



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$. ~~$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$~~
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекла отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- №1
- 1) Пусть $A = \overline{XXXX}$. Тогда $A = 11 \cdot 101 \cdot X$, $X \in \mathbb{Z}$, $X \in [0; 9]$
 - 2) $11 \mid ABC \Rightarrow ABC : 101$. $101 \in \mathbb{P}$ и ABC - квадрат $\Rightarrow ABC : 101^2$.
 - 3) т.к. $A \not\equiv 101^2$ и $101 \in \mathbb{P}$: $B : 101$ или $C : 101$. $C < 100 \Rightarrow \text{НОД}(C, 101) = 1 \Rightarrow B : 101$
 - 4) B - трёхзначн, $B : 101$ и B содержит цифру 6 $\Rightarrow B = 606$.
 - 5) $A : 11 \Rightarrow ABC : 11$, но т.к. $11 \in \mathbb{P}$ и ABC - квадрат, то $ABC : 11^2$
 - 6) $A \not\equiv 11^2$, $B = 606 \not\equiv 11 \Rightarrow C : 11$. Т.к. C содержит цифру 3, $C = 33$
 - 7) Имеем: $ABC = \underbrace{11 \cdot 101 \cdot X}_A \cdot \underbrace{6 \cdot 101}_B \cdot \underbrace{3 \cdot 11}_C = 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2X$ - полный квадрат $\Rightarrow 2X$ - квадрат $\Rightarrow X = 2$ или $X = 8$ т.к. в X должна входить 2 в четн. степени, а если входит ещё какое-то простое, то хотя бы в квадрате, а $X \leq 9$.

Ответ: $(2222; 606; 33)$ и $(8888; 606; 33)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) по уел: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$ $\Rightarrow$
 $\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x-2+y+2+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$

2) $x+y+5 > 0$ т.е. $x, y > 0$ по уел. $\Rightarrow$ из (1) следует:
 $xy = (x-2)(y+2) \Leftrightarrow xy = xy + 2x - 2y - 4 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow x = y + 2$

3) $M = x^3 - y^3 - 6xy \stackrel{(2)}{=} (y+2)^3 - y^3 - 6(y+2)y = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y = 8.$

Ответ: 8.



1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

a) $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\cos(2\pi x) + \cos(\pi x - \pi y) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\pi x) =$
 $= \cos(\pi x - \pi y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$
 $\xrightarrow{\pi \neq 0} \begin{cases} 2x = x - y + 2k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ 2x = y - x + 2k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ y = 3x + 2k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Т.е. искомые пары: $(t, -t + 2k_1)$ и $(t, 3t + 2k_2)$, где $t \in \mathbb{R}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

b) 1) ~~$\text{Dom}(\arcsin(x)) = [-1; 1]$~~ $\text{Dom}(\arcsin(s)) = [-1; 1] \Rightarrow$
 $x \in [-6; 6], y \in [-2; 2].$
 2) $E(\arcsin(s)) = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi$
 или $\begin{cases} x \in [-6; 6] \\ y \in [-2; 2] \end{cases} \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} = \pi$ или
 $\begin{cases} \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \\ \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$

3) Посчитаем кол-во пар $(x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z})$ таких, что они удовл. п.а и где них определено пер-во и п.б (т.е. $x \in [-6; 6], y \in [-2; 2]$).

Т.к. период $f(s) = \sin(s)$ и $g(s) = \cos(s)$ 2π , то при $x, y \in \mathbb{Z}$: $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x$ зависит только от четности x и y и $(\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ тоже.

Переберём все варианты четности

• $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$: $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\sin 0 + \sin 0) \sin 0 = 0$,
 $(\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x = (\cos 0 - \cos 0) \cos 0 = 0$.
 $0 = 0 \Rightarrow$ Пары таких x, y подходят. Таких пар $2 \cdot 3 = 6$
 (произв. кол-ва четных x и четных y)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- $x:2, y \nmid 2$. $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\sin 0 + \sin \pi) \sin 0 = 0$,
 $(\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x = (\cos 0 - \cos \pi) \cos 0 = 2$.
 $2 \neq 0 \Rightarrow$ такие пары не подходят.
- $x \nmid 2, y:2$. $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\sin \pi + \sin 0) \sin \pi = 0$,
 $(\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x = (\cos \pi - \cos 0) \cos 0 = -2$.
 $-2 \neq 0 \Rightarrow$ такие пары не подходят.
- $x \nmid 2, y \nmid 2$. $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\sin \pi + \sin \pi) \sin \pi = 0$,
 $(\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x = (\cos \pi - \cos \pi) \cos \pi = 0$.
 $0 = 0 \Rightarrow$ такие пары подходят. Таких пар
 $6 \cdot 2 = 12$ (процв. кол-ва нечёт x и нечёт y)

4) Усл. из (3) удовлетворяют $21 + 12 = 33$ пар. Но из (2) только пара $(6, 2)$ не удовл. неравенству. Тем не менее мы её посчитали, т.к. $6:2$ и $2:2$. Т.е. пар, которые удовл. ур-ю из (а) и не в-в из (б) $33 - 1 = 32$

Ответ: а) $(t; -t + 2k_1)$ и $(t; 3t + 2k_2)$, где $t \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

б) 32 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

1) Пусть кол-во 11-классников n

2) В начале месяца

кол-во сп. раздать билеты: $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$

кол-во сп. раздать билеты так, что Петя и Вова оба их получат: $C_{n-2}^2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ (т.к. осталось 2 билета и $n-2$ школьников, а у Пети и Вовы билеты точно есть)

Тогда вероятность в начале месяца $P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3) \cdot 24}{2 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{12}{n(n-1)}$

3) Пусть в итоге выделили x билетов.

кол-во сп. раздать билеты: $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

кол-во сп. раздать так, что Вова и Петя оба получат $C_{n-2}^{x-2} = \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-2-x+2)!} = \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}$

Тогда вероятность в конце месяца: $P_2 = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = \frac{(n-2)! \cdot x! \cdot (n-x)!}{(x-2)!(n-x)! \cdot n!} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$

4) По усл. $P_2 = 6P_1 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{n(n-1)} = \frac{72}{n(n-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x-1) = 72 \Leftrightarrow x^2 - x - 72 = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x+8) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=-8 \end{cases}$

5) ~~Вывести билет~~

Т.к. в конце месяца дали >4 билетов, то из (4) $x=9$.

Ответ: 9 билетов.

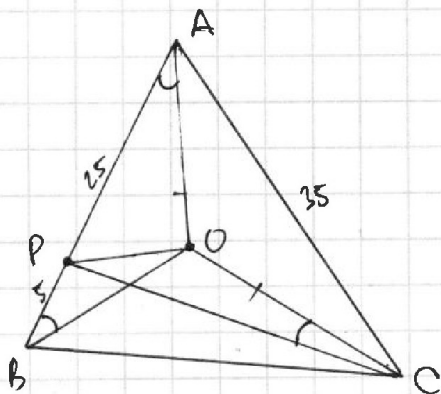


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N5

1) $AO=BO$ как радиусы $\omega_1 \Rightarrow \angle BAO = \angle ABO$
по св-ву р/б $\triangle ABO$

2) $\angle PBO = \angle PCO$ как впис. в ω_2 ,
опирающ. на одну дугу

3) (1), (2) $\Rightarrow \angle BAO = \angle PCO$

4) Рассмотрим $\triangle APO$ и $\triangle CPO$
 $AO=CO$ как радиусы ω_1
 $\angle BAO = \angle PCO$ из (3)
 PO - общ.

~~##~~

5) (4) $\Rightarrow$ по полному признаку равенства тр-ников или $\triangle APO = \triangle CPO$
или $\angle APO + \angle CPO = 180^\circ$. Но $\angle APO + \angle CPO = \angle APC < 180^\circ$, т.к.
 $P \in AB$, а $C \notin AB \Rightarrow \triangle APO = \triangle CPO \Rightarrow CP = AP = 25$

6) Пусть $\angle APC = \alpha$. Тогда т. косинусов в $\triangle APC$
 $AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AP^2 + PC^2 - AC^2}{2AP \cdot PC} =$
 $= \frac{625 + 625 - 1225}{2 \cdot 625} = \frac{1250 - 1225}{2 \cdot 625} = \frac{25}{2 \cdot 625} = \frac{1}{50}$

7) $\angle APC < 180^\circ \Rightarrow \sin \angle APC > 0 \Rightarrow$ по ост. тригоном.
тождеству $\sin \angle APC = 1 - \frac{1}{2500} = \frac{2499}{2500}$

8) $S_{APC} = \frac{1}{2} \sin \angle APC \cdot AP \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2499}{2500} \cdot 25 \cdot 25 =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2499}{25 \cdot 25 \cdot 4} \cdot 25 \cdot 25 = \frac{2499}{8}$

9) $\angle BPC = 180^\circ - \angle APC \Rightarrow \sin \angle BPC = \sin \angle APC = \frac{2499}{2500}$

10) $S_{BPC} = \frac{1}{2} \sin \angle BPC \cdot BP \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2499}{25 \cdot 25 \cdot 4} \cdot 5 \cdot 25 =$
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2499}{20} = \frac{2499}{40}$

11) $S_{ABC} = S_{APC} + S_{BPC} = 2499 \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{40} \right) = 2499 \cdot \left(\frac{5+1}{40} \right) =$
 $= \frac{2499 \cdot 3}{20} = \frac{2499 \cdot 15}{100} = 374,85$

Ответ: 374,85.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2+y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

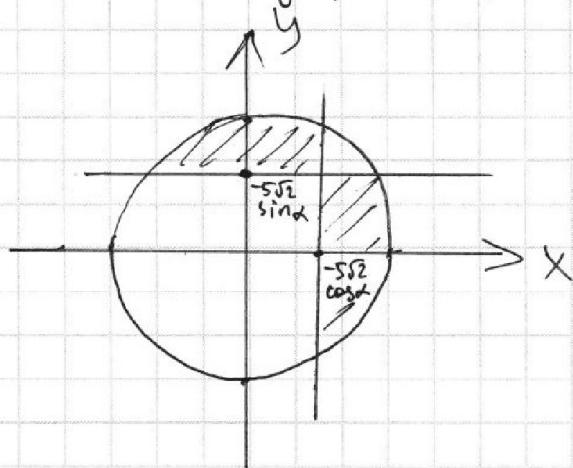
(2) - ~~окр-ти~~ ^{круг} с центром $(0;0)$ и радиусом 13

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x \leq -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y \geq -5\sqrt{2}\sin\alpha \\ x \geq -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y \leq -5\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases}$$

$$\cos\alpha \in [-1; 1] \Rightarrow \sin\alpha \in [-1; 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\sqrt{2}\cos\alpha, -5\sqrt{2}\sin\alpha \in [-5\sqrt{2}; 5\sqrt{2}].$$

$5\sqrt{2} < 5 \cdot 2 < 10 < 13 \Rightarrow$ т.к. $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha, y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$ лежат внутри окр-ти



$\Phi(\alpha)$ заштрихована

Ответ: при $\alpha = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \sin \pi x \cos \pi y + \cos \pi x \sin \pi y = 0$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0.$$

Действительно

для какого-то x и y

$$(x; 3x + 2k_1 + 1)$$

$$(x; -x + 2k_2 + 1)$$

$$x = y = 0 - \text{попробуем}$$

$$D = [-1; 1]$$

$$E = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]_{\arcsin}$$

$$\arccos = [0; \pi]$$

Переберём y . $y = \{-2; 2; -1; 1; 0\}$.

$$3x + 2k_1 + 1 = -2 \Leftrightarrow 3x + 2k_1 = -3 \quad x \in [-6; 6]$$

хорошо
 хорошо

x - мин.

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -1$$

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Сумма двух $\arcsin$ может быть π .

найдем когда она равна π .

$$\begin{cases} \frac{x}{6} = 1 \\ \frac{y}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$6; 18 + 2k_1 + 1 \quad \text{хорошо}$$

$$6; -6 + 2k_1 + 1 \quad \text{хорошо}$$

Попробуем преобразовать в произведение.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

или

$$\cos \left(\frac{2\pi x + \pi x - \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\frac{2\pi x + \pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \Leftrightarrow 3x - y = 1 + 2k$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☒

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y = 0 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\pi x = -\cos(\pi x - \pi y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi x + \pi x - \pi y = \pi + 2\pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x - \pi x + \pi y = \pi + 2\pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 + 2k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ x + y = 1 + 2k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Т.е. ~~на~~ искомыми парам $(x; 3x - 2k_1 - 1)$ и $(x; -x + 2k_2 + 1)$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

б) 1) $\arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ при $t \in [-1; 1]$ и неопределён иначе
2) (1) $\Rightarrow$ если $\frac{x}{6} \in [-1; 1]$ и $\frac{y}{2} \in [-1; 1]$, то $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \in \pi$ всегда кроме случаев $\begin{cases} \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{6} \\ \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

3) Посчитаем кол-во пар $(x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z})$, что они удовл. ур-но из п.а и для них определены $\arcsin \frac{x}{6}$ и $\arcsin \frac{y}{2}$.

Т.к. $\arcsin$ должен быть определён: $x \in [-6; 6]$, $y \in [-2; 2]$.

Переберём ~~2~~ значения y из $[-2; 2]$ и для каждого наймём, при каких x (x, y) будет удовл. п.а.

$$\bullet y = -2: \begin{cases} 3x - 2k_1 - 1 = -2 \\ -x + 2k_2 + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2k_1 = -1 (*) \\ -x + 2k_2 = -3 (***) \end{cases}$$

$$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. (*) : -1 - \text{нечёт}, -2k_1 - \text{чёт} \Rightarrow 3x - \text{нечёт} \Rightarrow x \in \{\pm 5, \pm 3, \pm 1\}$$

$$(\text{т.к. } x \in [-6; 6])$$

$$(***) : -3 - \text{нечёт}, 2k_2 - \text{чёт} \Rightarrow -x - \text{нечёт} \Rightarrow x \in \{\pm 5, \pm 3, \pm 1\}.$$

Т.к. период $f(t) = \sin t$ и $f(t) = \cos t$ 2π , то при $x, y \in \mathbb{Z}$ значение из п.а зависит только от соотнош. x и y . Переберём все случаи:

(продолжение - см след. лист)

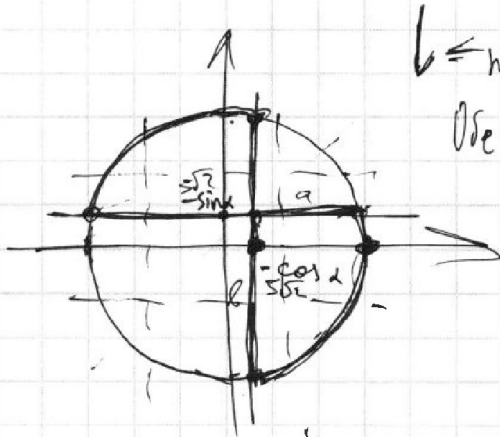


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$b \leq \text{но т. косинусов } 5\sqrt{2} < 13$$

Все пр. завис. от угла

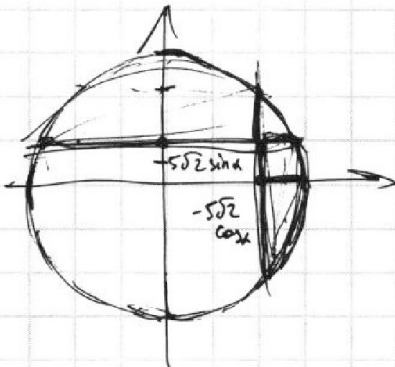
$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2}\cos\alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2}\sin\alpha \geq 0 \end{cases}$$

и наоборот.

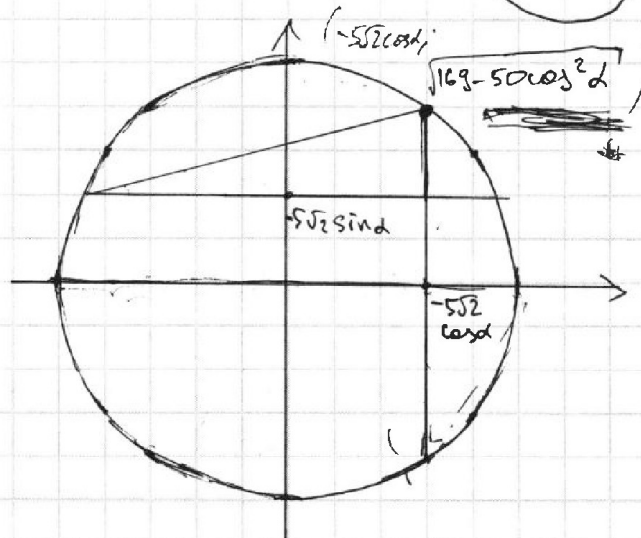
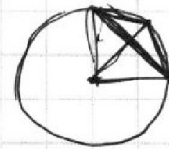
$$x \leq -$$

и зависит от координат.

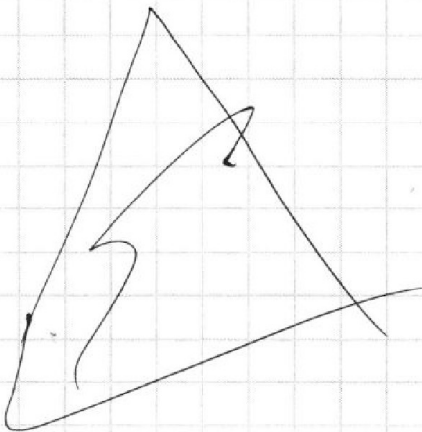
$\alpha =$



~~12~~



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☒	☒	☒	☐

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\pi/35$, продолжение

• $x:2$ и $y:2$ $\therefore (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\sin 0 + \sin 0) \cdot \sin 0 = 0$
 $(\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x = (\cos 0 - \cos 0) \cdot \cos 0 = 0$
 Равенство из на выполняется

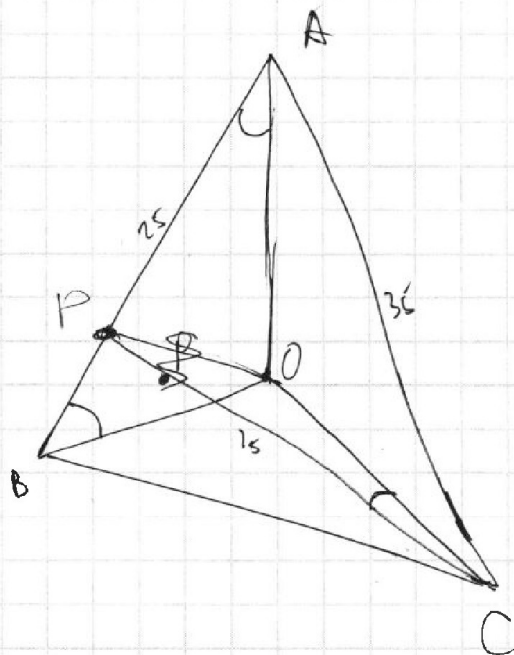
-6. -4. -2. 0. 2. 4. 6.

-2 0 2

$$\begin{array}{r} \times 35 \\ 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\cos \alpha = \frac{625 + 625 - 1225}{2 \cdot 625} = \frac{1}{50}$$

$$\sin \alpha = \frac{2500 - 1}{2500} = \frac{2499}{2500}$$



84.

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2499}{2500} \cdot 25(25 + 5)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2499 \cdot 30}{100}$$

$$\frac{2499 \cdot 15}{100}$$

$$\begin{array}{r} 244 \\ \times 2499 \\ \hline 1115 \\ 12495 \\ 24990 \\ \hline 32485 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x=y-2 \quad x^3-y^3-6xy = (y-2)^3 - y^3 - 6(y-2)y = \\ = y^3 - 6y^2 + 12y - 8 - y^3 - 6y^2 + 12y = -8.$$

$$x=y+2$$

$$(y+2)^3 - y^3 - 6(y+2)y = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y$$

$$(\sin \frac{\pi}{4} x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \frac{\pi}{4} x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

11 классиков n .

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3) \cdot 24^{12}}{2 \cdot n \cdot (n-1) (n-2)(n-3)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} \quad \text{Билетов в конце } x$$

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = \frac{72}{n(n-1)}$$

$$(n-2)! \cdot (n-x)! \cdot x!$$

$$\frac{(n-2)! \cdot (n-x)! \cdot x!}{(x-2)! \cdot (n-x)! \cdot n!} = \frac{x!}{(x-2)! \cdot n(n-1)}$$

$$x(x-1) = 72$$

$$x^2 - x - 72 = 0 \quad x_1 = 9 \quad x_2 = -8 \\ \text{т.к. } x > 0.$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a: 11

$$\overline{xxx} = 11 \cdot \overline{101} = 11 \cdot 101 \cdot x$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 202 \\ \hline 222 \\ \times 11 \\ \hline 2222 \end{array}$$

$$B: 101 \Rightarrow B = 606 = 6 \cdot 101$$

$$11 \cdot 101 \cdot x - 101 \cdot 6 = C$$

$$C: 11$$

3

$$3 \cdot 6 \cdot x - \text{п.к.}$$

$$3^2 \cdot 2 \cdot x - \text{п.к.}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ x=8=2^3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x: \frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

! $x, y \neq 0$
 $x \neq 2$
 $y \neq -2$
 Положим.

$$\begin{cases} x+y+5=0 \\ xy = xy - 2y + 2x + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+5=0 \\ 2x-2y+y=0 \Rightarrow x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=-5 - \text{н. сводит к т.к. } x, y > 0 \\ x-y=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \\ \text{знаем} \end{cases}$$

$$x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy$$

$$\frac{(x+y)^2}{2} - xy$$

$$(x-y)(x+y)^2 = xy$$

$$\boxed{x-y=-2}$$

$$x=y-2$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x-y)^2 + 3xy$$

$$(x-y)^3 + 3xy(x-y)^2 - 6xy$$

$$(x-y)(x^2 - 2xy + y^2) = 3xy((x-y)^2 - 2)$$

$$= x^3 - y^3 - 2x^2y + xy^2 - yx^2 + 2xy^2$$

$$x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$$

$$x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$

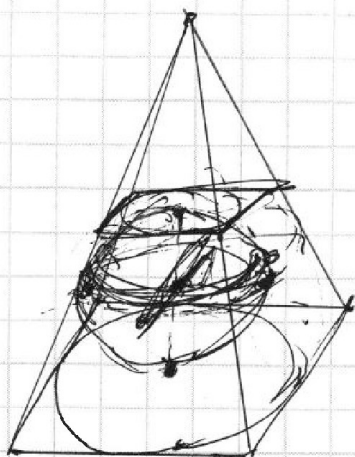


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$D = H \Rightarrow R = \frac{H}{2}$$

$R_{\text{внш}}$

~~8-й~~

Пирамида внеш, если

1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x.$$

Т.е. период 2π , то если x подходит, то $x+2$ тоже.

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x - \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y = 0$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(\pi x - \pi y)$$

$$\sin^2 \pi x + \cos(\pi x - \pi y) - \cos^2 \pi x = 0$$

$$\cos 2\pi x$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0.$$

$$\cos 2\pi x = -\cos(\pi x - \pi y)$$

$$2\pi x = \begin{cases} 2\pi x + \pi x - \pi y = 2\pi k_1 + \pi \\ 2\pi x - \pi x + \pi y = 2\pi k_2 + \pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + x - y = 2k_1 + 1 \\ 2x - x + y = 2k_2 + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2k_1 + 1 \\ x + y = 2k_2 + 1 \end{cases}$$

или сумма $180 + 2\pi k$
или разность $2\pi k$

Отсюда, что для каждого x можно найти y $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.



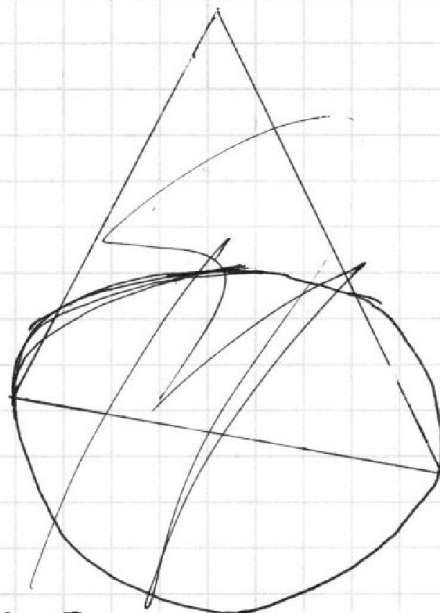
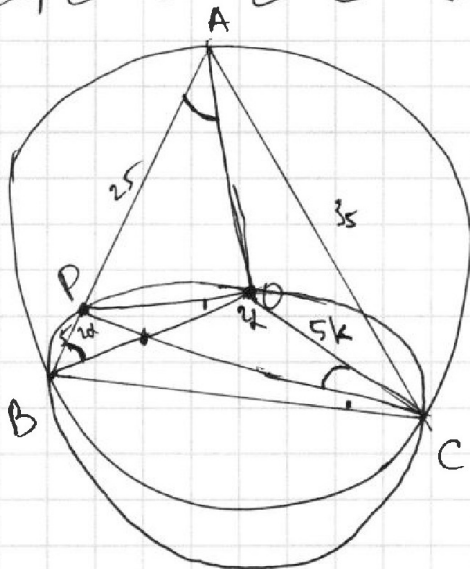
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

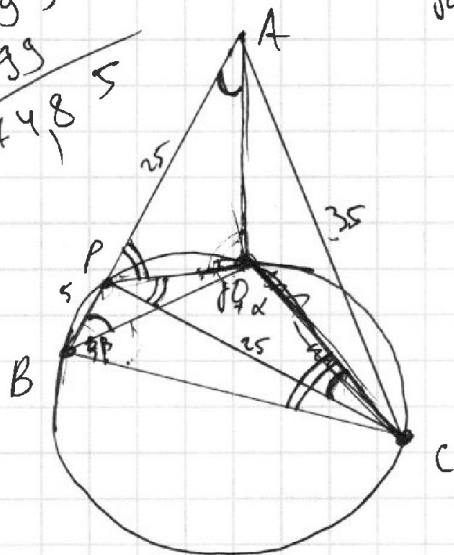
~~Решение~~ ~~написано~~ ~~методом~~ ~~Кол-во~~ ~~стр.~~ ~~раздат~~ Черновик



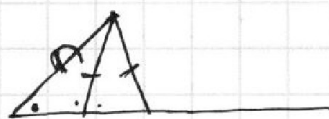
$$\begin{array}{r} 244 \\ \times 115 \\ \hline 12495 \\ 2499 \\ \hline 37485 \end{array}$$

$$\text{deg } \omega_2 A = 30 \cdot 25 = 750$$

$$\triangle AOP = \triangle POC \text{ или } \angle APO + \angle CPO = 180^\circ$$



Можем найти $\cos \angle APC$
и синус
↓
 S_{BPC} — знаем
 S_{APC} тоже.



$$\begin{array}{r} 2' \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1125 \cdot 19 \\ - 98 \cdot 125 \\ \hline 145 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1225 \overline{) 49} \\ - 98 \\ \hline 245 \\ - 245 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1825 \end{array}$$