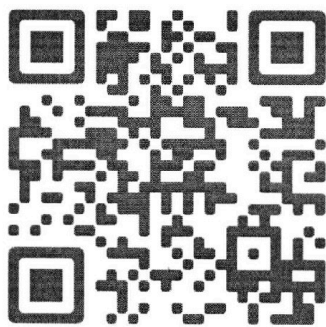
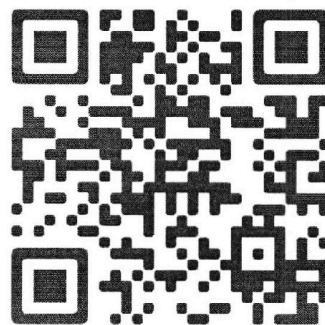




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

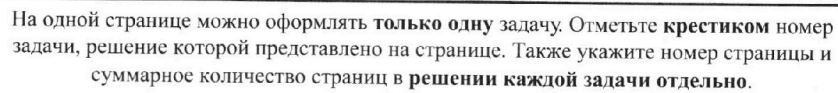
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



СТРАНИЦА

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если A - четырёхзначное число, составленное из одинаковых ~~цифр~~ цифр, то его можно пред-
ставить в виде: $A = x \cdot 1111$, где $x \in \mathbb{N}$ и $x \in [1; 9]$
(Потому что всего таких чисел: 1111, 2222, 3333, 4444, 5555,
6666, 7777, 8888, 9999)

Заметим, что 11-мощное, $101 \frac{1}{2}$ $101 \frac{1}{3}$
 $101 \frac{1}{7}$ $101 \frac{1}{11}$
 $101 \frac{1}{5}$

То есть $A = x \cdot 101 \cdot 11$, причем ~~мы не знаем~~
~~какого значения~~ x в себе не может иметь
поэтому значения 11 и 101, так $x \leq 9$.

Но при этом А.В.С - КВАДРАТ, значит в нём 11 и 101 входят как минимум 2 раза (все простые числа в квадратах входят в четных степенях). Раз $A : 101$ ~~еще~~ максимум в первой степени, то $B \cdot C : 101$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Но раз 101 - простое, то $B:101$ или $C:101$.

Т.к. C - двузначное, то $C \neq 101$.

$B:101$. Т.к. B - трёхзначное:

значит $B \in \{101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909\}$

По условию в числе B есть 1. Тогда $B=101$

Аналогично получаем, что если A - максимум на 11 в первой степени, то $B \cdot C:11$

Но $101 \nmid 11$, значит $C:11$

$C = \{11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99\}$

Т.к. в C есть 5 (по условию), то $C=55$

значит $A \cdot B \cdot C = x \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5$ - квадрат.

Тогда $5x$ - квадрат. Но раз $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, то $5x$ - квадрат только при $x=5$.

Откуда $A = 5 \cdot 11 \cdot 101 = 5555$ и $A \cdot B \cdot C$ - квадрат

ОТВЕТ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

По условию: (Причем $x, y \neq 0$; $x \neq 3$)

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} \quad (1)$$

$$U: K = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad (2)$$

Но $x, y > 0$, значит $x+y+1 \neq 0$

Раз равны числители (1) и (2) и они не равны нулю, то равны и знаменатели:

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$-3y + 3x - 9 = 0$$

$$x = y + 3$$

Значит условие на K верно при $y \neq 0$ и

$$x = y + 3 \quad (3) \quad (\text{Если } y \neq 0, \text{ то } x \neq 0, \text{ и } x \neq 3)$$

По условию:

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

Подставим (3):

$$M = y^3 + 3 \cdot y^2 \cdot 3 + 3 \cdot y \cdot 3^2 + 3^3 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Значит при $y > 0$ $M = 27$.

ОТВЕТ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$a) (\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

Известно, что:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Тогда:

$$2 \sin \left(\frac{\pi}{2} (x - y) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) \cdot \sin \pi x = \\ = 2 \cos \pi x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (x - y) \right) \quad (1)$$

Также известно:

$$2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)$$

Тогда в (1):

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) - \cos \left(\frac{\pi}{2} (3x - y) \right) \right) =$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} (3x - y) \right) \right)$$

Или же: (перенеся всё в левую часть и вынесем $\cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right)$).

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (3x - y) \right) = 0 \quad (2)$$

$$1) \text{ Если } \frac{\pi}{2} (x + y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \text{ то}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(4) x + y = 2k + 1 \text{ или } y = 2k + 1 - x$$

$$2) \text{ Если } \frac{\pi}{2} (3x - y) = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ то}$$

$$(5) 3x - y = 1 + 2n \quad y = 3x - 2n - 1$$

При других $(x; y)$ (2) будет $\neq 0$, что неверно.

Тогда пусть $a \in \mathbb{R}$. Тогда

$(a; 2k + 1 - a)$ и $(a; 3a - 2n - 1)$ - РЕШЕНИЯ

уравнения при $k, n \in \mathbb{Z}$

$$3) \text{ Если } \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi, \text{ то}$$

$$\text{по ОДЗ: } x \in [-4; 4] \text{ и } y \in [-9; 9]$$

ТАКЖЕ по определению $\arccos b$:

$$\arccos b \leq \pi, \text{ при } b \in [-1; 1]$$

Значит при b, c по ОДЗ: $\arccos b + \arccos c \leq 2\pi$

Равенство достигается при $b; c = 1$

То есть если $x \in [-4; 4]$ и $y \in (-9; 9]$, то

(3) будет верно. Но также возможно, чтобы

x и y при миним. значениях -4 и -9 соответственно

по очереди.

$$1) \text{ Если } x = -4, \text{ то либо } y = 2k + 5, \text{ либо } y = -9 - 2n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☒☐☐☐☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

При этом $y \in (-9; 9]$

1.1) $2k + 5 \in (-9; 9]$

$-14 \leq 2k \leq 4$

~~$k \in [-7; 2]$~~ - то есть 9 рещ.

1.2) $2-18-2n \in (-9; 9]$

$-2n \in (+4; 22]$

$n \in [-14; -2)$ - то есть 9 рещ.

Но они могут пересекаться:

$2k + 5 = -5 - 2n$

$k + n = -5 \quad (4)$

Если $(k; n)$, то (4) подходят: ~~$(-4; -1)$~~ ; ~~$(-3; 0)$~~ :

~~$(-4; -1)$~~ ; ~~$(-3; 0)$~~ ; ~~$(-2; 1)$~~ ; ~~$(-1; 2)$~~ ; ~~$(0; 3)$~~ ; ~~$(1; 4)$~~ ; ~~$(2; 5)$~~ ; ~~$(3; 6)$~~ ; ~~$(4; 7)$~~ ; ~~$(5; 8)$~~ ; ~~$(6; 9)$~~ ; ~~$(7; 10)$~~ ; ~~$(8; 11)$~~ ; ~~$(9; 12)$~~ ; ~~$(10; 13)$~~ ; ~~$(11; 14)$~~ ; ~~$(12; 15)$~~ ; ~~$(13; 16)$~~ ; ~~$(14; 17)$~~ ; ~~$(15; 18)$~~ ; ~~$(16; 19)$~~ ; ~~$(17; 20)$~~ ; ~~$(18; 21)$~~ ; ~~$(19; 22)$~~ ; ~~$(20; 23)$~~ ; ~~$(21; 24)$~~ ; ~~$(22; 25)$~~ ; ~~$(23; 26)$~~ ; ~~$(24; 27)$~~ ; ~~$(25; 28)$~~ ; ~~$(26; 29)$~~ ; ~~$(27; 30)$~~ ; ~~$(28; 31)$~~ ; ~~$(29; 32)$~~ ; ~~$(30; 33)$~~ ; ~~$(31; 34)$~~ ; ~~$(32; 35)$~~ ; ~~$(33; 36)$~~ ; ~~$(34; 37)$~~ ; ~~$(35; 38)$~~ ; ~~$(36; 39)$~~ ; ~~$(37; 40)$~~ ; ~~$(38; 41)$~~ ; ~~$(39; 42)$~~ ; ~~$(40; 43)$~~ ; ~~$(41; 44)$~~ ; ~~$(42; 45)$~~ ; ~~$(43; 46)$~~ ; ~~$(44; 47)$~~ ; ~~$(45; 48)$~~ ; ~~$(46; 49)$~~ ; ~~$(47; 50)$~~ ; ~~$(48; 51)$~~ ; ~~$(49; 52)$~~ ; ~~$(50; 53)$~~ ; ~~$(51; 54)$~~ ; ~~$(52; 55)$~~ ; ~~$(53; 56)$~~ ; ~~$(54; 57)$~~ ; ~~$(55; 58)$~~ ; ~~$(56; 59)$~~ ; ~~$(57; 60)$~~ ; ~~$(58; 61)$~~ ; ~~$(59; 62)$~~ ; ~~$(60; 63)$~~ ; ~~$(61; 64)$~~ ; ~~$(62; 65)$~~ ; ~~$(63; 66)$~~ ; ~~$(64; 67)$~~ ; ~~$(65; 68)$~~ ; ~~$(66; 69)$~~ ; ~~$(67; 70)$~~ ; ~~$(68; 71)$~~ ; ~~$(69; 72)$~~ ; ~~$(70; 73)$~~ ; ~~$(71; 74)$~~ ; ~~$(72; 75)$~~ ; ~~$(73; 76)$~~ ; ~~$(74; 77)$~~ ; ~~$(75; 78)$~~ ; ~~$(76; 79)$~~ ; ~~$(77; 80)$~~ ; ~~$(78; 81)$~~ ; ~~$(79; 82)$~~ ; ~~$(80; 83)$~~ ; ~~$(81; 84)$~~ ; ~~$(82; 85)$~~ ; ~~$(83; 86)$~~ ; ~~$(84; 87)$~~ ; ~~$(85; 88)$~~ ; ~~$(86; 89)$~~ ; ~~$(87; 90)$~~ ; ~~$(88; 91)$~~ ; ~~$(89; 92)$~~ ; ~~$(90; 93)$~~ ; ~~$(91; 94)$~~ ; ~~$(92; 95)$~~ ; ~~$(93; 96)$~~ ; ~~$(94; 97)$~~ ; ~~$(95; 98)$~~ ; ~~$(96; 99)$~~ ; ~~$(97; 100)$~~ ; ~~$(98; 101)$~~ ; ~~$(99; 102)$~~ ; ~~$(100; 103)$~~ ; ~~$(101; 104)$~~ ; ~~$(102; 105)$~~ ; ~~$(103; 106)$~~ ; ~~$(104; 107)$~~ ; ~~$(105; 108)$~~ ; ~~$(106; 109)$~~ ; ~~$(107; 110)$~~ ; ~~$(108; 111)$~~ ; ~~$(109; 112)$~~ ; ~~$(110; 113)$~~ ; ~~$(111; 114)$~~ ; ~~$(112; 115)$~~ ; ~~$(113; 116)$~~ ; ~~$(114; 117)$~~ ; ~~$(115; 118)$~~ ; ~~$(116; 119)$~~ ; ~~$(117; 120)$~~ ; ~~$(118; 121)$~~ ; ~~$(119; 122)$~~ ; ~~$(120; 123)$~~ ; ~~$(121; 124)$~~ ; ~~$(122; 125)$~~ ; ~~$(123; 126)$~~ ; ~~$(124; 127)$~~ ; ~~$(125; 128)$~~ ; ~~$(126; 129)$~~ ; ~~$(127; 130)$~~ ; ~~$(128; 131)$~~ ; ~~$(129; 132)$~~ ; ~~$(130; 133)$~~ ; ~~$(131; 134)$~~ ; ~~$(132; 135)$~~ ; ~~$(133; 136)$~~ ; ~~$(134; 137)$~~ ; ~~$(135; 138)$~~ ; ~~$(136; 139)$~~ ; ~~$(137; 140)$~~ ; ~~$(138; 141)$~~ ; ~~$(139; 142)$~~ ; ~~$(140; 143)$~~ ; ~~$(141; 144)$~~ ; ~~$(142; 145)$~~ ; ~~$(143; 146)$~~ ; ~~$(144; 147)$~~ ; ~~$(145; 148)$~~ ; ~~$(146; 149)$~~ ; ~~$(147; 150)$~~ ; ~~$(148; 151)$~~ ; ~~$(149; 152)$~~ ; ~~$(150; 153)$~~ ; ~~$(151; 154)$~~ ; ~~$(152; 155)$~~ ; ~~$(153; 156)$~~ ; ~~$(154; 157)$~~ ; ~~$(155; 158)$~~ ; ~~$(156; 159)$~~ ; ~~$(157; 160)$~~ ; ~~$(158; 161)$~~ ; ~~$(159; 162)$~~ ; ~~$(160; 163)$~~ ; ~~$(161; 164)$~~ ; ~~$(162; 165)$~~ ; ~~$(163; 166)$~~ ; ~~$(164; 167)$~~ ; ~~$(165; 168)$~~ ; ~~$(166; 169)$~~ ; ~~$(167; 170)$~~ ; ~~$(168; 171)$~~ ; ~~$(169; 172)$~~ ; ~~$(170; 173)$~~ ; ~~$(171; 174)$~~ ; ~~$(172; 175)$~~ ; ~~$(173; 176)$~~ ; ~~$(174; 177)$~~ ; ~~$(175; 178)$~~ ; ~~$(176; 179)$~~ ; ~~$(177; 180)$~~ ; ~~$(178; 181)$~~ ; ~~$(179; 182)$~~ ; ~~$(180; 183)$~~ ; ~~$(181; 184)$~~ ; ~~$(182; 185)$~~ ; ~~$(183; 186)$~~ ; ~~$(184; 187)$~~ ; ~~$(185; 188)$~~ ; ~~$(186; 189)$~~ ; ~~$(187; 190)$~~ ; ~~$(188; 191)$~~ ; ~~$(189; 192)$~~ ; ~~$(190; 193)$~~ ; ~~$(191; 194)$~~ ; ~~$(192; 195)$~~ ; ~~$(193; 196)$~~ ; ~~$(194; 197)$~~ ; ~~$(195; 198)$~~ ; ~~$(196; 199)$~~ ; ~~$(197; 200)$~~ ; ~~$(198; 201)$~~ ; ~~$(199; 202)$~~ ; ~~$(200; 203)$~~ ; ~~$(201; 204)$~~ ; ~~$(202; 205)$~~ ; ~~$(203; 206)$~~ ; ~~$(204; 207)$~~ ; ~~$(205; 208)$~~ ; ~~$(206; 209)$~~ ; ~~$(207; 210)$~~ ; ~~$(208; 211)$~~ ; ~~$(209; 212)$~~ ; ~~$(210; 213)$~~ ; ~~$(211; 214)$~~ ; ~~$(212; 215)$~~ ; ~~$(213; 216)$~~ ; ~~$(214; 217)$~~ ; ~~$(215; 218)$~~ ; ~~$(216; 219)$~~ ; ~~$(217; 220)$~~ ; ~~$(218; 221)$~~ ; ~~$(219; 222)$~~ ; ~~$(220; 223)$~~ ; ~~$(221; 224)$~~ ; ~~$(222; 225)$~~ ; ~~$(223; 226)$~~ ; ~~$(224; 227)$~~ ; ~~$(225; 228)$~~ ; ~~$(226; 229)$~~ ; ~~$(227; 230)$~~ ; ~~$(228; 231)$~~ ; ~~$(229; 232)$~~ ; ~~$(230; 233)$~~ ; ~~$(231; 234)$~~ ; ~~$(232; 235)$~~ ; ~~$(233; 236)$~~ ; ~~$(234; 237)$~~ ; ~~$(235; 238)$~~ ; ~~$(236; 239)$~~ ; ~~$(237; 240)$~~ ; ~~$(238; 241)$~~ ; ~~$(239; 242)$~~ ; ~~$(240; 243)$~~ ; ~~$(241; 244)$~~ ; ~~$(242; 245)$~~ ; ~~$(243; 246)$~~ ; ~~$(244; 247)$~~ ; ~~$(245; 248)$~~ ; ~~$(246; 249)$~~ ; ~~$(247; 250)$~~ ; ~~$(248; 251)$~~ ; ~~$(249; 252)$~~ ; ~~$(250; 253)$~~ ; ~~$(251; 254)$~~ ; ~~$(252; 255)$~~ ; ~~$(253; 256)$~~ ; ~~$(254; 257)$~~ ; ~~$(255; 258)$~~ ; ~~$(256; 259)$~~ ; ~~$(257; 260)$~~ ; ~~$(258; 261)$~~ ; ~~$(259; 262)$~~ ; ~~$(260; 263)$~~ ; ~~$(261; 264)$~~ ; ~~$(262; 265)$~~ ; ~~$(263; 266)$~~ ; ~~$(264; 267)$~~ ; ~~$(265; 268)$~~ ; ~~$(266; 269)$~~ ; ~~$(267; 270)$~~ ; ~~$(268; 271)$~~ ; ~~$(269; 272)$~~ ; ~~$(270; 273)$~~ ; ~~$(271; 274)$~~ ; ~~$(272; 275)$~~ ; ~~$(273; 276)$~~ ; ~~$(274; 277)$~~ ; ~~$(275; 278)$~~ ; ~~$(276; 279)$~~ ; ~~$(277; 280)$~~ ; ~~$(278; 281)$~~ ; ~~$(279; 282)$~~ ; ~~$(280; 283)$~~ ; ~~$(281; 284)$~~ ; ~~$(282; 285)$~~ ; ~~$(283; 286)$~~ ; ~~$(284; 287)$~~ ; ~~$(285; 288)$~~ ; ~~$(286; 289)$~~ ; ~~$(287; 290)$~~ ; ~~$(288; 291)$~~ ; ~~$(289; 292)$~~ ; ~~$(290; 293)$~~ ; ~~$(291; 294)$~~ ; ~~$(292; 295)$~~ ; ~~$(293; 296)$~~ ; ~~$(294; 297)$~~ ; ~~$(295; 298)$~~ ; ~~$(296; 299)$~~ ; ~~$(297; 300)$~~ ; ~~$(298; 301)$~~ ; ~~$(299; 302)$~~ ; ~~$(300; 303)$~~ ; ~~$(301; 304)$~~ ; ~~$(302; 305)$~~ ; ~~$(303; 306)$~~ ; ~~$(304; 307)$~~ ; ~~$(305; 308)$~~ ; ~~$(306; 309)$~~ ; ~~$(307; 310)$~~ ; ~~$(308; 311)$~~ ; ~~$(309; 312)$~~ ; ~~$(310; 313)$~~ ; ~~$(311; 314)$~~ ; ~~$(312; 315)$~~ ; ~~$(313; 316)$~~ ; ~~$(314; 317)$~~ ; ~~$(315; 318)$~~ ; ~~$(316; 319)$~~ ; ~~$(317; 320)$~~ ; ~~$(318; 321)$~~ ; ~~$(319; 322)$~~ ; ~~$(320; 323)$~~ ; ~~$(321; 324)$~~ ; ~~$(322; 325)$~~ ; ~~$(323; 326)$~~ ; ~~$(324; 327)$~~ ; ~~$(325; 328)$~~ ; ~~$(326; 329)$~~ ; ~~$(327; 330)$~~ ; ~~$(328; 331)$~~ ; ~~$(329; 332)$~~ ; ~~$(330; 333)$~~ ; ~~$(331; 334)$~~ ; ~~$(332; 335)$~~ ; ~~$(333; 336)$~~ ; ~~$(334; 337)$~~ ; ~~$(335; 338)$~~ ; ~~$(336; 339)$~~ ; ~~$(337; 340)$~~ ; ~~$(338; 341)$~~ ; ~~$(339; 342)$~~ ; ~~$(340; 343)$~~ ; ~~$(341; 344)$~~ ; ~~$(342; 345)$~~ ; ~~$(343; 346)$~~ ; ~~$(344; 347)$~~ ; ~~$(345; 348)$~~ ; ~~$(346; 349)$~~ ; ~~$(347; 350)$~~ ; ~~$(348; 351)$~~ ; ~~$(349; 352)$~~ ; ~~$(350; 353)$~~ ; ~~$(351; 354)$~~ ; ~~$(352; 355)$~~ ; ~~$(353; 356)$~~ ; ~~$(354; 357)$~~ ; ~~$(355; 358)$~~ ; ~~$(356; 359)$~~ ; ~~$(357; 360)$~~ ; ~~$(358; 361)$~~ ; ~~$(359; 362)$~~ ; ~~$(360; 363)$~~ ; ~~$(361; 364)$~~ ; ~~$(362; 365)$~~ ; ~~$(363; 366)$~~ ; ~~$(364; 367)$~~ ; ~~$(365; 368)$~~ ; ~~$(366; 369)$~~ ; ~~$(367; 370)$~~ ; ~~$(368; 371)$~~ ; ~~$(369; 372)$~~ ; ~~$(370; 373)$~~ ; ~~$(371; 374)$~~ ; ~~$(372; 375)$~~ ; ~~$(373; 376)$~~ ; ~~$(374; 377)$~~ ; ~~$(375; 378)$~~ ; ~~$(376; 379)$~~ ; ~~$(377; 380)$~~ ; ~~$(378; 381)$~~ ; ~~$(379; 382)$~~ ; ~~$(380; 383)$~~ ; ~~$(381; 384)$~~ ; ~~$(382; 385)$~~ ; ~~$(383; 386)$~~ ; ~~$(384; 387)$~~ ; ~~$(385; 388)$~~ ; ~~$(386; 389)$~~ ; ~~$(387; 390)$~~ ; ~~$(388; 391)$~~ ; ~~$(389; 392)$~~ ; ~~$(390; 393)$~~ ; ~~$(391; 394)$~~ ; ~~$(392; 395)$~~ ; ~~$(393; 396)$~~ ; ~~$(394; 397)$~~ ; ~~$(395; 398)$~~ ; ~~$(396; 399)$~~ ; ~~$(397; 400)$~~ ; ~~$(398; 401)$~~ ; ~~$(399; 402)$~~ ; ~~$(400; 403)$~~ ; ~~$(401; 404)$~~ ; ~~$(402; 405)$~~ ; ~~$(403; 406)$~~ ; ~~$(404; 407)$~~ ; ~~$(405; 408)$~~ ; ~~$(406; 409)$~~ ; ~~$(407; 410)$~~ ; ~~$(408; 411)$~~ ; ~~$(409; 412)$~~ ; ~~$(410; 413)$~~ ; ~~$(411; 414)$~~ ; ~~$(412; 415)$~~ ; ~~$(413; 416)$~~ ; ~~$(414; 417)$~~ ; ~~$(415; 418)$~~ ; ~~$(416; 419)$~~ ; ~~$(417; 420)$~~ ; ~~$(418; 421)$~~ ; ~~$(419; 422)$~~ ; ~~$(420; 423)$~~ ; ~~$(421; 424)$~~ ; ~~$(422; 425)$~~ ; ~~$(423; 426)$~~ ; ~~$(424; 427)$~~ ; ~~$(425; 428)$~~ ; ~~$(426; 429)$~~ ; ~~$(427; 430)$~~ ; ~~$(428; 431)$~~ ; ~~$(429; 432)$~~ ; ~~$(430; 433)$~~ ; ~~$(431; 434)$~~ ; ~~$(432; 435)$~~ ; ~~$(433; 436)$~~ ; ~~$(434; 437)$~~ ; ~~$(435; 438)$~~ ; ~~$(436; 439)$~~ ; ~~$(437; 440)$~~ ; ~~$(438; 441)$~~ ; ~~$(439; 442)$~~ ; ~~$(440; 443)$~~ ; ~~$(441; 444)$~~ ; ~~$(442; 445)$~~ ; ~~$(443; 446)$~~ ; ~~$(444; 447)$~~ ; ~~$(445; 448)$~~ ; ~~$(446; 449)$~~ ; ~~$(447; 450)$~~ ; ~~$(448; 451)$~~ ; ~~$(449; 452)$~~ ; ~~$(450; 453)$~~ ; ~~$(451; 454)$~~ ; ~~$(452; 455)$~~ ; ~~$(453; 456)$~~ ; ~~$(454; 457)$~~ ; ~~$(455; 458)$~~ ; ~~$(456; 459)$~~ ; ~~$(457; 460)$~~ ; ~~$(458; 461)$~~ ; ~~$(459; 462)$~~ ; ~~$(460; 463)$~~ ; ~~$(461; 464)$~~ ; ~~$(462; 465)$~~ ; ~~$(463; 466)$~~ ; ~~$(464; 467)$~~ ; ~~$(465; 468)$~~ ; ~~$(466; 469)$~~ ; ~~$(467; 470)$~~ ; ~~$(468; 471)$~~ ; ~~$(469; 472)$~~ ; ~~$(470; 473)$~~ ; ~~$(471; 474)$~~ ; ~~$(472; 475)$~~ ; ~~$(473; 476)$~~ ; ~~$(474; 477)$~~ ; ~~$(475; 478)$~~ ; ~~$(476; 479)$~~ ; ~~$(477; 480)$~~ ; ~~$(478; 481)$~~ ; ~~$(479; 482)$~~ ; ~~$(480; 483)$~~ ; ~~$(481; 484)$~~ ; ~~$(482; 485)$~~ ; ~~$(483; 486)$~~ ; ~~$(484; 487)$~~ ; ~~$(485; 488)$~~ ; ~~$(486; 489)$~~ ; ~~$(487; 490)$~~ ; ~~$(488; 491)$~~ ; ~~$(489; 492)$~~ ; ~~$(490; 493)$~~ ; ~~$(491; 494)$~~ ; ~~$(492; 495)$~~ ; ~~$(493; 496)$~~ ; ~~$(494; 497)$~~ ; ~~$(495; 498)$~~ ; ~~$(496; 499)$~~ ; ~~$(497; 500)$~~ ; ~~$(498; 501)$~~ ; ~~$(499; 502)$~~ ; ~~$(500; 503)$~~ ; ~~$(501; 504)$~~ ; ~~$(502; 505)$~~ ; ~~$(503; 506)$~~ ; ~~$(504; 507)$~~ ; ~~$(505; 508)$~~ ; ~~$(506; 509)$~~ ; ~~$(507; 510)$~~ ; ~~$(508; 511)$~~ ; ~~$(509; 512)$~~ ; ~~$(510; 513)$~~ ; ~~$(511; 514)$~~ ; ~~$(512; 515)$~~ ; ~~$(513; 516)$~~ ; ~~$(514; 517)$~~ ; ~~$(515; 518)$~~ ; ~~$(516; 519)$~~ ; ~~$(517; 520)$~~ ; ~~$(518; 521)$~~ ; ~~$(519; 522)$~~ ; ~~$(520; 523)$~~ ; ~~$(521; 524)$~~ ; ~~$(522; 525)$~~ ; ~~$(523; 526)$~~ ; ~~$(524; 527)$~~ ; ~~$(525; 528)$~~ ; ~~$(526; 529)$~~ ; ~~$(527; 530)$~~ ; ~~$(528; 531)$~~ ; ~~$(529; 532)$~~ ; ~~$(530; 533)$~~ ; ~~$(531; 534)$~~ ; ~~$(532; 535)$~~ ; ~~$(533; 536)$~~ ; ~~$(534; 537)$~~ ; ~~$(535; 538)$~~ ; ~~$(536; 539)$~~ ; ~~$(537; 540)$~~ ; ~~$(538; 541)$~~ ; ~~$(539; 542)$~~ ; ~~$(540; 543)$~~ ; ~~$(541; 544)$~~ ; ~~$(542; 545)$~~ ; ~~$(543; 546)$~~ ; ~~$(544; 547)$~~ ; ~~$(545; 548)$~~ ; ~~$(546; 549)$~~ ; ~~$(547; 550)$~~ ; ~~$(548; 551)$~~ ; ~~$(549; 552)$~~ ; ~~$(550; 553)$~~ ; ~~$(551; 554)$~~ ; ~~$(552; 555)$~~ ; ~~$(553; 556)$~~ ; ~~$(554; 557)$~~ ; ~~$(555; 558)$~~ ; ~~$(556; 559)$~~ ; ~~$(557; 560)$~~ ; ~~$(558; 561)$~~ ; ~~$(559; 562)$~~ ; ~~$(560; 563)$~~ ; ~~$(561; 564)$~~ ; ~~$(562; 565)$~~ ; ~~$(563; 566)$~~ ; ~~$(564; 567)$~~ ; ~~$(565; 568)$~~ ; ~~$(566; 569)$~~ ; ~~$(567; 570)$~~ ; ~~$(568; 571)$~~ ; ~~$(569; 572)$~~ ; ~~$(570; 573)$~~ ; ~~$(571; 574)$~~ ; ~~$(572; 575)$~~ ; ~~$(573; 576)$~~ ; ~~$(574; 577)$~~ ; ~~$(575; 578)$~~ ; ~~$(576; 579)$~~ ; ~~$(577; 580)$~~ ; ~~$(578; 581)$~~ ; ~~$(579; 582)$~~ ; ~~$(580; 583)$~~ ; ~~$(581; 584)$~~ ; ~~$(582; 585)$~~ ; ~~$(583; 586)$~~ ; ~~$(584; 587)$~~ ; ~~$(585; 588)$~~ ; ~~$(586; 589)$~~ ; ~~$(587; 590)$~~ ; ~~$(588; 591)$~~ ; ~~$(589; 592)$~~ ; ~~$(590; 593)$~~ ; ~~$(591; 594)$~~ ; ~~$(592; 595)$~~ ; ~~$(593; 596)$~~ ; ~~$(594; 597)$~~ ; ~~$(595; 598)$~~ ; ~~$(596; 599)$~~ ; ~~$(597; 600)$~~ ; ~~$(598; 601)$~~ ; ~~$(599; 602)$~~ ; ~~$(600; 603)$~~ ; ~~$(601; 604)$~~ ; ~~$(602; 605)$~~ ; ~~$(603; 606)$~~ ; ~~$(604; 607)$~~ ; ~~$(605; 608)$~~ ; ~~$(606; 609)$~~ ; ~~$(607; 610)$~~ ; ~~$(608; 611)$~~ ; ~~$(609; 612)$~~ ; ~~$(610; 613)$~~ ; ~~$(611; 614)$~~ ; ~~$(612; 615)$~~ ; ~~$(613; 616)$~~ ; ~~$(614; 617)$~~ ; ~~$(615; 618)$~~ ; ~~$(616; 619)$~~ ; ~~$(617; 620)$~~ ; ~~$(618; 621)$~~ ; ~~$(619; 622)$~~ ; ~~$(620; 623)$~~ ; ~~$(621; 624)$~~ ; ~~$(622; 625)$~~ ; ~~$(623; 626)$~~ ; ~~$(624; 627)$~~ ; ~~$(625; 628)$~~ ; ~~$(626; 629)$~~ ; ~~$(627; 630)$~~ ; ~~$(628; 631)$~~ ; ~~$(629; 632)$~~ ; ~~$(630; 633)$~~ ; ~~$(631; 634)$~~ ; ~~$(632; 635)$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~2.2) $-3n-20 \in [-4; 4]$~~

~~Но они могут не пересекаться:~~

~~$$\frac{2n-20}{3} = 2k+10$$~~

~~$$3k+n = -20$$~~

~~Но все же мы имеем $(k, n) : (-6, -2), (-5, 5), (-4, 8), (-3, 11)$~~

~~значит мы имеем $y = -9$ всего 4 решения~~

3) Если $y \in (-9; 9)$ и $x \in [-4; 4]$, то

верно (3). Заметим, что решения в 1), 2) и в (3) не пересекаются, т.к. в 1) $x = -4$, а в 2) и 3) нет. Аналогично с y .

Тогда: $x \in [-4; 4]$ и

~~$$-9 \leq 2n-1 \leq 9$$~~

3.1) Если $x = 4$, то $y \neq 2$ иначе (4) и (5) невозможны.

Тогда $y \in \{-7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$ - 9 реш.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3.2) Аналогично при $x \in \{-2; 0; 2\}$ также будет по 9 реш. каждая. То есть всего 27.

3.3) При $x \in \{-3; -1; 1; 3\}$ можем $y:2$, чтобы (4) и (5) выполнялись. То есть:

$y \in \{-8; -6; -4; -2; 0; 2; 4; 6; 8\}$ - 9 решений каждая. Значит всего 36 реш.

Тогда всего решений $9 + 9 + 27 + 36 = 85$

Ответ: а) $(a; 2^{k+1}-a); (a; 3a-2n-1)$, где

$a \in \mathbb{R}; k, n \in \mathbb{Z}$

б) 85



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4. Пусть n - кол-во одимаяцати классиков.

1) Когда билетов 4, то способов разделить их между n людьми: C_n^4

Но если 2 билета есть уже у Пети и Васи, то мы распределяем ~~всё~~ 2 оставшихся билета между $n-2$ людьми: C_{n-2}^2

Значит вероятность, что Петя и Вася получат билеты:

$$P_1 = \frac{\text{у Васи и Пети есть 2 бил.}}{\text{все возможные}} = \frac{\cancel{C_n^4}}{\cancel{C_n^4}} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{(n-4)! \cdot 4!}{n!} = \frac{12}{n(n-1)}$$

2) Когда билетов k ($k > 4$ по условию), то способов разделить их между n людьми: C_n^k .

Если 2 билета есть уже у Пети и Васи, то мы распределяем $k-2$ оставшихся билетов между $n-2$ людьми: C_{n-2}^{k-2}



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐☐☐☒☐☐☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда аналогично:

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

По условию: $P_2 = 3,5 P_1$

Тогда:

$$k(k-1) = 3,5 \cdot 12 = 42$$

Решая кв. ур. получаем: $k=7$ и $k=-6$

Но т.к. $k > 4$, то $k=7$

ОТВЕТ: ~~7~~ 7



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

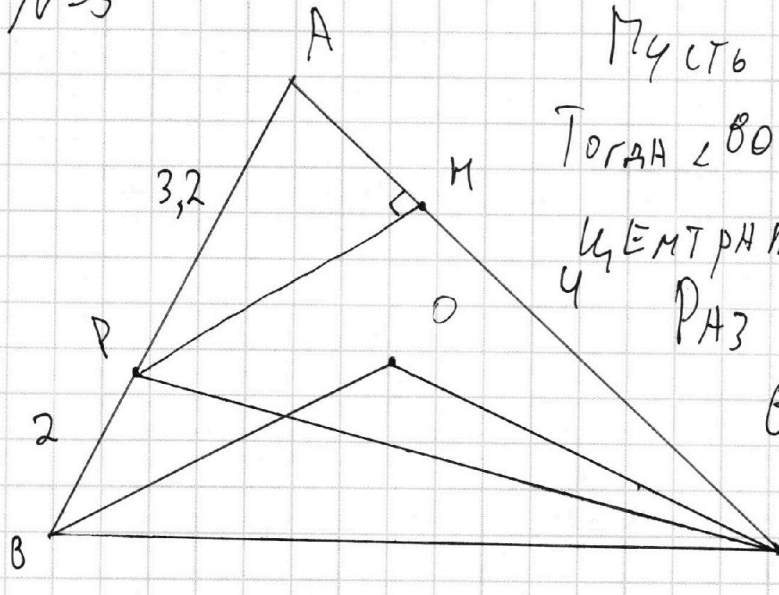
6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



Пусть $\angle BAC = 2$,
Тогда $\angle BOC = 2\alpha$, как
центральный в ω_1 .
Чт. раз $P \in \omega_2$, то
 $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ в ω_2 .

Откуда

$\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ (как вписанные в ω_2)

М.б. $\angle BPC$ - внешний для $\triangle PAC$.

Тогда $\angle BPC = \angle BAC + \angle PCA$

Откуда $\angle PCA = 2$. Значит $\triangle PCA$ - р/б

~~Итак, пусть $\angle BAC = 2$, тогда $\angle BOC = 2\alpha$, как центральный в ω_1 . Чт. раз $P \in \omega_2$, то $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ в ω_2 . Тогда $\angle BPC = \angle BAC + \angle PCA$. Откуда $\angle PCA = 2$. Значит $\triangle PCA$ - р/б.~~

~~Итак, пусть $\angle BAC = 2$, тогда $\angle BOC = 2\alpha$, как центральный в ω_1 . Чт. раз $P \in \omega_2$, то $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ в ω_2 . Тогда $\angle BPC = \angle BAC + \angle PCA$. Откуда $\angle PCA = 2$. Значит $\triangle PCA$ - р/б.~~

р/б $\triangle PCA$ с P опустим высоту PM на AC .

Это высота в р/б $\triangle$, значит она и медиана.

Откуда $AM = MC = \frac{AC}{2} = 2$

Для пр.м. $\triangle PAM$: $\cos \angle PAM = \frac{AM}{AP} = \frac{2}{3.2} = \frac{2.5}{16} = \frac{5}{8}$

То есть $\cos 2 = \frac{5}{8}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

По ОТТ:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \pm \frac{\sqrt{39}}{8}$$

~~Мы применяем формулу~~ Для треугольника:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$AB = AP + PB = 5,2$$

Откуда площадь $\triangle ABC$:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot 5,2 \cdot 4 = 1,3 \sqrt{39}$$

ОТВЕТ: $1,3 \sqrt{39}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

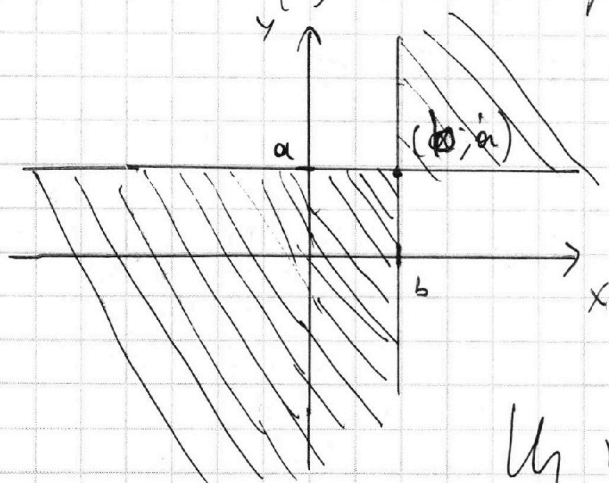
№6

$$\begin{cases} (x - 2\cos 2)(y - 2\sin 2) \geq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

Заметим, что (2) — круг с радиусом 3 и центром (0;0).

Пусть $2\cos 2 = b$; $2\sin 2 = a$ (3)

Тогда (1) можно представить так:



Потому, что это АМА логично:

$$\begin{cases} x > b \\ y > a \\ x < b \\ y < a \\ x = b \\ y = a \end{cases}$$

Из графика видно, что

(1) делит плоскость на 4 части и остаются

2.

Также из (3): $a^2 + b^2 = 4\sin^2 2 + 4\cos^2 2 = 4$

То есть точка (b; a) ~~лежит на~~ лежит на окружности $x^2 + y^2 = 2^2$. Тогда пересечением

(1) и (2) можно изобразить:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

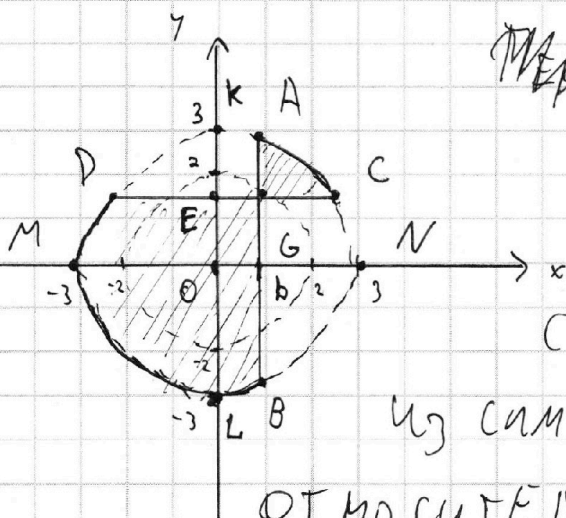
5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~Первое~~ Примечание:

Графически я пытаюсь

изобразить только
случай $a, b \geq 0$, но

из симметрии окружностей

относительно OY и OX видно,

что если есть такие $a_0, b_0 \geq 0$, что при

них периметр минимален, то при

$(a_0; -b_0); (-a_0; b_0); (-a_0; -b_0)$ также будет

максимум (фигура просто отразится

от OY и OX).

Периметр фигуры представим как сумму

или " | " " — " " (

$OG = b$ (так я обозначил) точку-проекцию
 $(a; b)$)

$OE = a$ (аналогично)

$OA = OC = 3$ (радиусы окружностей)

По т. Пифагора для $\triangle OEC$ и $\triangle OGA$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$EC = \sqrt{9 - a^2}$$

$$AG = \sqrt{9 - b^2}$$

Из симметрии отн. ОУ и ОХ:

$$CD = 2 \cdot EC = 2\sqrt{9 - a^2} - \text{длина " "}$$

$$AB = 2 \cdot AG = 2\sqrt{9 - b^2} - \text{длина " "}$$

Так же из симметрии отн. ОХ и ОУ окружности:

$$\overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{CN} \text{ и } \overset{\frown}{BL} = \overset{\frown}{AK}$$

$$\text{Значит } \overset{\frown}{MD} + \overset{\frown}{BL} + \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{KN} = \overset{\frown}{ML}$$

т.к. они оба по $\frac{\pi}{2}$

Но т.к. они обе принадлежат одной окр., то их длины равны.

Тогда мы можем представить периметр как 2 $\overset{\frown}{ML}$. То есть:

$$2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 3 = 3\pi \text{ (т.к. } r = 3 \text{ радиус окружности)}$$

$$\text{Итак значит периметр } M = 3\pi + 2\sqrt{9 - a^2} + 2\sqrt{9 - b^2}$$

Его максимум достигается тогда же, когда и $\sqrt{9 - a^2} + \sqrt{9 - b^2}$ (4)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
4 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

КАК ВЫЯСНИЛОСЬ РАМЧЕЕ:

$$a^2 + b^2 = 4$$

$$\text{Тогда: } a^2 = 4 - b^2$$

Значит (4) равносильно:

$$\sqrt{5+b^2} + \sqrt{9-b^2} \cdot t = b^2$$

$$\text{Пусть } f(t) = \sqrt{5+t} + \sqrt{9-t}$$

$$\text{Тогда } f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{5+t}} - \frac{1}{2\sqrt{9-t}} = \frac{\sqrt{9-t} - \sqrt{5+t}}{2\sqrt{5+t}\sqrt{9-t}}$$

$$f'(t) = 0 \text{ при } \sqrt{9-t} = \sqrt{5+t}$$

$$9-t = 5+t$$

$$t = 2$$

При $t > 0$ $f'(t) < 0$

При $t < 0$ $f'(t) > 0$

Значит t - максимум функции $f(t)$.

Тогда при $b = \pm\sqrt{2}$ достигается максимум

М. Тогда $a = \pm\sqrt{2}$ (из $a^2 + b^2 = 4$)

$$M_{\max} = 3\pi + 2\sqrt{7} + 2\sqrt{3} = 3\pi + 4\sqrt{7}$$

Если $b = \pm\sqrt{2}$, то $\rho(3)$; $\cos 2 = \pm\sqrt{2}$
 $\cos 2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
5 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Тогда } z = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } M = 3\pi + 4\sqrt{7}$$

$$z = \pm \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

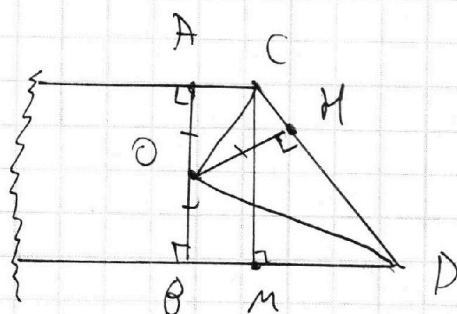
7
☒

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 7

РАССМОТРИМ СЕЧЕНИЕ ПРОХОДЯЩЕЕ ЧЕРЕЗ
ТОЧКИ КАСАНИЯ ~~с~~ ШАРА с ВЕРХНИМ, НИЖ-
НИМ и КАКИМ-ТО БОКОВЫМ. (РАССМОТРИ ТОЛЬКО
ПРАВОУГОЛЬНИК)



Пусть O - центр ш.

R - радиус ш.

Тогда $OA = OM = OB = R$

A, B, M - точки касания

Тогда $OA \perp AC$; $OB \perp BD$; $OM \perp CD$

$AC \parallel BD$ - т.к. ~~одна~~ одна плоскость пересекает
параллельные плоскости.

Тогда ~~одна~~ AO и OB - одна прямая.

$\triangle OAC \cong \triangle OCM$ (т.к. $OA = OM$; OC - общая ~~гипотенуза~~
гипотенуза и одна прямая.)

$\triangle OBD \cong \triangle OMD$ (т.к. $OB = OM$; OD - общая и одна
прямая.)

Из равенств: $\angle BOD = \angle DOM$; $\angle AOC = \angle COM$

Но сумма их всех равна 180° (из смежности)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда $\angle COD = 90^\circ$ (как и только развёрнутого)

ОМ - высота в прям. Δ

Тогда $OM = \sqrt{CM \cdot MD}$

Пусть $MD = a$, тогда $CM = \frac{R^2}{a}$

и $CD = MD + CM = \frac{R^2}{a} + a$

Отсюда высота $CM \parallel AB$

$AB = 2R \Rightarrow CM = 2R$

Из равенства члв треугольников:

$AC = CM = \frac{R^2}{a}$

$BD = MD = a$

$BM = AC = \frac{R^2}{a}$ (как проекция)

$MD = BD - BM = a - \frac{R^2}{a}$

По т. Пифагора для ΔCMD :

$CD^2 = CM^2 + MD^2$

$\left(\frac{R^2}{a} + a\right)^2 = 4R^2 + \left(a - \frac{R^2}{a}\right)^2$

~~XXXXXXXXXX~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+x+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$1480 \quad xy = (x-3)(y+3) \quad 1480 \quad xy+1=0$$

$$-3y + 3x - 9 = 0$$

$$x - y = 3$$

$$x = y + 3$$

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta &= \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \\ 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$(y+3)^3 - y^3 - 9(y+3) \cdot y$$

$$y^3 + 3y^2 \cdot 3 + 3y \cdot 3^2 + 3^3 - y^3 - 9y^2 - 27y$$

$$(\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin \pi x$$

$$\sin \alpha - \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sin \pi x - \sin \pi y = 2 \sin \frac{\pi}{2} (x - y) \cdot \cos \frac{\pi}{2} (x + y)$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 2 \cos \frac{\pi}{2} (x - y) \cdot \cos \frac{\pi}{2} (x + y)$$

$$\cos \frac{\pi}{2} (x + y) \cdot \sin \frac{\pi}{2} (x - y) \cdot \sin \pi x - 2 \cos \frac{\pi}{2} (x - y) \cdot \cos \pi x = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} (x + y) \right) - \cos \frac{\pi}{2} (3x - y) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

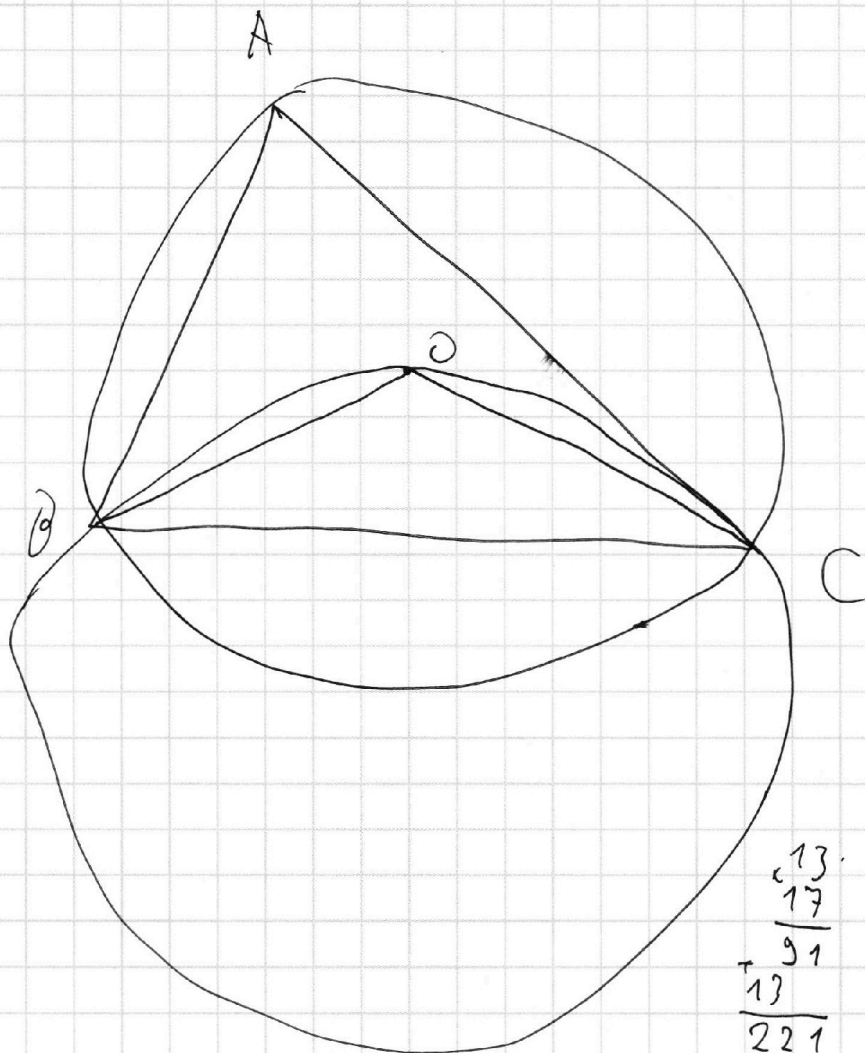
5
☐

6
☐

7
☐

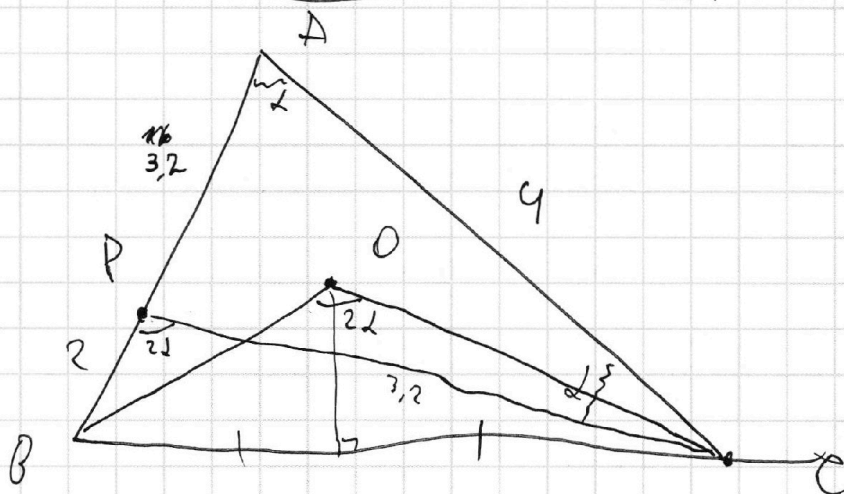
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{array}{r} 13 \\ 17 \\ \hline 31 \\ 13 \\ \hline 221 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ 2 \\ \hline 31 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ \hline 111 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\max_{\alpha} (5-4)$$

$$\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}$$

$$\sqrt{5+4\sin^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}$$

$$\sqrt{5+t} + \sqrt{9-t}$$

$$f'(t) = 0$$

$$A = a \cdot 1111, \text{ где } a \in [1; 9]$$

$$B = \overline{bcd}, \text{ где } b, c \text{ и } d = 1$$

$$C = \overline{ef}, \text{ где } e \text{ и } f = 5$$

ABC

$$B: 101$$

$$1111$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ 101 \end{array}$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5 = 2^2$$

$$a = 5$$

$$\arccos 1 \in [0; \pi]$$

$$\frac{20,8}{16}$$

$$\frac{208}{160} = \frac{104}{80} = \frac{52}{40}$$

$$\frac{x}{y} \in [-1; 1]$$

$$-2n - 10 \in (-12; 12) \quad \frac{26}{20} = \frac{13}{10}$$

$$-2n \in (-2; 22]$$

$$n \in [-11; 1)$$

$$-2n - 10 = 6k + 30$$

$$6k + 2n = -40$$

$$3k + n = -20$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

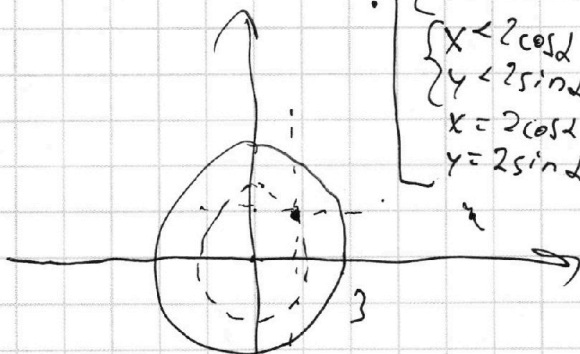
1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

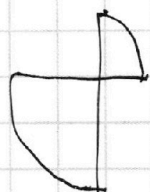
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

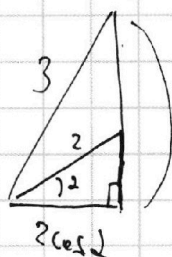
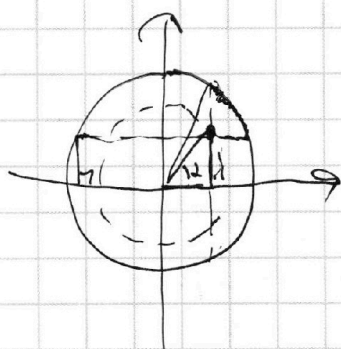
$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x < 2\cos\alpha \\ y < 2\sin\alpha \\ x = 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$$



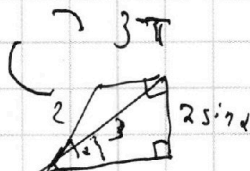
$$\begin{aligned} x &> 2a \\ y &> b \\ a^2 + b^2 &= 4 \end{aligned}$$



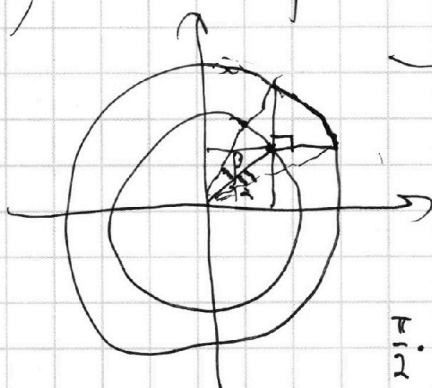
$$\begin{aligned} &\sqrt{9-4\sin^2\alpha} \\ &\sqrt{9-4\cos^2\alpha} \end{aligned}$$



$$\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$$



$$\sin\beta = \frac{2\sin\alpha}{3}$$



$$\frac{\pi}{2} \cdot 3 - \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right) \cdot 3 - \arcsin\left(\frac{2}{3}\cos\alpha\right) \cdot 3$$

$$3 \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{2}{3}\sin\alpha\right) - \arcsin\left(\frac{2}{3}\cos\alpha\right) \right)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k > 4$$

$$P_1 = \frac{C_n^4 - C_{n-2}^4 - 2C_{n-1}^4}{C_n^4}$$

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)! \cdot (n-4)! \cdot 4!}{2! \cdot (n-4)! \cdot n!} = \frac{(n-2)!}{n!} \cdot 12 = \frac{12}{(n-1)n}$$

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)! \cdot k! \cdot (n-k)!}{(n-k)! \cdot (k-2)! \cdot n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$x \in [-4; 4]$$

$$y \in [-9; 9]$$

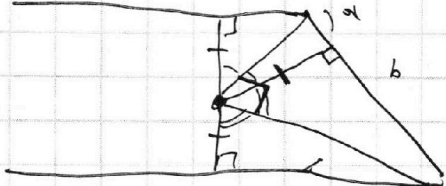
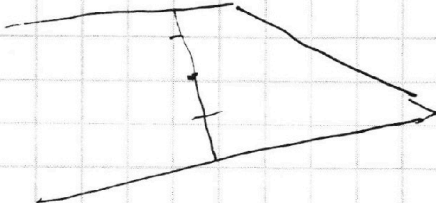
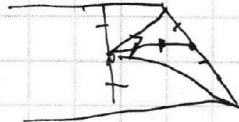
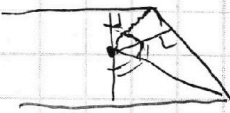
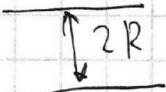
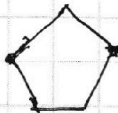
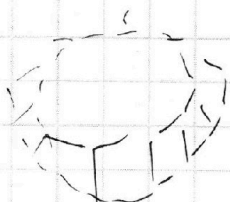
$$x:2 \rightarrow y:2$$

(500р) (1000р)

$$x:2 \rightarrow y:2$$

(400р) (900р)

$$50 + 36 - 1 = 85$$



$$\sqrt{ab} = R$$
$$ab = R^2$$
$$b = \frac{R^2}{a}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $n \geq 0$

~~Пусть~~

Пусть ОСТАЛЬНЫЕ

~~(n-2)!~~ C_n^4

Пусть 1 2 3 4

$$\cancel{C_n^4} \quad C_n^4 - C_{n-2}^4 - 2C_{n-1}^4$$

$$1 - \frac{C_{n-2}^4}{C_n^4} - 2 \cdot \frac{C_{n-1}^4}{C_n^4}$$

$$C_n^4 = \frac{n!}{(n-4)! 4!}$$

$$C_{n-2}^4 = \frac{(n-2)!}{(n-6)! 4!}$$

$$C_{n-1}^4 = \frac{(n-1)!}{(n-5)! 4!}$$

$$\frac{C_{n-2}^4}{C_n^4} = \frac{(n-2)! (n-4)!}{(n-6)! \cdot n!}$$

$$\frac{C_{n-1}^4}{C_n^4} = \frac{(n-1)! (n-4)!}{(n-5)! \cdot n!}$$

$$1 - \frac{(n-2)! (n-4)!}{(n-6)! n!} - 2 \cdot \frac{(n-1)! (n-4)!}{(n-5)! n!}$$