимально } t^2 \xrightarrow[t \geq 0]{\text{т.к.}} \text{ максимален}$$

$$t^2 = 18 - 4(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + 2\sqrt{(9 - 4\sin^2 \alpha)(9 - 4\cos^2 \alpha)}$$

$$t^2 = 14 + 2\sqrt{b} \xrightarrow[\text{т.к. } b > 0]{\text{т.к. } b \geq 0} \sqrt{b} = \max, \text{ при } b = \max$$

$$b = 81 - 36(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + 16 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6 = 81 - 3G \quad \text{так как } d = \max \text{ при } d = \max$$

$$\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \max$$

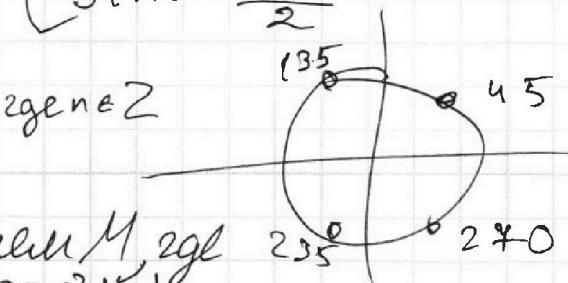
$$((-\sin^2 \alpha) \sin^2 \alpha) \quad \sin^2 \alpha = a.$$

$$-a^2 + a = \max \quad \text{парабола ветви вниз}$$

$$\text{максимум } 6 \quad \frac{a+b}{2} = \frac{-1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ - подходит}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad \text{т.к. } a \leq 1$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\pi n + \frac{\pi}{4} \\ \alpha = 2\pi n + \frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \text{ (не подходит)} \\ \alpha = 2\pi n - \frac{\pi}{4} \\ \alpha = 2\pi n + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

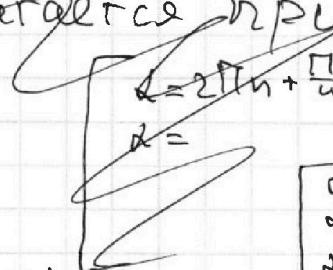


Тогда получаем M , где $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$$

$$M = 3\pi + 2 \sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} + 2 \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} =$$

$$= 3\pi + 4\sqrt{4} \quad \text{+ доказывается при}$$



$$\begin{cases} \alpha = 2\pi n + \frac{\pi}{4} \\ \alpha = 2\pi n + \frac{3\pi}{4} \\ \alpha = 2\pi n + \frac{5\pi}{4} \\ \alpha = 2\pi n + \frac{7\pi}{4} \text{ где} \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } M = 3\pi + 4\sqrt{4} \text{ при}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 - \text{круг радиусом 3} \\ (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

$$(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$$

$$x = 2\cos\alpha \quad y - \text{любой}$$

$$y = 2\sin\alpha \quad x - \text{любой}$$

$$\begin{cases} x > 2\cos\alpha \\ y > 2\sin\alpha \end{cases}$$

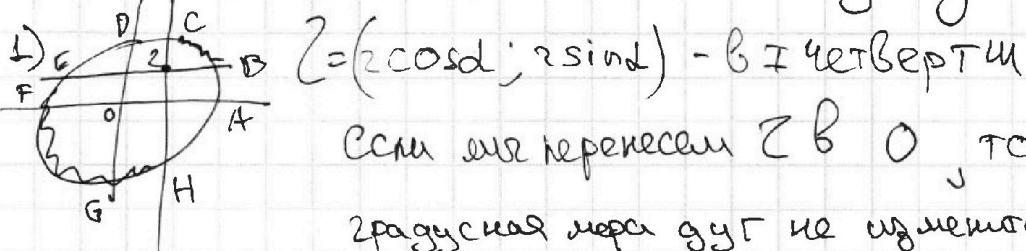
$$\begin{cases} x < 2\cos\alpha \\ y < 2\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2\cos\alpha \\ y < 2\sin\alpha \end{cases}$$

~~Рассмотрим~~

Рассмотрим углы $\angle AOB$ и $\angle COD$, и
 $OTAC + BD$

Докажем, что $AOB + COD = \text{постоянна}$.



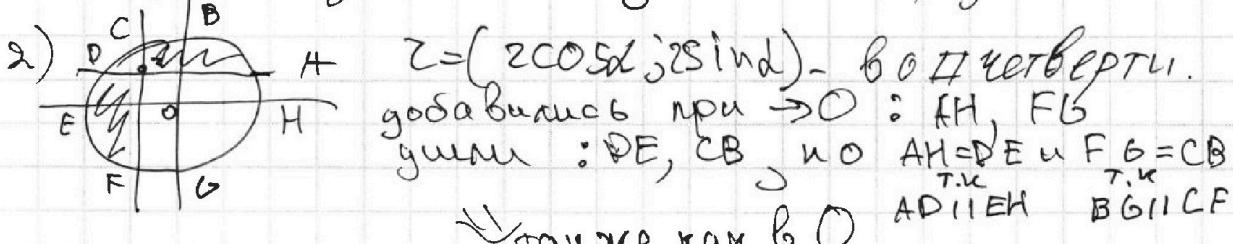
Сумма перенесем $\angle BOC$, тогда

градусная мера дуг не изменится

$BO \parallel AF \Rightarrow$ градусные меры дуг AB и EF равны, аналогично

$GH = CD$, $\text{длина дуги} = \varphi R \Rightarrow$ и длина не изменилась.

\Rightarrow дуги в сумме = как $gme O - \pi \Rightarrow$ длина = πR



также как BO $AD \parallel EH$ $BG \parallel CF$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
_ из _

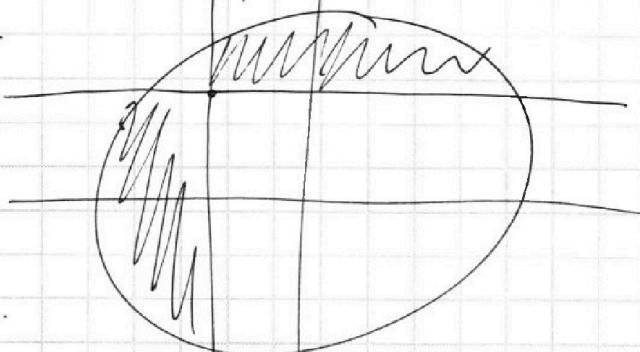
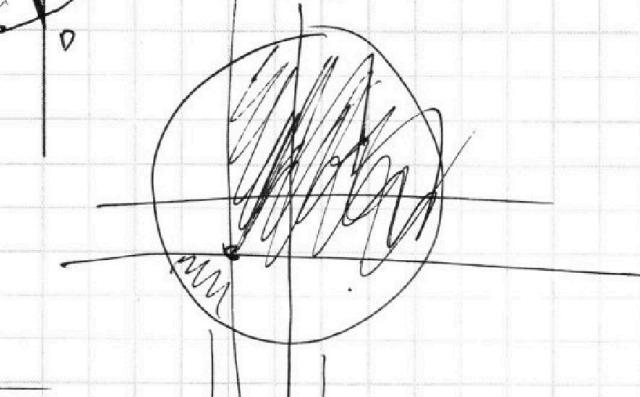
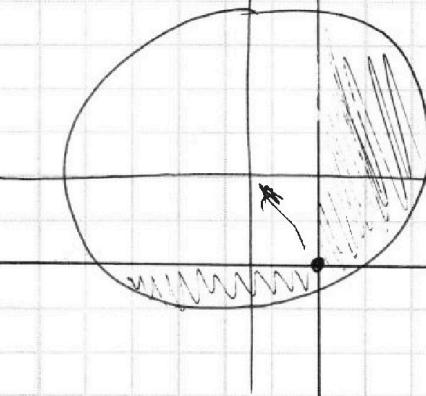
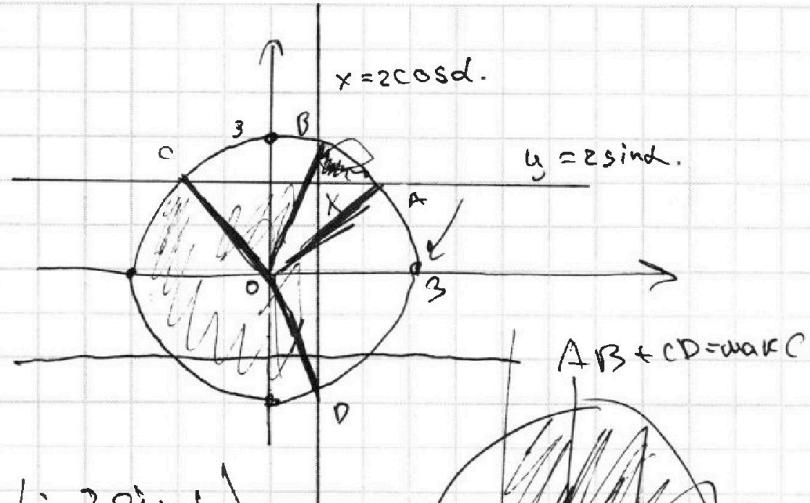
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = 2 \cos \alpha$$

$$y = 2 \sin \alpha$$

$$\begin{cases} x > 2 \cos \alpha \\ y > 2 \sin \alpha \end{cases}$$

$$(2 \cos \alpha; 2 \sin \alpha)$$



здесь белого
всего $\pi r^2 = 3\pi$.

нужно то $y = 2 \sin \alpha$. $P_f =$

$$2 \cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 9$$

$$x = \pm \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha}$$

$$2 \cdot \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} + 2 \cdot \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha}$$

$$2 \cdot \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} + 2 \cdot \sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} = \max.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 10

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = \overline{1111} \cdot a \quad \text{(21)}$$

$$B = \overline{bcd} \quad b, c, d \in \{2, 3, 5, 7\}$$

$$C = 50 \frac{\overline{5x}}{\overline{x5}}$$

$$\begin{array}{c} \overline{1111} \mid \overline{1111} \\ \overline{1111} \quad \overline{1111} \\ \hline \overline{0000} \end{array}$$

$$A \cdot B \cdot C = \text{квадрат. } k^2$$

$$A : \overline{1111} \Rightarrow k^2 : \overline{1111}^2$$

$\overline{1111}$ — простое.

$$5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 101 \cdot a^4 \quad 1 \dots 9.$$

a^4 квадрат $\Rightarrow a : 5 \Rightarrow a = 5$.
 $c = 0, b = 1, d = 1, \text{ но } b = d$

$$B = 101$$

$$b = d = 1$$

$$x, y \geq 0 \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$M = x^3 y^3 - 9xy$$

$$(x-y)(x^2 + y^2 + xy) - 9xy.$$

$$x > 3, \quad T.V.C \quad x \rightarrow \infty$$

$$y \downarrow$$

$$xy \rightarrow \infty$$

$$3x^2 + 3y^2 + 3xy - 9xy$$

$$3(x^2 + y^2 - 2xy)$$

сумма уменьшить
множ., $3(x-y)^2$
 $3 \cdot 9 = 27$

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$3x = 3y + 9.$$

$x = y + 3$

$$\frac{1+x-3+y+3}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+2}{x} \geq 1$$

$$\frac{1+x+y}{(x-3)(y+3)} = \frac{1+x+y}{xy}$$

$$\Leftrightarrow (x+y=0 \text{ ибо } xy = xy + 3x - 3y - 9)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6 + \cancel{5} + \cancel{4} + \cancel{5} + 12 = 32 \quad \text{н.з.} \quad 15$$

если всего x одиннадцати классников, то

$$x > 9, + k \text{ иначе } x = 10$$

$\frac{C_x}{C_{x-2}}$ — вначале , а стала

$$\frac{C_x}{C_{x-2}}^{\text{иначе}}$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{2 \cdot (x-2) \cdot (x-3)} \cdot \frac{12}{(x)(x-1)} \cdot \frac{7}{2} = \frac{(x-2)!}{(2+k)! (x-2-2-k)!}$$

$$\frac{x!}{(k+3)! (x-4-k)!} \cdot \frac{(k+3)(k+4)}{(x)(x-1)}$$

$$6 \cdot 7 = (k+3)(k+4)$$

но если

$$100 \leq \frac{12}{k} = \frac{12}{(x)(x-1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} k=3 \\ \boxed{4} \end{array} \right)$$

$$(x)(x-1) = 42.$$

$$\boxed{x=4}$$

но ~~x~~

$$\frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2} =$$

$$3 \frac{7}{2x^2} = \frac{x^{2+k}}{x^{4+k}}$$

$$\frac{7}{2} x^2 = \frac{1}{x^2}$$

$$k^2 + 4k + 12 - 42 = 0$$

$$k^2 + 4k - 30 = 0 \quad \text{no +. Внешн.} \rightarrow 10 \text{ и } 3$$

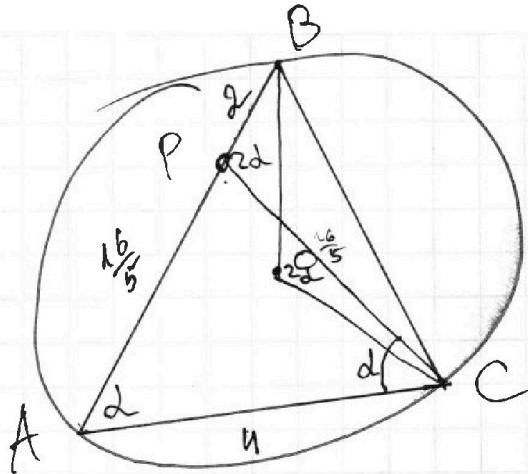
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



3, 2

$$\begin{array}{r} + 18 \\ - 18 \\ \hline 96 \\ + 16 \\ \hline 256 \end{array}$$

6, 4+4

$$\begin{array}{r} 104 \\ - 52 \\ \hline 52 \end{array}$$

2d

$$\frac{\sin 2d}{2} = \frac{16^2}{5^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{26}{5} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{10}{5} \cdot \frac{6}{5}}$$

$$= 2 \sqrt{\frac{26 \cdot 6}{25}}$$

32+20

$$\frac{8}{10} + \frac{5}{10} = \frac{\frac{13}{10}}{\sin 2d} \cdot \sqrt{13 \cdot 3} = \frac{\sin 2d}{25} \cdot \frac{32}{25} = \frac{\sqrt{13 \cdot 3}}{5}$$

$$\frac{13}{10} = \sin 2d = \frac{\sqrt{13 \cdot 3}}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sin 2d}{2} \left(\frac{16^2}{5^2} + \frac{16}{5} \cdot 2 \right)$$

$$S = \frac{\sqrt{13 \cdot 3}}{10} \left(\frac{256}{25} + \frac{32}{5} \right)$$

$$S = \sqrt{39} \cdot \left(\frac{128}{125} + \frac{16}{25} \right) = \frac{80}{125} \cdot \sqrt{39} \cdot 208$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

-13.

задачка

$$\cos 2x = \frac{180-9}{171}$$

$$51 \quad \frac{x}{4} = -1 \quad \frac{y}{3} = -1 \quad y \text{ от } -9 \text{ до } 9 \\ x \text{ от } 4 \text{ до } -4.$$

arccos от 0 до π



не выполняется только когда
 $\pi < x < 2\pi \Rightarrow \frac{x}{4} = -1 \quad \frac{y}{3} = -1 \quad y = -9$

Беср аркх син 1, 3.

$$-9 \leq y \leq 9$$

$x = -4$
Лагранж

0 град 18 7.19

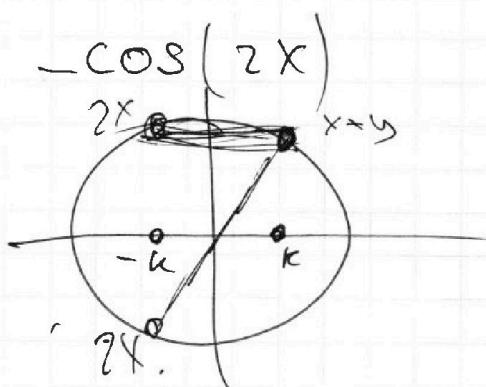
~~8.99 - 1~~ 38.

3a

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x.$$

$$(\sin x - \sin y) \sin x = (\cos x + \cos y) \cos x.$$

$$\sin^2 x - \cos^2 x = -\sin x \sin y + \cos x \cos y.$$



$$\cos(x+y) \quad x+y=0$$

$$x+y+2x=0$$

$$x+y-2x=0$$

$$y-x=0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

но это при условии что

$$\cos 2\pi x = \cos(\pi - \pi_x + \pi_y)$$

$$18 - u + 2 \sqrt{9 - u \sin^2} (9 - u \cos^2) \cos(\pi - \pi_x + \pi_y)$$

$$81 - 36 \cos^2 u - 36 \sin^2 u + 16 \cos^2 u \sin^2 u$$

$$\cos^2 u \sin^2 u = \max$$

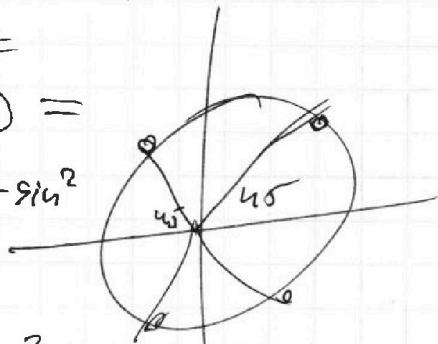
$$\frac{(\sin^2 u)(1 - \sin^2 u)}{\sin u - t^2 + t}$$

$$\frac{-8}{2a}$$

$$\cos 2u =$$

$$\cos(u + d) =$$

$$= \cos^2 u - \sin^2 u$$



$$t_B = \frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$t = \frac{1}{2} = \sin^2 u$$

$$\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x =$$

$$= \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin u = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin u = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

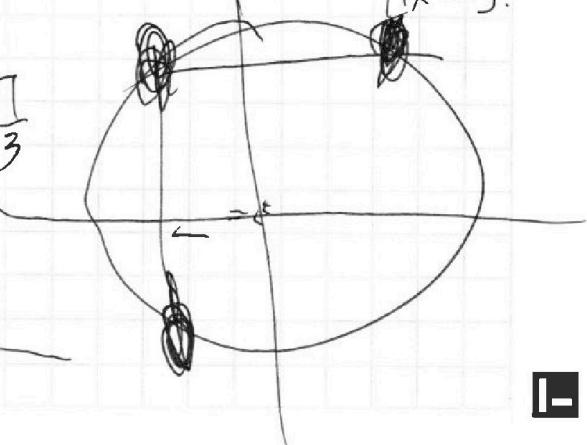
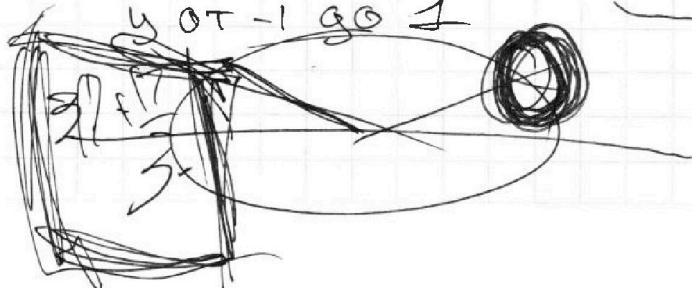
$$-\cos(2\pi x)$$

$$\sin u \times 0 + 0 \cos u$$

$$0 \sin u + 1 \cos u$$

$$2\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\pi_x - \pi_y$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

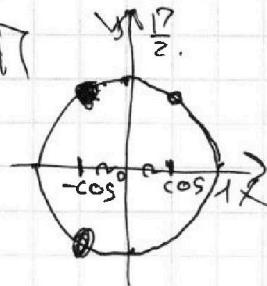
где $x \in [0, 1]$, $0 \leq y \leq 1$

$$0 \leq 2\pi x \leq 2\pi ; 0 \leq \pi x - \pi y \leq 2\pi$$

тогда случаев

$$\begin{cases} 2\pi x = \\ 2\pi x + \pi x - \pi y = \pi \\ 2\pi x + \pi x - \pi y = 3\pi \\ 2\pi - 2\pi x + \pi x - \pi y = \pi \\ 2\pi - 2\pi x + \pi x - \pi y = 3\pi \end{cases}$$

в I и II четверти
в III и IV четверти.



πx и $2\pi - 2\pi x$ - отражение относительно оси x

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x - y = 3 \\ -x - y = -1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$$

(~~решение~~)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 3x - 3 \\ y = 1 - x \\ y = -x - 1 \end{cases}$$

$$-1 \leq y \leq 1$$

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 3x - y = 3 \\ -x - y = -1 \\ -x - y = 1 \end{cases}$$

аналогично

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\begin{cases} 2\pi x - 2\pi + \pi x - \pi y = \pi \\ 2\pi x - 2\pi + \pi x - \pi y = 3\pi \\ 4\pi - 2\pi x + \pi x - \pi y = \pi \\ 4\pi - 2\pi x + \pi x - \pi y = 3\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 3 \\ y = 3x - 5 \\ y = 3 - x \\ y = -x - 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 2 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$