



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101, \text{ где } a \in [0; 9].$$

$$B = \overline{bcd}, \text{ где } \text{хотя бы одна из цифр } b, c, d \text{ равна } 7.$$

$$C = \overline{ef}, \text{ где } e=1 \text{ или } f=1.$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2 = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot \overline{bcd} \cdot \overline{ef}$$

$a \nmid 101$, $\overline{ef} \nmid 101$, а чтобы $A \cdot B \cdot C$ являлось полным квадратом, нужно, чтобы каждой простой множитель входил в произведение в четной степени, т.е. должен быть еще один множитель 101, т.е. $\overline{bcd} : 101$

Т.к. одна из цифр $\overline{bcd}$ равна 7, то $\overline{bcd} = 707$.

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot \overline{ef}$$

Также $A \cdot B \cdot C$ должно содержать еще хотя бы один множитель 11 и 7.

$$a \nmid 11, \text{ значит, } \overline{ef} : 11. \text{ Т.к. } e=1 \text{ или } f=1, \text{ то } \overline{ef} = 11.$$

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot 11$$

Получаем, что $a = 7$.

$$\text{Итого } A = 7777, B = 707, C = 11$$

Ответ: (7777; 707; 11)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{-4}{x(x-4)} + \frac{4}{y(y+4)} + \frac{3(x-4)(y+4) - 3xy}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$\frac{-4y(y+4) + 4x(x-4) + 3(x-4)(y+4) - 3xy}{x(x-4)y(y+4)} = 0$$

$$-4y^2 - 16y + 4x^2 - 16x + 3xy - 12y + 12x - 48 - 3xy = 0$$

$$4x^2 - 4x - y^2 - 7y - 12 = 0$$

$$(x-y)(x+y) - 4(x+y) + 3(x-y) - 12 = 0$$

$$(x+y-4)(x-y+3) = 0$$

$$(x-y-4)(x+y+3) = 0$$

$$\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=-3 \end{cases} \quad x, y > 0 \Rightarrow x-y=4$$

$$x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy =$$

$$= 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = 4x^2 - 8xy + 4y^2 =$$

$$= 4(x-y)^2 = 64$$

Ответ:

Пример: $x=5, y=1$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{3}{5} = \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5}$$

$$x^3 - y^3 - 12xy = 125 - 1 - 60 = 64$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

$$\cos(2\pi y) = -\cos(\pi(x-y))$$

$$\cos(\pi - 2\pi y) = \cos(\pi(x-y)) = A$$

$$\pi - 2\pi y = \pm \arccos A + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\pi(x-y) = \pm \arccos A + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \pi - 2\pi y - 2\pi n = \pi(x-y) - 2\pi k \\ \pi - 2\pi y - 2\pi n + \pi(x-y) - 2\pi k = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi + 2\pi k - 2\pi n = \pi(x+y) \\ \pi(x-3y) + \pi - 2\pi k - 2\pi n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y = 2l+1 \\ x-3y = 2l+1 \end{cases} \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$b) \arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arccos\left(\frac{x}{7}\right) \in [0; \pi]$$

$$\arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos\left(\frac{x}{7}\right) - \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right], \text{ равенство достигается при } \arccos\left(\frac{x}{7}\right) = 0, \arcsin\left(\frac{y}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Т.е. данное условие неравенства не выполняется
при $x = 7$ и $y = 4$.

При остальных x и y (где $-7 \leq x \leq 7$, $-4 \leq y \leq 4$)
неравенство выполняется.

$(-7; -4)$	$(-6; -3)$	$(-1; -4)$	$(0; -3)$	$(7; 4)$
$(-7; -2)$	$(-6; -1)$	$(-1; -2)$	$(0; -1)$	$(7; 2)$
$(-7; 0)$	$(-6; 1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(7; 0)$
$(-7; 2)$	$(-6; 3)$	$(-1; 2)$	$(0; 3)$	$(7; 2)$
$(-7; 4)$		$(-1; 4)$		$(7; 4)$

Итого подходящих пар $5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 - 1 = 67$

Ответ: а) $(x; 2l+1-x)$

$(x; 2l+1-x) = \frac{x+2l+1}{3} \in \mathbb{Z}$

б) 67



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в начале одиннадцатиклассников n , билетов в конце месяца — k .

В начале месяца: всего есть C_n^4 распределений билетов, из них в C_{n-2}^2 у Пети и Васи есть билеты

$$p_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!}}{\frac{n!}{4! \cdot (n-4)!}} = \frac{(n-2)! \cdot 4 \cdot 3}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!} = \frac{12}{n(n-1)}$$

В конце месяца: всего есть C_n^k распределений билетов, из них в C_{n-2}^{k-2} у Пети и Васи есть билеты

$$p_2 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!}}{\frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}} = \frac{(n-2)! \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2)!}{(k-2)! \cdot n(n-1) \cdot (n-2)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$p_2 = p_1 \cdot 11$$

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 11 \cdot \frac{12}{n(n-1)}$$

$$k(k-1) = 11 \cdot 12$$

$$k^2 - k - 11 \cdot 12 = 0$$

$$(k-12)(k+11) = 0$$

$$k > 0 \Rightarrow k = 12$$

Ответ: 12

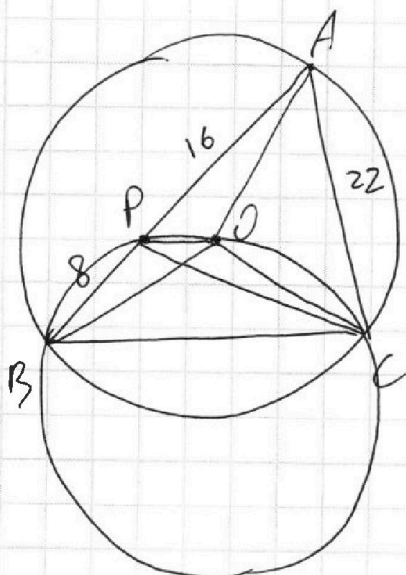


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{Пусть } \angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma.$$

$$AO = BO = CO = R.$$

$$\text{Тогда } \angle AOC = 2\beta, \angle OCA = 90 - \beta$$

$$AC = 2R \cdot \cos(90 - \beta) =$$

$$= 2R \sin \beta = 22$$

$$R \sin \beta = 11$$

$$\text{Аналогично } R \sin \gamma = 12$$

Найдём $\angle PCB$.

$$\angle OCB = \angle OBC = 90 - \alpha$$

$$\angle PBC = \beta$$

$$\angle PCO = \angle PBO = \angle PBC - \angle OBC =$$

$$= \beta - 90 + \alpha = \alpha + \beta - 90$$

$$\angle PCB = \angle OCB - \angle OCP = 90 - \alpha - \alpha + \beta - 90 =$$

$$= 180 - \alpha - \beta - \alpha = \gamma - \alpha$$

По теореме синусов $\frac{BP}{\sin \angle PCB} = \frac{BO}{\sin \angle BCO}$

$$\text{Т.е. } \frac{8}{\sin(\gamma - \alpha)} = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$\begin{cases} R \sin \gamma = 12 \\ R \sin \beta = R \sin(\alpha + \gamma) = 11 \\ R \sin(\gamma - \alpha) = 8 \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} R \sin \gamma = 12 \\ R \cdot \sin \alpha \cdot \cos \gamma + R \cos \alpha \cdot \sin \gamma = 11 \\ R \sin \gamma \cdot \cos \alpha - R \cos \gamma \cdot \sin \alpha = 8 \cos \alpha \end{cases}$$

$$2R \sin \gamma \cdot \cos \alpha = 11 + 8 \cos \alpha$$

$$24 \cos \alpha = 11 + 8 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{11}{16}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}\text{Тогда } \sin d &= \sqrt{1 - \frac{11^2}{162}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 27}{162}} = \\ &= \frac{3}{16} \sqrt{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin d = \frac{1}{2} \cdot \overset{3}{24} \cdot \overset{11}{22} \cdot \frac{3}{16} \cdot \sqrt{15} = \\ &= \frac{99\sqrt{15}}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 99 \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

③ - переходная область



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

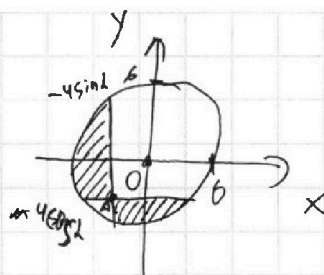
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3. $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$

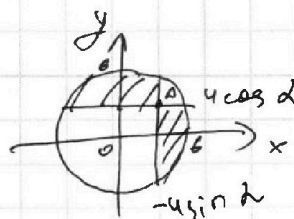
$$\begin{cases} x \geq -4 \sin \alpha \\ y \leq 4 \cos \alpha \\ x \leq -4 \sin \alpha \\ y \geq 4 \cos \alpha \end{cases}$$



$x \geq 0$ вторая сис. не выполн. $y \geq 0$ первая сис. не выполн.
 $x \leq 0$ $y \geq 0$ первая сис. не выполн. $y \leq 0$ $x \leq -4 \sin \alpha$
 $y \leq 0$ вторая сис. не выполн. $x \geq -4 \sin \alpha$
 $x \leq 0$ $y \leq 0$ вторая сис. не выполн. $x \geq -4 \sin \alpha$
 $y \geq 0$ первая сис. не выполн. $x \leq -4 \sin \alpha$
 $x \leq 0$ $y \geq 0$ первая сис. не выполн. $x \geq -4 \sin \alpha$
 $x \geq 0$ $y \leq 0$ вторая сис. не выполн. $x \leq -4 \sin \alpha$
 $x \leq 0$ $y \leq 0$ вторая сис. не выполн. $x \geq -4 \sin \alpha$
 $x \geq 0$ $y \geq 0$ первая сис. не выполн. $x \leq -4 \sin \alpha$
 $x \leq 0$ $y \geq 0$ первая сис. не выполн. $x \geq -4 \sin \alpha$
 $x \geq 0$ $y \leq 0$ вторая сис. не выполн. $x \leq -4 \sin \alpha$
 $x \leq 0$ $y \leq 0$ вторая сис. не выполн. $x \geq -4 \sin \alpha$

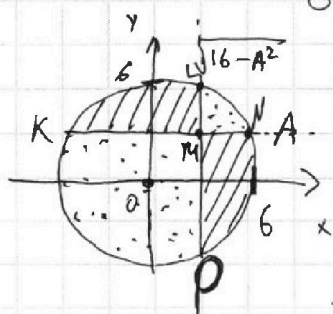
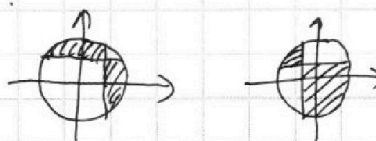
4. $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$

Аналог. предыдущим пунктам



Заметим, что в каждом случае т. А лежит на оар. с центром в (0; 0) и радиусом 4, поэтому она находится внутри круга.

Итого имеем два случая:



$$MN = 2 \cdot \sqrt{36 - A^2}$$

$$PL = 2 \cdot \sqrt{36 - 16 + A^2} = 2 \cdot \sqrt{20 + A^2}$$

$$\frac{KL + PN}{2} = 90^\circ \Rightarrow KL + PN = \pi$$

Т.е. периметры фигур и равны

$$P = KN + PL + \pi \cdot 6 = 2 \cdot \sqrt{36 - A^2} + 2 \cdot \sqrt{20 + A^2} + 6\pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P(A) = 2 \cdot \sqrt{36 - A^2} + 2 \sqrt{20 + A^2} + 6\pi$$

$$P'(A) = \frac{-2A}{\sqrt{36 - A^2}} + \frac{\sqrt{36 - A^2} + \sqrt{20 + A^2}}{2} \leq \frac{\sqrt{36 - A^2 + 20 + A^2}}{2} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$P(A) \leq 8\sqrt{7} + 6\pi, \text{ максимум достигается}$$

$$\text{при } \sqrt{36 - A^2} = \sqrt{20 + A^2}$$

$$36 - A^2 = 20 + A^2$$

$$2A^2 = 16$$

$$A^2 = 8$$

$$A = 2\sqrt{2}$$

$$\text{т.е. } 4|\cos d| = 2\sqrt{2}, \quad 4|\sin d| = 2\sqrt{2}$$

$$\cos d = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin d = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } P_{\max} = 8\sqrt{7} + 6\pi, \quad d = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$O_1T = SO_1 \cdot \cos \varphi = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi (1 + \cos \varphi)}$$

$$\begin{aligned} O_1M' &= \sqrt{O_1T^2 + M'T^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi (1 + \cos \varphi)^2} + \frac{\cos^2 \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}} = \\ &= \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi} + 1} = \\ &= \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi (1 + \cos \varphi)} \sqrt{1 + \sin^2 \varphi} = O_1L \end{aligned}$$

~~СДР~~

~~с другой стороны, $O_1L = SO_1 \cdot \cos \varphi$~~

~~$$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi (1 + \cos \varphi)} \cdot \sqrt{1 + \sin^2 \varphi} =$$~~

~~$$= \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi (1 + \cos \varphi)}$$~~

ΔSO_1L подобен ΔACO

$$\frac{O_1L}{OA} = \frac{SO_1}{SA}$$

~~$$OR = SA \cdot \cos \varphi = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \cos \varphi$$~~

$$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi (1 + \cos \varphi)} \sqrt{1 + \sin^2 \varphi}$$

$$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{1}{\sin \varphi (1 + \cos \varphi)}$$

~~$$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \cos \varphi \cdot OA$$~~

$$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot 2$$

$$OA = \sqrt{AM^2 + OM^2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + \left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right) \cdot \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{b^2}{4} \cdot \sin^2 \varphi + a^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

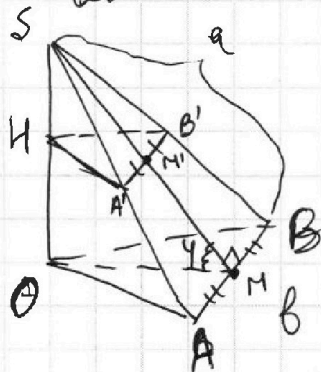
7
☒

СТРАНИЦА

1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим часть данной пирамиды. Т.к. пирамида правильная, то все остальные части все будет аналогично.

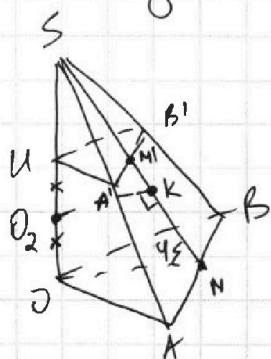


SO — ось симметрии пирамиды,
AA'B'B — ее грань.

Пусть боковое ребро пирамиды
SAB... равно a , ребро основания — b , угол наклона боковой грани равен φ .

Т.к. пирамида симметрична относительно SO при повороте, то центр O_1 ~~сферы~~ ~~шара~~ SZ и O_2 шара ω лежат на SO.

Т.к. O_2 ω касается всех граней усеч. пирамиды, то расстояние от O_2 до граней пирамиды равно. Тогда O_2 — середина OH .



Пусть $O_2K \perp (SAB)$, $K \in (SAB)$.

Из соображений симметрии
 $K \in SM$

$$O_2K = \frac{OH}{2}.$$

$$SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \quad OM = SM \cdot \cos \varphi$$

$$SO = SM \cdot \sin \varphi = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \sin \varphi$$

$$SO_2 = SM - OO_2 = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \sin \varphi - \frac{OH}{2}$$

$\triangle SO_2K$ и $\triangle SMO$ подобны. Т.е.

$$\frac{SO_2}{SM} = \frac{O_2K}{OM}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 из 3

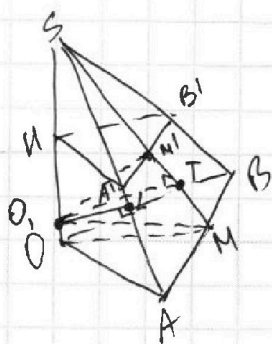
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \sin \varphi - \frac{OH}{2}}{\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}} = \frac{\frac{OH}{2}}{\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \cos \varphi}$$

$$\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{OH}{2} (1 + \cos \varphi)$$

$$OH = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

Из соображений симметрии O_1 равноуд. от M и M' .
Пусть $O_1 L \perp SA$.



Тогда $O_1 L = O_1 M' = O_1 M$

Пусть T - сер. MM' . Тогда

$O_1 T \perp SM$

$$MM' = \frac{OH}{\sin \varphi} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{2 \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

$$SM' = \frac{SM}{\sin \varphi} = \frac{(SO - OH)}{\sin \varphi} =$$

$$SM - MM' = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \left(1 - \frac{2 \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}\right) =$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$$

$$ST = SM' + \frac{MM'}{2} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} + \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi} =$$

$$= \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{1}{1 + \cos \varphi}$$

$$SO_1 = \frac{ST}{\sin \varphi} = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} \cdot \frac{1}{\sin \varphi (1 + \cos \varphi)}$$

если $SO_1 \perp SA$ тогда

$$R = \frac{\cos \alpha}{\sin(\gamma - \alpha)} \cdot 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0$$
$$x^2 + y^2 \leq 36$$

$$x + 4 \sin \alpha \geq 0$$
$$y - 4 \cos \alpha \leq 0$$

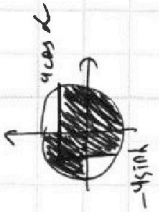
$$4 \sin \alpha \geq -x$$
$$4 \cos \alpha \geq y$$

$$1. \sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$$

$$x > 0$$
$$y > 0$$

$$4 \cos \alpha \geq y$$

$$x < 0$$
$$y > 0$$



$$x < 0, y < 0$$
$$4 \sin \alpha \geq -x$$
$$-4 \leq x$$

$$1. \sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq -4 \sin \alpha \\ y \leq 4 \cos \alpha \end{array} \right\}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} x \leq -4 \sin \alpha \\ y \geq 4 \cos \alpha \end{array} \right\}$$

$$x > 0, y > 0$$

$$x > 0, y < 0$$

$$x < 0, y > 0$$

$$x < 0, y < 0$$

$$x \geq -4 \sin \alpha$$
$$y \leq 4 \cos \alpha$$

$$x \leq -4 \sin \alpha$$
$$y \geq 4 \cos \alpha$$



$$x < 0, y < 0$$

$$x > 0, y < 0$$

$$x < 0, y > 0$$

$$x > 0, y > 0$$

$$x \geq -4 \sin \alpha$$
$$y \leq 4 \cos \alpha$$

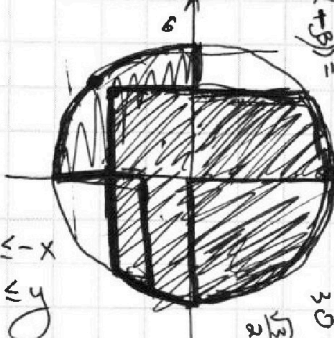
$$x \leq -4 \sin \alpha$$
$$y \geq 4 \cos \alpha$$

$$x > 0, y < 0$$

$$x < 0, y > 0$$

$$x < 0, y < 0$$

$$x > 0, y > 0$$



или

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \sin(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta))$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$



На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

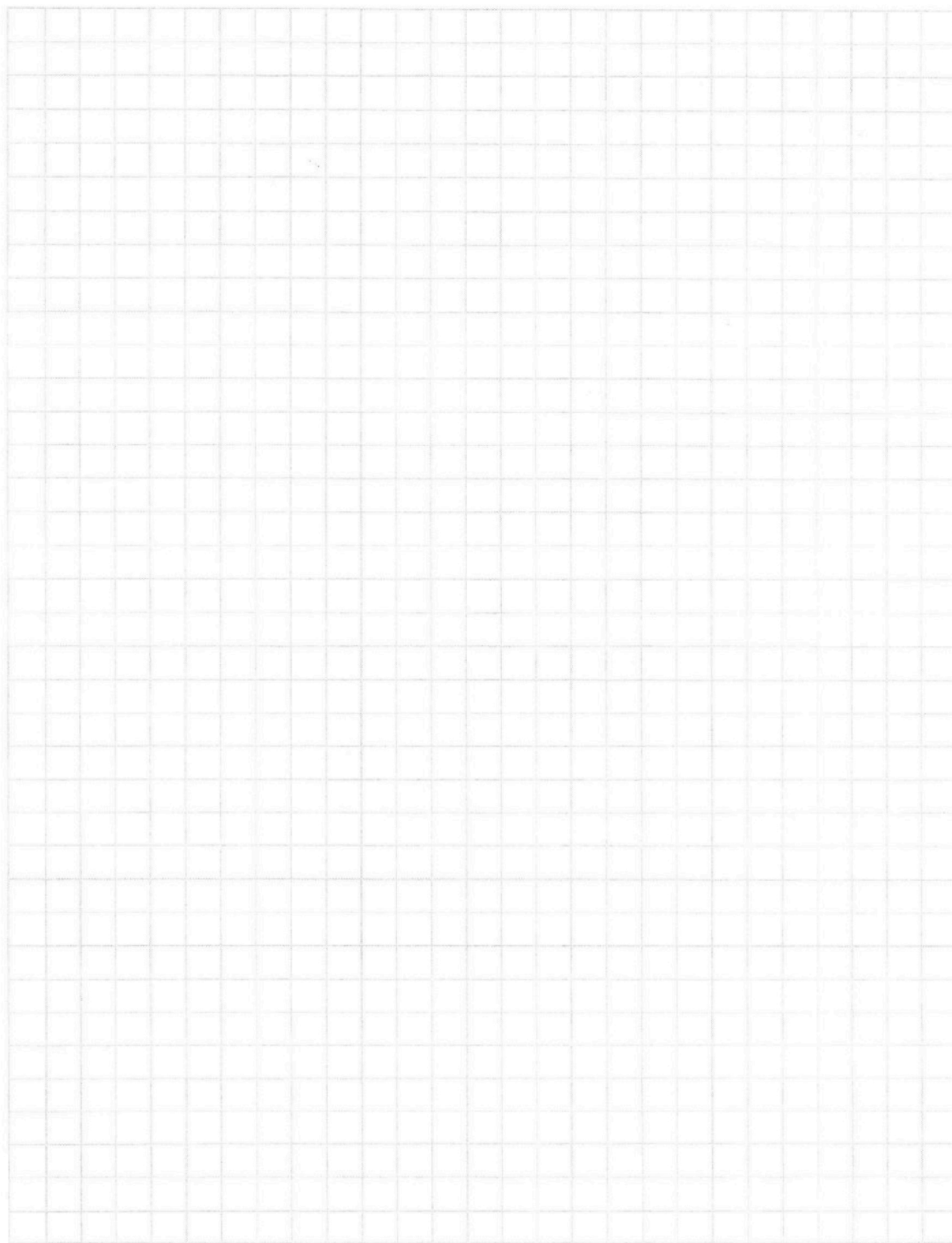
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a^3 + b^3 + 12ab$$

$$x^2 - x - y^2 - 7y - 12 = 0$$

$$125 - 1 = 124$$

$$124 - 60 = 64$$

$$x - y = 4$$

$$4x + 4y - x - 7x - 12 = 0$$

$$3x - 3y = 12$$

$$n(x+y) - k(x-y)$$

$$nx + ny - kx + ky$$

$$k = \frac{1}{y} \left(1 + \frac{3}{x} \right) + \frac{1}{x}$$

$$n - k = -1$$

$$n + k = -7$$

$$(x-y)(x+y) - 4(x+y) + 3(x-y) = \frac{12}{y} = \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{3}{x}} = \frac{kx - 1}{x + 3}$$

$$n = -4$$

$$k = -3$$

$$ak - 4k + 5b - 1$$

$$(x+y)(x-y-4) + 3(x-y-4) = \frac{x+3}{kx-1}$$

$$y+4=x$$

$$(x-y-4)(x+y+3) = 0 \quad y+4 = \frac{(x-4)+3}{k(x-4)-1}$$

$$x - y = 4$$

$$\frac{x+3}{kx-1} + k = \frac{x-1}{kx-4k-1}$$

$$4(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \frac{(kx-1)(x-1)}{kx-4k-1}$$

$$= 4x^2 - 8xy + 4y^2 = kx^2 + k^3x^2 - 2k^2x - 11k - 4k^3x + 4k^2 -$$

$$= 4(x-y)^2 =$$

$$= 4 \cdot 16 = 64$$

$$= kx^2 + k^3x^2 - 2k^2x - 11k - 4k^3x + 4k^2 - 4 = 0$$

$$k^3x^2 - 2k^2x - 11k - 4k^3x + 4k^2 - 4 = 0$$

$$x^2 \cdot k^3 - x(2k^2 + 4k^3) -$$

$$-11k + 4k^2 - 4 = 0$$

$$D = 4k^4 + 16k^5 + 16k^6 + 44k^4 - 16k^5 + 16k^3 = 48k^4 + 32k^6 = 16k^4(2k^2 + 3)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \cdot \sin \pi y = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \cos^2 \pi y$$

$$\begin{aligned} \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y &= \\ &= \cos(\pi x - \pi y) \end{aligned}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos(\pi(x - y))$$

$$- \cos 2\pi y = \cos(\pi(x - y))$$

$$\cos(\pi - 2\pi y) = \cos(\pi(x - y))$$

$$\begin{cases} 2\pi n + \pi - 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k \\ 2\pi n - \pi + 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k \end{cases}$$

$$x + y = 2m + 1$$

$$x + y = 2m + 1$$

$$x = \frac{1}{3} \quad y = \frac{2}{3}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$x - 3y = 2m - 1$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$y =$$

$$y = \frac{1}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+4} + \frac{3}{xy} - \frac{3}{xy-4y+4x-16}$$

$$\frac{-4}{x(x-4)} + \frac{4}{y(y+4)} + \frac{3(x-4)(y+4) - 3xy}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$\frac{-4(y+4)y + 4x(x-4) + 3(x-4)(y+4) - 3xy}{x(x-4)y(y+4)} = 0$$

$$-4y^2 - 16y + 4x^2 - 16x + 3xy - 12y + 12x - 16 - 3xy = 0$$

$$-4y^2 - 28y + 4x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$x^2 - x - y^2 - 7y - 4 = 0$$

$$\frac{-4}{x(x-4)} + \frac{4}{y(y+4)} + \frac{3(x-4)(y+4) - 3xy}{xy(x-4)(y+4)} = 0$$

$$-4y(y+4) + 4x(x-4) + 3xy - 12y + 12x - 48 - 3xy = 0$$

$$-4y^2 - 16y + 4x^2 - 16x - 12y + 12x - 48 = 0$$

$$-4y^2 - 28y + 4x^2 - 4x - 48 = 0$$

$$x^2 - x - y^2 - 7y - 12 = 0$$

~~2x^2 - 2x - 2y^2 - 14y - 12 = 0~~
~~x^2 - x - y^2 - 7y - 12 = 0~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x+y=2m+1 \\ x-3y=2m-1 \end{cases} \quad m \in \mathbb{Z}$$

~~arccos~~

$$-1 \leq \frac{x}{7} \leq 1$$

$$-7 \leq x \leq 7$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$-11 \leq x+y \leq 11$$

$$-11 \leq 2m+1 \leq 11$$

$$-12 \leq 2m \leq 10$$

$$-6 \leq m \leq 5$$

$$\alpha - \beta > -\frac{\pi}{2}$$

$$\alpha \in [0; \pi]$$

$$\beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$\pi \geq \alpha \geq 0$$

$$\frac{\pi}{2} \geq -\beta \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{3\pi}{2} \geq \alpha - \beta \geq -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x = 7$$

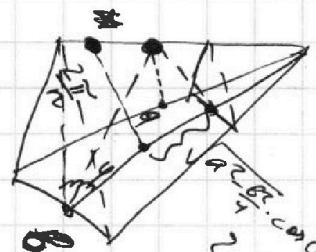
$$\alpha = 0$$

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

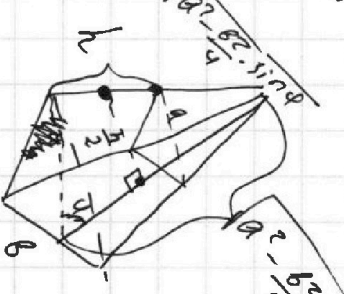
$$\arcsin \frac{4}{7} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{y}{4} = 1$$

$$y = 4$$



$$\cos 0 = 1$$



$$\arccos \frac{x}{7} = 0$$

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sin \alpha - \frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 - b^2} \cdot \sin \alpha} = \frac{1}{2}$$

$$32 \cdot 2 + 67$$

$$y = \frac{1}{2} \left(2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \right)$$

$$\begin{matrix} -7 \\ -6 \\ -5 \\ -4 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n \text{ чис.} - 6$$
$$\frac{4}{n} \cdot \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!} \cdot \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!}$$

$$\frac{4! \cdot (n-2)!}{2! \cdot n!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot (n-2)!}{2 \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}$$

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-2)!} \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{(n-2)! \cdot k \cdot (k-1) \cdot (k-2)!}{(k-2)! \cdot n(n-1) \cdot (n-2)!}$$

$$k=12$$

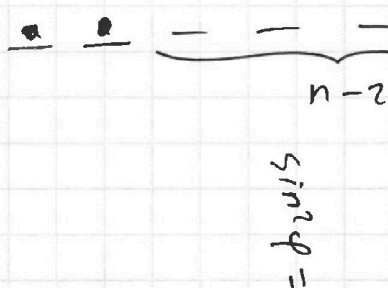
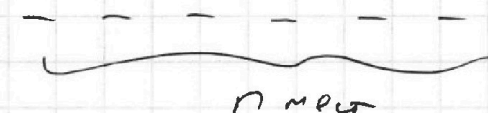


$$\frac{r}{a} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{a^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi}$$
$$\cos \varphi = \frac{b}{2a}$$

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 11 \cdot \frac{12}{n(n-1)}$$

$$k^2 - k - 11 \cdot 12 = 0$$

$$(k+11)(k-12)$$



$$\frac{12}{n(n-1)} \sin^2 \varphi = \frac{12}{n(n-1)} \sin^2 \varphi$$



$$O_1 L = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}{a} = \sin \varphi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\cos \varphi \sqrt{1 + \sin^2 \varphi} \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}{\sqrt{\frac{b^2}{4} \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi}} = 1$$

$$\begin{aligned} \cancel{\cos^2 \varphi} - a^2 - \cos^2 \varphi \cdot \frac{b^2}{4} + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi a^2 - \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cdot \frac{b^2}{4} = \\ = \frac{b^2}{4} \sin^2 \varphi + a^2 \cancel{\cos^2 \varphi} \end{aligned}$$

$$\frac{b^2}{4} (1 \mp \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi) = a^2 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

