МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x =$ $= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

По условию $A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$ (a-цифра) $a \neq 0$

Заметим, что 11- простое и 101-простое

значит, $A \cdot B \cdot C \vdots 101$ (т.к. $A \vdots 101$)

но $A \cdot B \cdot C$ - полный квадрат, значит, $A \cdot B \cdot C \vdots 101^2$ (т.к. 101-простое)

т.к. $A \vdots 101$, но $A \not\vdots 101^2$, то $B \cdot C \vdots 101$

т.к. $C < 100$, то $C \not\vdots 101$, значит, $B \vdots 101$

получается, $B \in \{101; 202; 303; \dots; 909\}$

условию удовлетворяет только $B = 101$

таким образом, $B \not\vdots 11$

т.к. $A \vdots 11$, то $A \cdot B \cdot C \vdots 11$, ~~значит~~, $A \cdot B \cdot C \vdots 11^2$, т.к. 11 простое

но $A \not\vdots 11^2$; $B \not\vdots 11$, значит, $C \vdots 11$

т.е. $C \in \{11; 22; 33; \dots 99\}$

условию удовлетворяет только $C = 55 = 11 \cdot 5$

т.к. $C \vdots 5$, то $A \cdot B \cdot C \vdots 5 \Rightarrow A \cdot B \cdot C \vdots 5^2$ (как полный квадрат), 5-простое

но $C \not\vdots 5^2$; $B \not\vdots 5$, значит, $A \vdots 5$

$A = 101 \cdot 11 \cdot a \vdots 5$, это возможно только при $a = 5$ $(a \neq 0)$

~~зна~~

значит, $A = 101 \cdot 11 \cdot 5$; $B = 101$; $C = 11 \cdot 5$

$A \cdot B \cdot C = 5^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2$ - полный квадрат

тройка $(A; B; C)$ единственная (искомая тройка)

Ответ: $(5555; 101; 55)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

по условию $K' = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$ – K после уменьшения x на 3 и увеличения y на 3

$\cancel{K'=K}$ $K = K'$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{(y+3)+(x-3)+1}{(x-3)(y+3)}$

$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$ (1)

ОДЗ: $\begin{cases} xy \neq 0 \\ (x-3)(y+3) \neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ y \neq 0 \\ y \neq -3 \end{cases}$

если $x+y+1=0$, то (1) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ y \neq 0 \\ y \neq -3 \end{cases}$

если $x+y+1 \neq 0$, то

(1) $\Leftrightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} xy = (x-3)(y+3) \\ \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ y \neq 0 \\ y \neq -3 \end{cases} \end{cases}$

соответственно, на ОДЗ (1) $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ \begin{cases} x+y+1 \neq 0 \\ xy = (x-3)(y+3) \end{cases} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow$ $\left[\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ xy = xy-3y+3x-9 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ x-y-3=0 \end{array}\right.$

т.к. x и y - положительные и (x-3) и (y+3) - положительные,

то ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x-3 \neq 0 \\ y+3 \neq 0 \end{cases}$ $\cancel{\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}}$ $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ x \neq 3 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} x+y+1=0 \\ x-y-3=0 \end{array}\right.$

тогда на ОДЗ (при $(x>0; y>0)$)

~~но~~ но $x+y+1 > 3+0+1 = 4 > 0$ при $x>3; y>0$, значит,

$K = K' \Leftrightarrow x-y-3=0$ при $x>3; y>0$

$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

после ~~этого~~ уменьшения x на 3 и увеличения y на 3

$K = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{(y+3)+(x-3)+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$

соответственно, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$

$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$ (1)

при $\forall x>0\ \forall y>0$ $x+y+1>0$, значит, (1) $\Leftrightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$\begin{cases} xy = (x-3)(y+3) \\ (x-3)(y+3) \neq 0 \\ xy \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = xy-3y+3x-9 \\ x \neq 3 \end{cases}$ (т.к. $x>0, y>0$) $\begin{cases} x-y=3 \\ x \neq 3 \end{cases}$ (2)

при $x=3$ $x-y=3 \Leftrightarrow 3-y=3 \Leftrightarrow y=0$, что невозможно по условию

значит, (2) $\Leftrightarrow x-y=3$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2 (продолжение)

~~тогда~~ получается, $k = k'$ (k не изменяется при уменьшении x на 3 и увеличении y на 3) $\Leftrightarrow$ ~~$x=y$~~ $x-y=3$

$y = x-3$

$M = x^3 - y^3 - 9xy$

$x^3 - y^3 - 9xy = x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - 9x^2 + 27x =$

$= x^3 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = 27$

$M = 27$

значит, $M=27$ при любых $x>0$, $y>0$, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: 27

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3

а) $(\sin\pi x - \sin\pi y)\sin\pi x = (\cos\pi x + \cos\pi y)\cos\pi x$

$\sin^2\pi x - \sin(\pi y)\sin\pi x = \cos^2\pi x + \cos(\pi y)\cos\pi x$

$-(\cos^2\pi x - \sin^2\pi x) = \cos(\pi y)\cos\pi x + \sin(\pi y)\sin\pi x$

$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$

$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$

$\left[\begin{array}{l} \pi - 2\pi x = (\pi x - \pi y) + 2\pi n \\ \pi - 2\pi x = -(\pi x - \pi y) + 2\pi n,\ n\in Z \end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l} 1-2x = x-y+2n \\ 1-2x = y-x+2n,\ n\in Z \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y = 3x-1+2n \\ y = 1-x-2n,\ n\in Z \end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l} (k;\ 3k-1+2n) - \text{решение} \\ (k;\ \cancel{3k}\ 1-k-2n) - \text{решение},\ \begin{array}{l} n\in Z \\ k\in R \end{array} \end{array}\right.$

Ответ: $(k;\ 3k-1+2n)$; $(k;\ 1-k-2n)$, $n\in Z$, $k\in R$

б) $\arccos\frac{x}{4} + \arccos\frac{y}{9} < 2\pi$

Заметим, что область определения функции $f(t) = \arccos t$ равна $D(f) = [-1;1]$

а область значения $E(f) = [0;\pi]$

тогда неравенство равносильно совокупности

$\left[\begin{array}{l} \arccos\frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos\frac{y}{9} \neq \pi \end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l} \frac{x}{4} \neq -1 \\ \frac{y}{9} \neq -1 \end{array}\right.$ $\quad\left[\begin{array}{l} x \neq -4 \\ y \neq -9 \end{array}\right.$

Значит, из всевозможных пар $(x;y)$ не подходит только пара $(-4;-9)$

Теперь посмотрим, какие из решений уравнения удовлетворяют ОДЗ неравенства $\quad$ ОДЗ: $\left\{\begin{array}{l} -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \end{array}\right.$ $\quad\left\{\begin{array}{l} -4 \leq x \leq 4 \\ -9 \leq y \leq 9 \end{array}\right.$

а именно нас интересуют пары $(x;y)$: $(k;\ 3k-1+2n)$; $(k;\ 1-k-2n)$, $n\in Z$, $\underline{k\in Z}$

$\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -4 \leq k \leq 4 \\ -9 \leq 3k-1+2n \leq 9 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} -4 \leq k \leq 4 \\ -9 \leq 1-k-2n \leq 9, \end{array}\right. \end{array}\right.$

Для каждого $x = k$, $k\in\{-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ рассмотрим все y:

$x = -4$: $\left[\begin{array}{l} y = 5-2n \\ y = -13+2n,\ n\in Z \end{array}\right.$, соответственно $y\in\{-9;-7;-5;-3;-1;1;3;5;7;9\}$,

т.е. y - любое нечетное от -9 до 9 включительно, что логично, т.к. $2n$ - любое четное число

$x = -3$: $\left[\begin{array}{l} y = 4-2n \\ y = -10+2n,\ n\in Z \end{array}\right.$ аналогично вышенаписанному y - любое $\underline{\text{четное}}$ от -9 до 9 включительно

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3 (продолжение)

также для $x=-2$ y - любое нечетное от -9 до 9 включительно

для $x=-1$ y - любое четное от -9 до 9 включительно

и так далее

в итоге:

для $x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$ y - любое нечетное от -9 до 9 включительно т.е. 10 различных y

для $x \in \{-3; -1; 1; 3\}$ - y - любое четное от -9 до 9 включительно т.е. 9 различных y

Соответственно, Области допустимых значений удовлетворяют $5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 = 86$ различных пар $(x;y)$ (целочисленных)

А самому неравенству удовлетворяют все пары $(x;y)$, кроме $(-4;-9)$, которая входит в ~~ОДЗ~~ посчитанные нами 86 пар

значит, ровно 85 пар целых чисел $(x;y)$ удовлетворяют одновременно и уравнению и неравенству.

Ответ: 85

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4.

Посмотрим на количество всевозможных способов раздать 4 билета среди a человек:
(пусть одиннадцатиклассников было a человек)

C_a^4

Из них благоприятных для нас (когда 2 билета достались конкретно двум людям (Пете и Васе) будет:
C_{a-2}^2 (2 билета среди $(a-2)$ человек)

Тогда вероятность искомого исхода $\frac{C_{a-2}^2}{C_a^4} = \frac{\frac{(a-2)!}{2!(a-4)!}}{\frac{a!}{4!(a-4)!}} = \frac{\frac{1}{1\cdot 2}}{\frac{a\cdot(a-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}} = \frac{12}{a(a-1)}$

Ту же вероятность посчитаем для некоторого количества билетов $k>4$:
всего исходов: C_a^k
благоприятных исходов: C_{a-2}^{k-2}

вероятность искомого исхода: $\frac{C_{a-2}^{k-2}}{C_a^k} = \frac{\frac{(a-2)!}{(k-2)!(a-k)!}}{\frac{a!}{k!(a-k)!}} = \frac{1}{\frac{a(a-1)}{k(k-1)}} = \frac{k(k-1)}{a(a-1)}$

~~Ко~~ По условию в начале месяца вероятность в 3,5 раза меньше, чем в конце,
т.е. $3{,}5\cdot\frac{12}{a(a-1)} = \frac{k(k-1)}{a(a-1)}$

$k(k-1)=42$

$k^2-k-42=0$

$(k-7)(k+6)=0$

$\left[\begin{array}{l} k=7 \\ k=-6 \end{array}\right.$

$k=7$, т.к. $k>4$

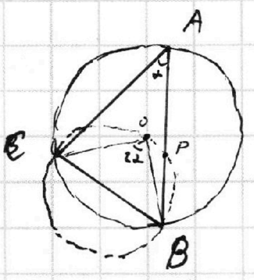
* искомый исход - Петя и Вася вместе попали на концерт

Значит, в конце месяца было выделено 7 билетов

Заметим, что одиннадцатиклассников было хотя бы 7, т.к. если $a<7$, то ~~Е~~ $3{,}5\cdot \frac{12}{a(a-1)} > 3{,}5\cdot\frac{12}{7\cdot 6} = 3{,}5\cdot\frac{12}{42}=1$, т.е. вероятность того, что Петя и Вася вместе пойдут на концерт в конце месяца больше 1, что невозможно.

Ответ: 7.

№5.



Пусть $\omega_2 \cap AC = K$

$AC \cdot AK = AP \cdot AB$ – произведение отрезков секущих

$AK \cdot 4 = \frac{16}{5} \cdot \frac{26}{5}$

$AK = \frac{104}{25}$ $\quad AK > AC \Rightarrow K$ за точкой C

$AB = AP + PB = \frac{26}{5}$

Решение:

1. ~~$\angle COB = 2$~~ $\angle BAC = \alpha$ – обозначим

тогда $\overset{\frown}{BC} = 2\alpha$ (окружности ω_1), значит, $\angle BOC = 2\alpha$

$\angle CPB = \angle COB = 2\alpha$ – опираются на одну дугу

2. $\triangle ABC$

по т. косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC$ (1)

3. $\triangle BPC$

по т косинусов $BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2BP \cdot PC \cdot \cos BPC$ (2)

из (1) и (2)

$AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\alpha = BP^2 + PC^2 - 2BP \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$

$\left(\frac{26}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cdot \cos\alpha = 2^2 + PC^2 + 2 \cdot 2 \cdot PC \cdot \cos 2\alpha$ (3)

$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cos PAC$ – из $\triangle APC$ по т косинусов

$PC^2 = \left(\frac{16}{5}\right)^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cdot \cos\alpha$

(3): $\frac{676}{25} + 16 - \frac{208}{5}\cos\alpha = 4 + \left(\frac{256}{25} + 16 - \frac{128}{5}\cos\alpha\right) - 4\sqrt{\frac{256}{25} + 16 - \frac{128}{5}\cos\alpha} \cdot \cos 2\alpha \quad \Big| \cdot 25$

$676 + 400 - 1040\cos\alpha = 100 + 256 + 400 - 640\cos\alpha - \cancel{100}\,20\sqrt{256 + 400 - 64\cos\alpha} \cdot \cos 2\alpha$

из $\triangle BPC$ ~~$PC^2 + BB^2 +$~~

$320 - 400\cos\alpha = -20\sqrt{656 - 64\cos\alpha} \cdot \cos 2\alpha$

$16 - 20\cos\alpha = -\sqrt{\cancel{656}\ 16(41 - 4\cos\alpha)} \cdot \cos 2\alpha$

$4 - 5\cos\alpha = -\sqrt{41 - 4\cos\alpha} \cdot \cos 2\alpha$

$$\begin{cases} 16 - 40\cos\alpha + 25\cos^2\alpha = (41 - 4\cos\alpha)\cos^2 2\alpha \\ 4 - 5\cos\alpha \le 0 \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\Phi(\alpha): \begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha)\geq 0 & (1)\\ x^2+y^2\leq 9 & (2)\end{cases}$$

(2) $x^2+y^2\leq 9$ - график - круг с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 3 (включая граничные точки)

(1) $(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha)\geq 0$

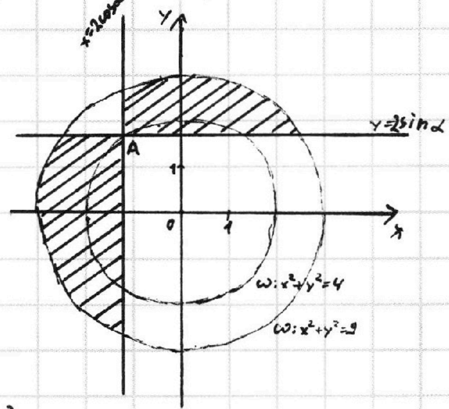
$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2\cos\alpha\geq 0\\ y-2\sin\alpha\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases} x-2\cos\alpha\leq 0\\ y-2\sin\alpha\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\geq 2\cos\alpha\\ y\geq 2\sin\alpha\end{cases}\\ \begin{cases} x\leq 2\cos\alpha\\ y\leq 2\sin\alpha\end{cases}\end{array}\right.$$

– графиком системы является объединение двух четверть-плоскостей, ограниченных прямыми $x=2\cos\alpha$ и $y=2\sin\alpha$

(а именно: I (правая верхняя) и II (левая нижняя))

Также заметим, что точка пересечения прямых $x=2\cos\alpha$ и $y=2\sin\alpha$ $A(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$ лежит на окружности с центром $O(0;0)$ и радиусом 2, т.к. $(2\cos\alpha)^2+(2\sin\alpha)^2=4$ - истина по основному тригонометрическому тождеству)

фигура $\Phi(\alpha)$ представляет собой ~~об~~ пересечение фигур (1) и (2)



$\Phi(\alpha)$ – заштрихованная фигура, ограниченная окружностью $\omega: x^2+y^2=9$ и прямыми $x=2\cos\alpha$; $y=2\sin\alpha$

Рассмотрим её периметр, он состоит из ~~вео~~ двух частей:

I две дуги, заключенные между перпендикулярными прямыми, их сумма градусных мер составляет $180°$, т.е. постоянна и не зависит от α

II хорды окружности, лежащие на прямых $x=2\cos\alpha$ и $y=2\sin\alpha$

~~Несложно заметить, что прямая $x=2\cos\alpha$ пересекает $\omega: x^2+y^2=9$ в точках с абсциссами~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6 (продолжение)

Посмотрим на точки пересечения прямой $x=2\cos\alpha$ и окружности $x^2+y^2=9$

$(2\cos\alpha)^2+y^2=9$

$\cancel{y^2=4-4\cos^2\alpha+5}$ $y^2=9-4\cos^2\alpha$

$y=\pm\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$, тогда точки пересечения $(2\cos\alpha;\sqrt{9-4\cos^2\alpha})$ $(2\cos\alpha;-\sqrt{9-4\cos^2\alpha})$

~~и анал~~ соответственно, длина этой хорды равна $2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$

аналогично для прямой $y=2\sin\alpha$ длина хорды будет: $2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$

Тогда периметр $P(\varphi(\alpha))$ напрямую зависит от суммы

$P=2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}+2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$ $\left(\begin{cases}9-4\sin^2\alpha>0\\9-4\cos^2\alpha>0\end{cases}, \text{т.к. } \begin{matrix}-1\le\sin\alpha\le1\\-1\le\cos\alpha\le1\end{matrix}\right)$

Посмотрим на квадрат этого выражения:

$P^2=4(9-4\sin^2\alpha)+8\sqrt{(9-4\sin^2\alpha)(9-4\cos^2\alpha)}+4(9-4\cos^2\alpha)=36-16\sin^2\alpha+36-16\cos^2\alpha+8\sqrt{(9-4\sin^2\alpha)(5+4\sin^2\alpha)}=$

$=36+36-16+8\sqrt{45+16\sin^2\alpha-16\sin^4\alpha}$

$P(\varphi(\alpha))$ принимает наибольшее значение тогда и только тогда, когда $P^2(\varphi(\alpha))$ принимает наибольшее значение, а это происходит тогда и только тогда, когда $\sqrt{45+16\sin^2\alpha-16\sin^4\alpha}$ принимает наибольшее значение, которое достигается при и только при наибольшем значении $45+16\sin^2\alpha-16\sin^4\alpha$

$t=\sin^2\alpha$, $0\le t\le1$

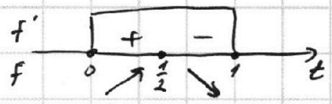
$\cancel{f(t)=-16t^2+16t+45}$ $f(t)=-16t^2+16t+45$, $D(f)=[0;1]$

$\cancel{f(t)=-(9-(4t+5))(4t-9)}$

$f'(t)=-32t+16$, $D(f')=(0;1)$ - критических точек нет

$f'(t)=0 \Leftrightarrow -32t+16=0$

$t=\frac{1}{2}$ - стационарная точка



$t=\frac{1}{2}$ - точка максимума, ~~а также~~ а т.к. на $[0;1]$ ровно одна точка экстремума, то $f(\frac{1}{2})$ - наибольшее значение

Значит, $\varphi(\alpha)$ - наибольшее при $t=\frac{1}{2}$ $\sin^2\alpha=\frac{1}{2}$ $\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$

Ответ: $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

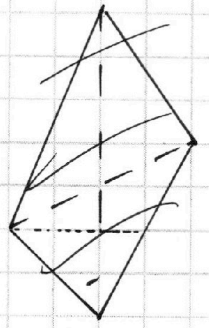
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

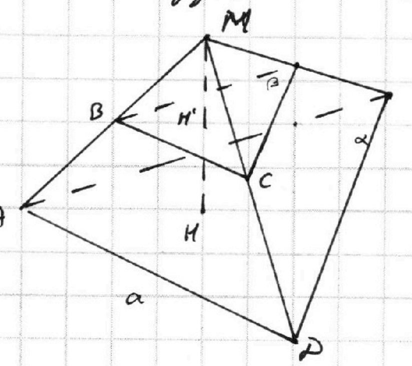
СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 7.

Для удобства будем рисовать треугольную усеченную пирамиду, при этом не пользуясь никакими ~~его~~ её свойствами





ABCD - боковая грань пирамиды

M - вершина полной пирамиды для усеченной

~~HH~~ HH' - высота пирамиды ; MH - высота полной пирамиды

Ω касается всех ребер пирамиды, значит, если ~~Ω~~ Ω_1 - пересечение Ω с ~~(ABC)~~ α, то Ω_1 - вписана в ~~треугольник~~ нижнее основание окружность

α - плоскость нижнего основания

тогда центр Ω_1 - центр вписанной окружности,

$R = \frac{a}{2} \cdot ctg \frac{2\pi}{2n}$, n - количество сторон основания

аналогично для верхнего основания $r = \frac{b}{2} \cdot ctg \frac{2\pi}{2n}$

~~ΔA~~ ABCD - описанная трапеция, т.к. $\Omega \cap (ABC) = \Omega_3$,

Ω_3 касается AB; BC; CD; DA

~~BC=A~~ $BC + AD = AB + CD$ $AB = \frac{a+b}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

1. $A = \overline{aaaa} = 1111\cdot a = 101\cdot 11\cdot a$ 101 - простое, 11 - простое

~~B=~~ .

$A\cdot B\cdot C \vdots 101 \Rightarrow A\cdot B\cdot C \vdots 101^2$ $B \vdots 101 \Rightarrow B = 101$

$C \vdots 11 \Rightarrow C = 55$ $A\cdot B\cdot C = 101\cdot 11\cdot a\cdot 101\cdot 5\cdot 11$ $5a$ - квадрат, $a=5$

Ответ: (5555; 101; 55)

2

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3}+\frac{1}{y+3}+\frac{1}{(x-3)(y+3)}$

$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$

$\begin{cases} x+y+1=0 \\ xy(x-3)(y+3) \neq 0 \\ xy=(x-3)(y+3) \end{cases}$ $xy = xy-3y+3x-9$ $\begin{cases} x+y=-1 \\ 3x-3y-9=0 \end{cases}$ $y=-x-1$, $x-y=3$, $y=x-3$

$x^3-y^3-9xy = (x-y)(x^2+xy+y^2)-9xy$

$\left[\begin{array}{l} x^3-(-x-1)^3-3x(-x-1) \\ x^3-(x-3)^3-3x(x-3) \end{array}\right.$ $x^3+x^3+3x^2+3x+1+3x^2+3x$; $x^3-x^3+9x^2-27x+27-3x^2+9x$; $6x^3+6x^2+6x+1$; $6x^2-18x+27$

3.

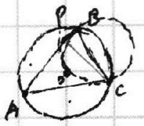
$(\sin(\pi x)-\sin(\pi y))\sin\pi x = (\cos\pi x+\cos\pi y)\cos\pi x$

$\sin\pi x-\sin\pi y = \sin\left(\frac{\pi x+\pi y}{2}+\frac{\pi x-\pi y}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi x+\pi y}{2}-\frac{\pi x-\pi y}{2}\right) = \sin\cdot\cos+\cos\cdot\sin-\sin\cdot\cos+\cos\cdot\sin = 2\cos\frac{\pi x+\pi y}{2}\sin\frac{\pi x-\pi y}{2}$

4. Двое в одинак. кав $\frac{4}{a}\cdot\frac{3}{a-1} = \frac{12}{a(a-1)}$ C_a^4 C_{a-2}^2 5: $1\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$ 6: $1-\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

$\frac{k}{a}\cdot\frac{k-1}{a-1}$ $k(k-1)=3{,}5\cdot 12 = 42$ $k=7$ $\frac{C_{a-2}^2}{C_a^4} = \frac{\frac{(a-2)(a-3)}{2}}{\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}} = \frac{12}{a(a-1)}$ $a<7$ $\frac{12}{7\cdot6}$

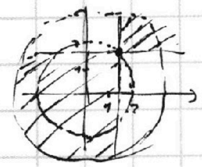
5.



S_{ABC} $AP\cdot AB = \frac{16}{5}\cdot\frac{26}{5}$

6. $\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha)\geq 0 \\ x^2+y^2\leq 9 \end{cases}$ $(x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) = xy-2x\sin\alpha-2y\cos\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 2\cos\alpha \\ y\geq 2\sin\alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 2\cos\alpha \\ y\leq 2\sin\alpha \end{cases} \end{array}\right.$



$2\cdot3|\sin\alpha|+2\cdot3|\cos\alpha|+\cos\alpha\sin t$ $a_1a_2=b_1b_2$ $a_1+a_2+b_1+b_2$?

№3. $\sin^2\pi x-\sin\pi x\sin\pi y = \cos^2\pi x+\cos\pi x\cos\pi y$

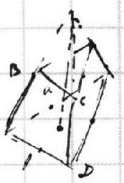
~~$\sin\pi x$~~ ~~$\cos$~~ $\sin^2\pi x-\cos^2\pi x = \cos\pi x\cos\pi y+\sin\pi x\sin\pi y$

$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x-\pi y)$

$\cos(\pi-2\pi x) = \cos(\pi x-\pi y)$

$\left[\begin{array}{l} \pi-2\pi x = \pi x+\pi y+2\pi n \\ \pi-2\pi x = -(\pi x+\pi y)+2\pi n \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 1-3x=y+2n \\ 1-x=2y+2n \end{array}\right.$ $(k; 1-3k-2n)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{R}$; $(k; k-1+2n)$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{R}$

$26\cdot26=625$; $26\cdot2$; 28

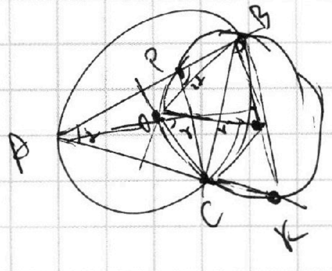


$AB=\frac{BC+AD}{2}$ $\sqrt{R^2-\left(\frac{a\sqrt3}{6}\right)^2}+\sqrt{R^2-\left(\frac{b\sqrt3}{6}\right)^2}$

$AK\cdot AC = AD\cdot AP$

$AK\cdot 4 = \frac{16}{5}\cdot\frac{26}{5}$

$AK = \frac{104}{25}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!