



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ



## 11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 2, а  $y$  — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 6xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$ .  
 ~~$\sin \pi x + \sin \pi y = \cos \pi x - \cos \pi y$~~

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = 25$ ,  $BP = 5$ ,  $AC = 35$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                                       |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

- 1) Пусть  $A = \overline{XXXX}$ . Тогда  $A = 11 \cdot 101 \cdot X$ ,  $X \in \mathbb{Z}$ ,  $X \in [0; 9]$
- 2) (1)  $\Rightarrow ABC : 101$ .  $101 \in \mathbb{P}$  и  $ABC$  - квадрат  $\Rightarrow ABC : 101^2$ .
- 3) т.к.  $A \geq 101^2$  и  $101 \in \mathbb{P}$  :  $B : 101$  или  $C : 101$ .  $C < 100 \Rightarrow \text{НОД}(C, 101) = 1 \Rightarrow B : 101$
- 4)  $B$  - трёхцифр.,  $B : 101$  и  $B$  содержит цифру 6  $\Rightarrow B = 606$ .
- 5)  $A : 11 \Rightarrow ABC : 11$ , но т.к.  $11 \in \mathbb{P}$  и  $ABC$  - квадрат, то  $ABC : 11^2$
- 6)  $A \geq 11^2$ ,  $B = 606 \geq 11 \Rightarrow C : 11$ . Т.к.  $C$  содержит цифру 3,  $C = 33$
- 7) имеем:  $ABC = \underbrace{11 \cdot 101 \cdot X}_{A} \cdot \underbrace{6 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11}_{B} \cdot \underbrace{X}_{C} = 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2X -$  полный квадрат  $\Rightarrow 2X$  - квадрат  $\Rightarrow \boxed{X \in \mathbb{Z}^{+}}$   
 $\begin{cases} X=2 \\ X=8 \end{cases}$  т.к.  $b$  должна входить 2 в неёт. степени, а если входит ещё какое-то простое, то хотя бы в квадрате, а  $X \leq 9$ .

Ответ:  $(2222; 606; 33)$  и  $(8888; 606; 33)$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N2

$$1) \text{ Но усл: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y-2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x+y+5}{xy} = \frac{x-2+y+2+5}{(x-2)(y+2)} = \cancel{\frac{x+y+5}{xy}} \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$2) x+y+5 > 0 \text{ т.к. } x, y > 0 \text{ по усл. } \Rightarrow \text{ из (1) следует:} \\ xy = (x-2)(y+2) \Leftrightarrow xy = xy + 2x - 2y - 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x - y - 2 = 0 \Leftrightarrow x = y + 2$$

$$3) M = x^3 - y^3 - 6xy \stackrel{(2)}{=} (y+2)^3 - y^3 - 6(y+2)y = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - \\ - y^3 - 6y^2 - 12y = 8.$$

Ответ: 8.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{N3} \\ \text{a) } & (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y}{2} = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow -\cos(2\pi x) + \cos(\pi x - \pi y) = 0 \Leftrightarrow \cos(2\pi x) = \\ & = \cos(\pi x - \pi y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi y - \pi x + 2\pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x - y + 2k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ 2x = y - x + 2k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ y = 3x + 2k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Т.е. исходные пары:  $(t, -t + 2k_1)$  и  $(t, 3t + 2k_2)$ , где  $t \in \mathbb{R}$ ,  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned} \text{б) } & 1) \text{Домен } D(\arcsin(s)) = [-1, 1] \Rightarrow \\ & x \in [-6, 6], y \in [-2, 2]. \\ & 2) E(\arcsin(s))' = \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} \leq \pi \\ & \text{при } \begin{cases} x \in [-6, 6] \\ y \in [-2, 2] \end{cases}. \quad \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} = \pi \quad \text{при} \\ & \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \quad \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

3) Несколько пар  $(x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z})$  таких, что они удовл. н.а и для них определено первое из н.д (т.е.  $x \in [-6, 6]$ ,  $y \in [-2, 2]$ ).

Т.к. период  $f(s) = \sin(s)$  и  $g(s) = \cos(s)$   $2\pi$ , то при  $x, y \in \mathbb{Z}$ :  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x$  зависит только от четности  $x$  и  $y$  и  $(\cos \pi x - \cos \pi y) \times \cos \pi x$  тоже.

Переберём все варианты четности

- $\forall x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}: (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\sin 0 + \sin 0) \sin 0 = 0$ ,  $(\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x = (\cos 0 - \cos 0) \cos 0 = 0$ .  
 $0=0 \Rightarrow$  Пары таких  $x, y$  возможны. Таких пар  $7 \cdot 3 = 21$  (произв. кол-ва четных  $x$  и четных  $y$ )



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмечьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                                   | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

- $x \neq 2, y \neq 2$ .  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\sin 0 + \sin \pi) \sin 0 = 0$ ,  
 $(\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x = (\cos 0 - \cos \pi) \cos 0 = 2$ .  
 $2 \neq 0 \Rightarrow$  такие пары не подходит
- $x \neq 2, y \neq 2$ .  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\sin \pi + \sin 0) \sin \pi = 0$ ,  
 $(\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x = (\cos \pi - \cos 0) \cos 0 = -2$   
 $-2 \neq 0 \Rightarrow$  такие пары не подходит.
- $x \neq 2, y \neq 2$ .  $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\sin \pi + \sin \pi) \sin \pi = 0$ ,  
 $(\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x = (\cos \pi - \cos \pi) \cos \pi = 0$ .  
 $0 = 0 \Rightarrow$  такие пары подходит. Таких пар  
 $6 \cdot 2 = 12$  (проверка кол-ва четёт  $x$  и четёт  $y$ )

4) Усл. из (3) удовлетворяет  $21+12=33$  пар. Но из (2) только пара  $(6, 2)$  неудовл. неравенству.  
 Тем не менее мы её исключали, т.к.  $6:2$  и  $2:2$ . Т.е. пар, которые удовл. ур-ю из (a) и нер-ю из (5)  $33-1=32$

Ответ: а)  $(t; -t+2k_1)$  и  $(t; 3t+2k_2)$ , где  
 $t \in \mathbb{R}, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

б) 32 пары.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№

1) Пусть кол-во 11-классников  $n$

2) В начале месяца

кол-во сп. раздать билетов:  $C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$

кол-во сп. раздать билетов ТАК, что Петя и Вася оба их получат:  $C_{n-2}^2 = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$  (т.к. осталось 2 билета и  $n-2$  школьника, а у Пети и Васи билетов тоже есть)

Тогда вероятность в начале месяца  $P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3) \cdot 24}{2 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{12}{n(n-1)}$

3) Пусть в итоге выделили  $x$  билетов.

кол-во сп. раздать билетов:  $C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!}$

кол-во сп. раздать ТАК, что Вася и Петя оба получат  $C_{n-2}^{x-2} = \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-2-x+2)!} = \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}$

Тогда вероятность в конце месяца:  $P_2 = \frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} = \frac{(n-2)! \cdot x! \cdot (n-x)!}{(x-2)!(n-x)! \cdot n!} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$

4) Но усл.  $P_2 = 6P_1 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{n(n-1)} = \frac{72}{(n)(n-1)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x(x-1) = 72 \Leftrightarrow x^2 - x - 72 = 0 \Leftrightarrow (x-9)(x+8) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=9 \\ x=-8 \end{cases}$$

5) Решение числовых задач (хорошо)

т.к. в конце месяца дали  $>4$  билетов, то из (4)  $x=9$ .

Ответ: 9 билетов.

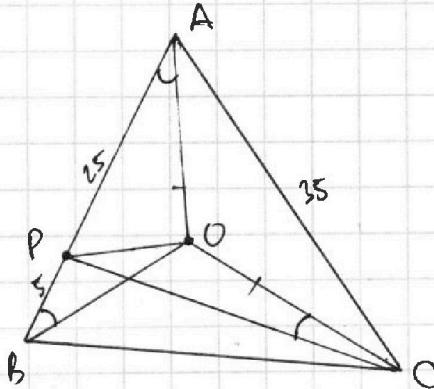


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                                       |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



N5

- 1)  $AO = BO$  как радиусы  $\omega_1 \Rightarrow \angle BAO = \angle ABO$   
но сб-вн р/б  $\triangle ABO$
- 2)  $\angle PBO = \angle PCO$  как влнс. в  $\omega_2$ ,  
отчраюш. на одну дугу
- 3) (1), (2)  $\Rightarrow \angle BAO = \angle PCO$
- 4) Рассмотрим  $\triangle APO$  и  $\triangle CPO$   
 $AO = CO$  как радиусы  $\omega_1$   
 $\angle BAO = \angle PCO$  из (3)  
 $PO$  - общ.

#

5) (4)  $\Rightarrow$  но полуправданку равенства тр-ников или  $\triangle APO = \triangle CPO$   
или  $\angle APO + \angle CPO = 180^\circ$ . Но  $\angle APO + \angle CPO = \angle APC < 180^\circ$ , т.к.  
 $P \in AB$ , а  $C \notin AB \Rightarrow \triangle APO = \triangle CPO \Rightarrow CP = AP = 25$

6) Нужн  $\angle APC = \alpha$ . Тогда т. косинусов в  $\triangle APC$

$$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2AP \cdot PC \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{AP^2 + PC^2 - AC^2}{2 \cdot AP \cdot PC} =$$

$$= \frac{625 + 625 - 1225}{2 \cdot 625} = \frac{1250 - 1225}{2 \cdot 625} = \frac{25}{2 \cdot 625} = \frac{1}{50}$$

7)  $0^\circ < \angle APC < 180^\circ \Rightarrow \sin \angle APC > 0 \Rightarrow$  но осн. тригоном.  
тогда  $\sin \angle APC = 1 - \frac{1}{2500} = \frac{2499}{2500}$

8)  $S_{APC} = \frac{1}{2} \sin \angle APC \cdot AP \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2499}{2500} \cdot 25 \cdot 25 =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2499}{25 \cdot 25 \cdot 4} \cdot 25 \cdot 25 = \frac{2499}{8}$

9)  $\angle BPC = 180^\circ - \angle APC \Rightarrow \sin \angle BPC = \sin \angle APC = \frac{2499}{2500}$

10)  $S_{BPC} = \frac{1}{2} \sin \angle BPC \cdot BP \cdot PC = \frac{1}{2} \cdot \frac{2499}{25^2 \cdot 4} \cdot 5 \cdot 25 =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot \frac{2499}{20} = \frac{2499}{40}$

11)  $S_{ABC} = S_{APC} + S_{BPC} = 2499 \cdot \left( \frac{1}{8} + \frac{1}{40} \right) = 2499 \cdot \left( \frac{5+1}{40} \right) =$   
 $= \frac{2499 \cdot 3}{20} = \frac{2499 \cdot 15}{100} = 374,85$

Ответ: 374,85.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \text{N6} \\ & \left\{ \begin{array}{l} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \quad (1) \\ x^2+y^2 \leq 169 \quad (2) \end{array} \right. \end{aligned}$$

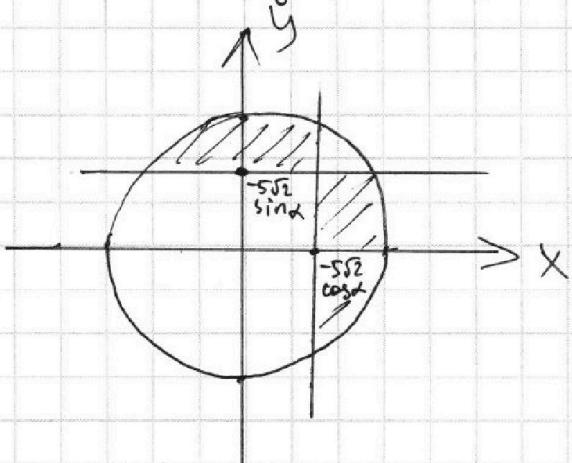
(2) - окружность с центром  $(0,0)$  и радиусом 13

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} x \leq -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y \geq -5\sqrt{2}\sin\alpha \\ x \geq -5\sqrt{2}\cos\alpha \\ y \leq -5\sqrt{2}\sin\alpha \end{cases}$$

$$\cos\alpha \in [-1; 1] \Leftrightarrow \sin\alpha \in [-1, 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\sqrt{2}\cos\alpha, -5\sqrt{2}\sin\alpha \in [-5\sqrt{2}, 5\sqrt{2}].$$

$5\sqrt{2} < 5 \cdot 2 < 10 < 13 \Rightarrow$  np.  $x = -5\sqrt{2}\cos\alpha, y = -5\sqrt{2}\sin\alpha$   
лежат внутри окр-тии



$\Phi(\alpha)$  заштриховано

Ответ: при  $\alpha = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$ .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \sin \pi x \cos \pi y + \cos \pi x \sin \pi y = 0$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0. \quad \text{Действительно для каждого } x \text{ есть } y$$

$$(x; 3x+2k_1+1)$$

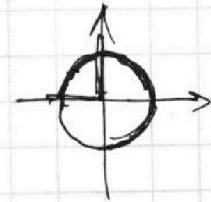
$$(x; -x+2k_2+1)$$

$$x=y=0 - \text{подходит}$$

$$* \quad D = [-1; 1] \quad E = \arcsin \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \quad \text{если } \cos = 0, \pm 1$$

$$\text{Переберём } y. \quad y = \{-2; 2; -1; 1; 0\}.$$

$$3x+2k_1+1 = -2 \Rightarrow \underbrace{3x+2k_1}_{\text{нет}} = -3 \quad x \in [-6; 6]$$



$x$  - нечёт.

$$\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha =$$

$$= -1$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Сумма всех  $\arcsin$  полученных  $y$ .

Найдём когда она равна  $\pi$ .

$$* \quad \text{ст} \quad \text{ст} \quad \begin{cases} \frac{x}{6} = 1 \\ \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$6; 18+2k_1+1 \quad \text{нет}$$

$$6; -6+2k_1+1 \quad \text{нет.}$$

Мы будем преобразовать в произведение.

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\alpha - \beta}{2} \right) ?$$

$$\begin{aligned} & \cos \left( \frac{2\pi x + \pi x - \pi y}{2} \right) = 0 \\ & \cos \left( \frac{3x + \pi y}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\frac{2\pi x + \pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 3x - y = 1 + 2k.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y + \cos \pi x \cos \pi y = 0 \Leftrightarrow \cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos 2\pi x = -\cos(\pi x - \pi y) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi x + \pi x - \pi y = \pi + 2\pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x - \pi x + \pi y = \pi + 2\pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 1 + 2k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ x + y = 1 + 2k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

т.е. исключите пары  $(x, 3x - 2k_1 - 1)$  и  $(x, -x + 2k_2 + 1)$ , где  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .

δ) 1)  $\arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  при  $t \in [-1; 1]$  и неопределён чисто  
2) (1)  $\Rightarrow$  если  $\frac{x}{6} \in [-1; 1]$  и  $\frac{y}{2} \in [-1; 1]$ , то  
 $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$  всегда кроме случаев  $\arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2}$  и  $\arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$

3) Посчитаем кол-во пар  $(x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z})$ , для которых  $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2}$  определены.

т.к.  $\arcsin$  должен быть определён:  $x \in [-6; 6]$ ,  $y \in [-2; 2]$ .

переберём эти значения  $y$  из  $[-2; 2]$  и для каждого

пойдём при каких  $x$  будет удобн. п.а.

$$\begin{aligned} y = -2: \quad & 3x - 2k_1 - 1 = -2 \quad \Leftrightarrow 3x - 2k_1 = -1 \quad (*) \\ & -x + 2k_2 + 1 = -2 \quad \Leftrightarrow -x + 2k_2 = -3 \quad (**), \\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$(*) \Rightarrow -x - 2k_1 - 2 \in \{-5, -3, -1\}$$

(т.к.  $x \in [-6; 6]$ )

$$(**) \Rightarrow -x - 2k_2 - 2 \in \{-5, -3, -1\}$$

т.к. период  $f(t) = \sin t$  и  $f(t) = \cos t$   $2\pi$ , то при  $x, y \in \mathbb{Z}$  значение  $y$  п.а. зависит только от  $y$ . Переберём все случаи:

(продолжение - см. след. лист)

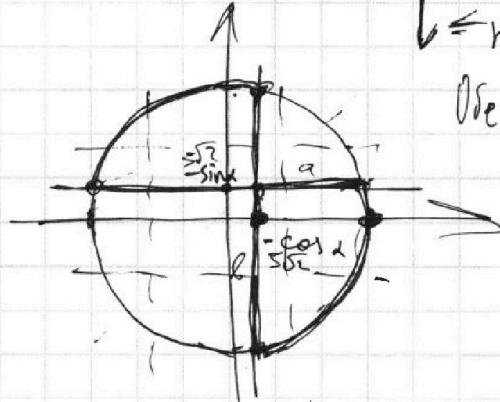


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$b \leq \omega t$ . косинусов  $\leq \sqrt{2} < 13$

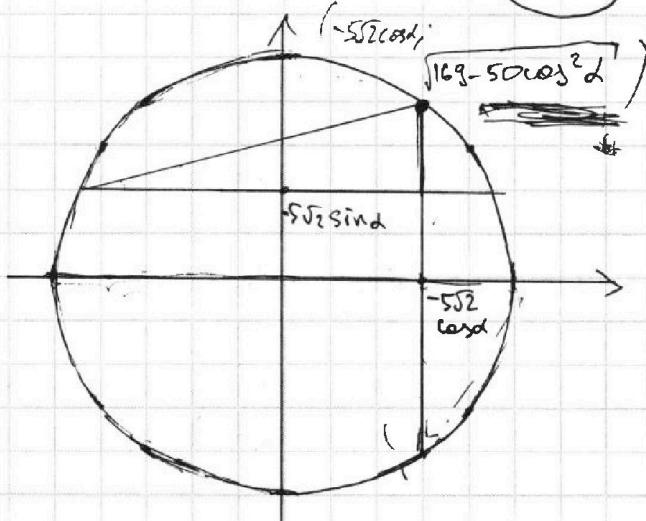
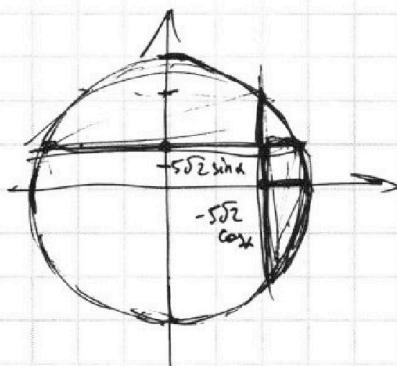
Обр. кр. завис.  $\sqrt{2}$  от угла

$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2}\cos d \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2}\sin d \geq 0 \end{cases}$$

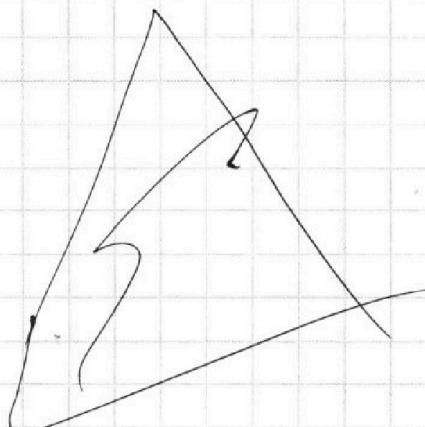
и наоб.

$$x \leq -$$

У зависят от корект.



$$\sin^2 d + \cos^2 d = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\text{№} 3 \delta, \text{ продолжение}$

$x : 2 \quad \text{и} \quad y : 2 \quad \therefore (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\sin 0 + \sin 0) \cdot \sin 0 = 0$

$(\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x = (\cos 0 - \cos 0) \cdot \cos 0 = 0$

Равенство из п.а выполняется

$$-6 \ . \ -4 \ . \ -2 \ . \ 0 \ . \ 2 \ . \ 4 \ . \ 6 \ .$$

-2 0 2

$$\begin{array}{r} \times 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$\cos \alpha = \frac{625+625-1225}{2 \cdot 625} = \frac{1}{50}.$$

$$\sin \alpha = \frac{2500-5}{2500} = \frac{2499}{2500}$$

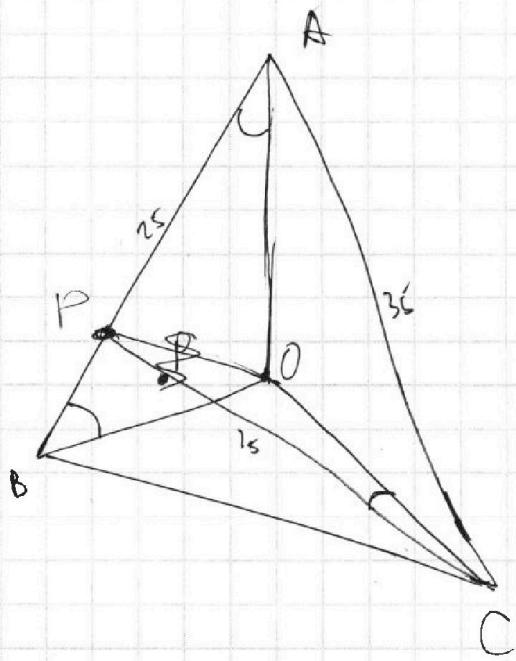
8.

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2499}{2500} \cdot 28(25+5)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2499 \cdot 30}{100}$$

$$\frac{2499 \cdot 15}{100}$$

$$\begin{array}{r} 2499 \\ \times 15 \\ \hline 12495 \\ 2499 \\ \hline 37485 \end{array}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} x &= y-2 \quad x^3 - y^3 - 6xy = (y-2)^3 - y^3 - 6(y-2)y = \\ &= y^3 - 6y^2 + 12y - 8 - y^3 - 6y^2 + 12y = -8. \end{aligned}$$

$$\underline{x = y+2}$$

$$(y+2)^3 - y^3 - 6(y+2)y = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6y^2 - 12y$$

$$(\sin \frac{k}{n}\pi x + \sin k\pi y) \sin \pi x = (\cos \frac{k}{n}\pi x - \cos k\pi y) \cos \pi x$$

11 классиков №:

$$P_1 = \frac{\binom{n}{n-2}}{\binom{n}{n}} = \frac{(n-2)(n-3)}{2 \cdot n(n-1)} \cdot \frac{25^{12}}{(n-2)(n-3)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

$$P_2 = \frac{\binom{n}{x-2}}{\binom{n}{n}}$$

Билетов в конус  $x$

$$P_2 = \frac{\binom{n}{x-2}}{\binom{n}{n}} = \frac{72}{n(n-1)}$$

$$\cancel{\frac{(n-2)! \cdot (n-x)! \cdot x!}{(x-2)! \cdot (n-x)! \cdot n!}} = \frac{x!}{(x-2)! \cdot n(n-1)}$$

$$x(x-1) = 72$$

$$x^2 - x - 72 = 0 \quad (x-9)(x+8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=9 \\ x=-8 \end{array} \right. \text{ т.к. } x>0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                            |                            |                            |                            |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a: 11

$$\begin{array}{r} \cancel{XXX} \\ \times \cancel{XX} = 11 \cdot \cancel{XX} \\ \hline 11 \cdot 101 \cdot X \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 202 \\ 11 \\ \hline 202 \\ 202 \\ \hline 2222 \end{array}$$

$$B: 101 \Rightarrow B = 606 = 6 \cdot 101.$$

$$11 \cdot 101 \cdot X \cdot 101 \cdot 6 = C$$

c: 11

3

$$3 \cdot 6 \cdot X - \text{п.к.}$$

$$3^2 \cdot 2 \cdot X - \text{п.к.} \quad \left[ \begin{array}{l} x=2 \\ x=8 = 2^3 \end{array} \right]$$

$$n: \frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$x, y \neq 0$   
 $x \neq 2$   
 $y \neq -2$   
плюсжим.

$$\left[ \begin{array}{l} x+y+5=0 \\ xy = xy - 2y + 2x + 4 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x+y+5=0 \\ 2x-2y+4=0 \Leftrightarrow x-y+2=0. \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} x+y=-5 - \text{не подходит т.к. } x, y > 0 \\ x-y=-2 \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} (\cancel{x+y})^2 = x^2 + y^2 + 2xy \\ \text{также} \end{array}$$

$$x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy$$

$$\cancel{(x+y)^2} - xy$$

$$\cancel{(x-y)(x+y)^2} - xy$$

$$\boxed{x-y = -2}$$

$$\underline{x = y - 2}$$

$$x^2 + xy + y^2 = (x-y)^2 + 3xy$$

$$(x-y)^3 + \underline{3xy(x-y)^2 - 6xy}$$

$$(x-y)(x^2 - 2xy + y^2) = 3xy((x-y)^2 - 2)$$

$$= x^3 - y^3 - \cancel{y^2} 2x^2y + xy^2 - yx^2 + 2xy^2$$

$$x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$$

$$x^3 - y^3 - 3xy(x-y)$$

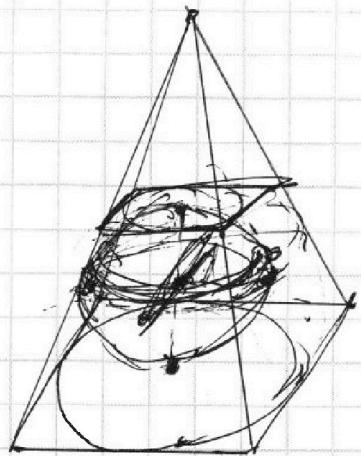


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$D = H \Rightarrow R = \frac{H}{\sqrt{2}}$$

*Sasha*

Пирамида впис., если



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cdot \cos \pi x.$$

Т.у. период  $2\pi$ , т.к. если  $x$  подходит, то  $x+2$  тоже.

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x - \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y = 0$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos(\pi x - \pi y)$$

$$\sin^2 \pi x + \cos(\pi x - \pi y) - \cos^2 \pi x = 0$$

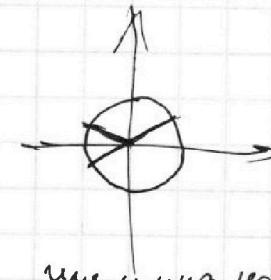
$$\cos 2\pi x$$



$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0.$$

$$\cos 2\pi x = -\cos(\pi x - \pi y)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \left[ \begin{array}{l} 2\pi x + \pi x - \pi y = 2\pi k_1 + \pi \\ 2\pi x - \pi x + \pi y = 2\pi k_2 + \pi \end{array} \right] \Rightarrow \\ & \left[ \begin{array}{l} 3x - y = 2k_1 + 1 \\ x + y = 2k_2 + 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$



или сумма  $180 + 2\pi k$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + x - y = 2k_1 + 1 \\ 2x - x + y = 2k_2 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 2k_1 + 1 \\ x + y = 2k_2 + 1 \end{cases} \text{ или разность}$$

$2\pi k \pi$

Очевидно, что где бы какое-то  $x$  мы можем найти  $y$ .

$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ .



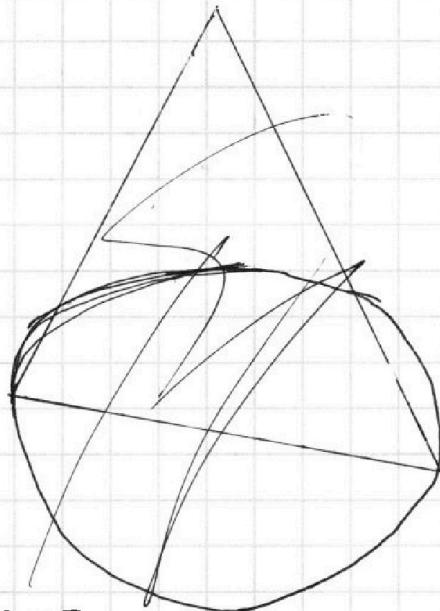
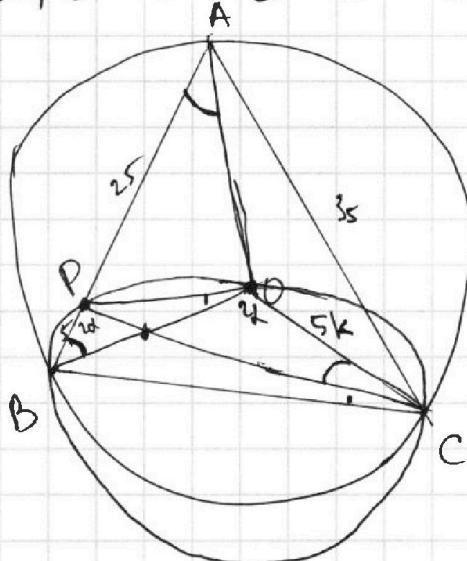
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- |                            |                            |                            |                                       |                                       |                                       |                                       |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input checked="" type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

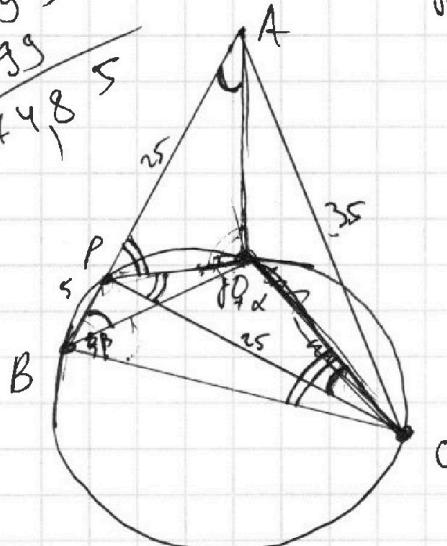
~~№ Решаем задачу методом Кок-Ве с. разобр~~ чертёжник



$$\begin{array}{r} 244 \\ \times 15 \\ \hline 12495 \\ 2499 \\ \hline 37485 \end{array}$$

$$\deg_{\omega_2} A = 30 \cdot 25 = 750$$

$$\Delta AOP = \Delta POB \text{ и } \angle APO + \angle CPO = 180^\circ$$

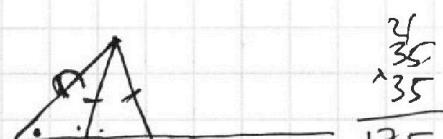


Можем найти  $\cos \angle APC$   
и синус

$\sin \angle APC$  — диаметр  
 $\angle APC$  тоже.

$$\begin{array}{r} 2 \\ \times 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1125 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1225 \\ - 98 \\ \hline 245 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 35 \\ \hline 175 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 105 \\ \hline 1225 \\ - 98 \\ \hline 245 \\ - 245 \\ \hline \end{array}$$