МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y =$ $= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$A = 1111 \cdot x$, где $x \in [1; 9]$, $x \in \mathbb{Z}$

$M = A \cdot B \cdot C = P^2$, $P \in \mathbb{N}$

$P^2 = 1111 \cdot x \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot x \cdot B \cdot C$

Поскольку P натуральное, то $B \cdot C = 101 \cdot 11 \cdot y \cdot z$. $y, z \in \mathbb{N}$, $y, z < 10$

Число C содержит "1", $]$ $C = 11$, тогда:

$P^2 = 11^2 \cdot 101 \cdot B \cdot x \Rightarrow B = 101 \cdot 7$ (т.к. B содержит "7")

Тогда $P^2 = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot x \Rightarrow x = 7 \Rightarrow$

$\{A; B; C\} = \{7777; 707; 11\}$

$]$ $C \neq 11$, тогда с учётом наличия "1" в C $\Rightarrow$ ($C < 100$)

C не кратно 11.

Т.о. B должно быть кратно и 11, и 101.

$B < 1000 \Rightarrow$ Противоречие

Тогда $\{7777; 707; 11\}$ – единств. пара

Ответ: $\{7777; 707; 11\}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$

$K = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$ $\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

Умножим обе части на $xy(x-4)(y+4)$ ($x \in \{0;4\}$, $y \in \{0;-4\}$ не р/м, т.к. K не имеет смысла)

$xy^2 - 4y^2 + 4xy - 16y + x^2y - 4xy + 4x^2 - 16x + 3xy - 12y + 12x - 48 =$

$= xy^2 + 4xy + x^2y - 4xy + 3xy$

$4x^2 - 4y^2 - 28y - 4x - 48 = 0.$

$x^2 - x - (y^2 + 7y + 12) = 0.$

$D_x = 1 + 4y^2 + 28y + 48 = (2y+7)^2$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{1-(2y+7)}{2} = -y-3 \text{ — не удовл усл, т.к. } x, y > 0 \\ x = \frac{1+(2y+7)}{2} = y+4 \end{array}\right.$

$M = x^3 - y^3 - 12xy \,\Big|_{x=y+4}$

$M = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y$

$M = 64$

Ответ: $M = 64$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

а) $(\sin \pi y - \sin \pi x)\sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x)\cdot \cos \pi y$

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)\cdot\sin\pi y = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(y+x)\right)\cdot\cos\pi y$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)=0.\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right)\cdot\cos\pi y-\sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right)\cdot\sin\pi y=0\end{array}\right. \Leftrightarrow.$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right)=0\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)-\pi y\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}(x+y)=\frac{\pi}{2}+\pi n\\ \frac{\pi}{2}(3y-x)=\frac{\pi}{2}+\pi k\end{array}\right. n,k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x+y=1+2n\\ 3y-x=1+2k\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2n+1-y\\ x=3y-2k-1.\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2n+1-c\\ y=c,\ c\in\mathbb{R}\end{cases}\\ \begin{cases}x=3c-2k-1\\ y=c,\ c\in\mathbb{R}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow (x,y)=\{(2n+1-c;\ c);\ (3c-2k-1;\ c)\}$$

$n,k\in\mathbb{Z},\ c\in\mathbb{R}.$

б) $\arccos\frac{x}{7}\in[0;\pi],\quad \arcsin\frac{y}{4}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$

$$\arccos\frac{x}{7}-\arcsin\frac{y}{4}>-\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}\arccos\frac{x}{7}\neq0\\ \arcsin\frac{y}{4}\neq\frac{\pi}{2}\\ \frac{x}{7}\in[-1;1]\\ \frac{y}{4}\in[-1;1]\end{cases} \Leftrightarrow$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} \frac{x}{7} \ne 1 \\ y/4 \ne 1 \\ x \in [-7;7] \\ y \in [-4;4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-7;7) = A \\ y \in [-4;4) = B \end{cases}$$

С учетом а:

(только целые, $x \in A$)

1) $c = -4 \to x_1 = 5+2n;\ x_2 = -13-2k \to$ 7 пар

$c = -3 \to x_1 = 4+2n;\ x_2 = -10-2k \to$ 7 пар

$c = -2 \to x_1 = 3+2n;\ x_2 = -7-2k \to$ 7 пар

$c = -1 \to x_1 = 2+2n;\ x_2 = -4-2k \to$ 7 пар

$c = 0 \to x_1 = 1+2n;\ x_2 = -1-2k \to$ 7 пар

$c = 1 \to x_1 = 2n;\ x_2 = 2-2k \to$ 7 пар

$c = 2 \to x_1 = 2n-1;\ x_2 = 5-2k \to$ 7 пар

$c = 3 \to x_1 = 2n-2;\ x_2 = 8-2k \to$ 7 пар.

Итого при $x \in A$, $y \in B$, $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ 56 пар.

Ответ: а) $\{(2n+1-c;\ c);\ (3c-2k-1;\ c)\}$, $n, k \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{R}$

б) 56 пар, $x, y \in \mathbb{Z}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\exists$ n - количество участников, x - кол-во новых билетов

$P_1(4) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n}$

$P_2(4+x) = \frac{4+x}{n} \cdot \frac{3+x}{n}$.

$P_2 = 11 P_1 \Rightarrow \frac{(4+x)(3+x)}{n^2} = 11 \cdot \frac{12}{n^2}$

$x^2 + 7x + 12 = 132$

$x^2 + 7x - 120 = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = -15 \text{ - не удовл усл зад} \\ x = 8 \end{array}\right.$

$x = 8$ - кол-во новых билетов

Тогда всего было $x+4 = 12$ билетов.

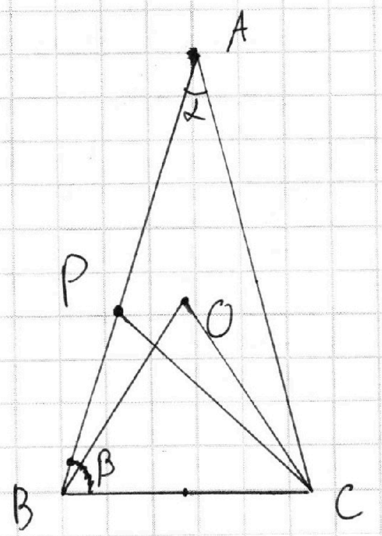
Ответ: 12 билетов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Дано: $\triangle ABC$ – остроуг $\triangle$.

$\omega_1(O; R)$ – опис около $\triangle ABC$

$\omega_2(Q; 7)$ – опис около $\triangle BOC$

$\omega_2 \cap [AB] = P$

$AP = 16$; $BP = 8$; $AC = 22$

$S_{\triangle ABC} = ?$

1. $\rceil \angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$

2. $\angle BAC$ – впис и опир на $\cup BC \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$ (т.к. центр)

3. $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$ (т.к. $B, P, O, C \in \omega_2$ и P, O по одну сторону от (BC))

4. Р/м $\triangle ABC$: $\angle BPC = 2\alpha = \angle PAC + \angle PCA$ (т.к. внешний) $\Rightarrow$
$\angle PCA = \alpha \Rightarrow \triangle APC$ – р/б $\Rightarrow PC = AP = 16$.

5. Р/м $\triangle APC$: По Th косинусов: $PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2\cos\alpha \cdot AP \cdot AC$

$\cos\alpha = \dfrac{22}{32} = \dfrac{11}{16} \to \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$ (из ОТТ, $\alpha < 90°$ (усл))

$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{135}}{16} = \dfrac{3\sqrt{15}}{16}$.

6. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$

$AB = AP + PB$ ($P \in [AB]$)

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \dfrac{3\sqrt{15}}{16}$.

$S_{\triangle ABC} = \dfrac{99\sqrt{15}}{2}$ Ответ: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{99\sqrt{15}}{2}$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

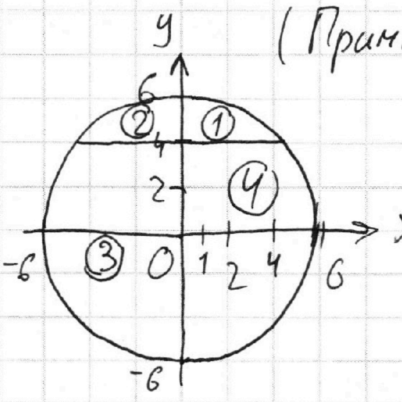
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0 & (1)\\ x^2+y^2\le 36. & (2)\end{cases}$$

(2) Мн-во задает круг с центром в $O(0;0)$ и $R=6$.



(Пример $\alpha=2\pi n, n\in\mathbb{Z}$) $\sin\alpha=0;\ \cos\alpha=1.$

Подходят ② и ④ зоны

(1) Поскольку α − пар/р, то $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ − const для каждого α.

Т.о. α делит круг на 4 части так, что для решения (1) подходят противолежащие зоны. При этом

$M(\alpha)=\pi\cdot R+2\left(\sqrt{R^2-16\sin^2\alpha}+\sqrt{R^2-16\cos^2\alpha}\right)$ − периметр,

где $\pi\cdot R=\text{const}$, из-за против. частей, а $\sqrt{R^2-\sin^2\alpha}$ и $\sqrt{R^2-\cos^2\alpha}$ − длины отрезков, соед оси абсцисс и ординат с точками пересечения (2) и (1).

Замена $t=\sin^2\alpha$, $t\in[0;1]$, $\sin\alpha=\pm\sqrt{t}$

$\cos^2\alpha=1-t.$

$M(\alpha)=f(t)=\pi R+2\cdot\left(\sqrt{R^2-16t}+\sqrt{R^2-16+16t}\right)\to\max$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$f(t) = \pi R + 4(\sqrt{9-4t} + \sqrt{5+4t}) \to max$

$f'(t) = 4\left(\frac{-4}{2\sqrt{9-4t}} + \frac{4}{2\sqrt{5+4t}}\right)$

$f'(t) = 0 \iff 4\left(\frac{-2}{\sqrt{9-4t}} + \frac{2}{\sqrt{5+4t}}\right) = 0$

$\sqrt{9-4t} = \sqrt{5+4t}$ $(t \in [0;1] \to)^2)$

$9-4t = 5+4t \to t = \frac{1}{2}$. – точка макс.

$M_{max}(\alpha) = f_{max}(t) = f(t_m = \frac{1}{2}) = 6\pi + 4(\sqrt{9-2} + \sqrt{5+2})$

$M_{max}(\alpha) = 6\pi + 8\sqrt{7}$.

Обр замена: $\sin\alpha = \pm\sqrt{t}$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

Ответ: $M = 6\pi + 8\sqrt{7}$;

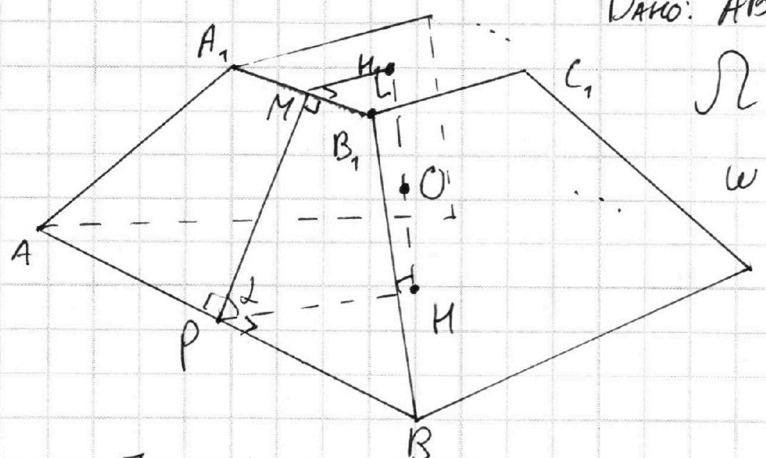
$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Дано: $ABC\ldots A_1B_1C_1\ldots$ – прав ус пир

$\Omega(O_1; R_\Omega)$ – шар, кас. всех реб.

$\omega(O; r_\omega)$ – шар, кас. всех гран.

Найти: $\alpha = ?$

α – угол между (ABC) и (ABB_1)

$\alpha = \widehat{(ABC);(ABB_1)}$.

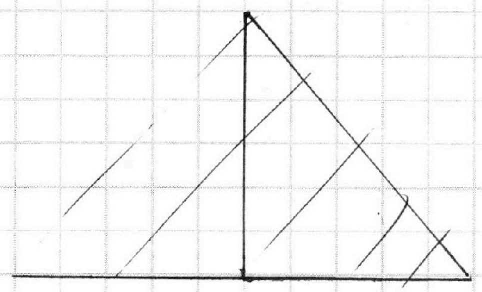
1.] H, H_1 – центры $ABC\ldots$ и $A_1B_1C_1\ldots$ соотв.

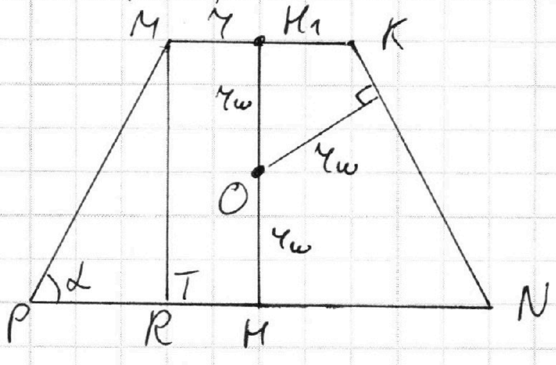
$\omega_R(H; R)$ – впис в $ABC\ldots$; $\omega_r(H_1; r)$ – впис в $A_1B_1C_1\ldots$

HH_1 – высота пир.

2. Т.к. $\omega(O; r_\omega)$ – впис, то $h = 2r_\omega$, O – сер. HH_1.

Р/м сеч $ABC\ldots A_1B_1C_1\ldots$ пл (PMH):





Т.к. $PMKN$ – опис около $\omega(O; r_\omega)$ и $PMKN$ – р/б трап,

то $2PM = MK + PN \Rightarrow PM = R + r$; $PT = R - r$

Из $\triangle PMT$: $\sin\alpha = \dfrac{2r_\omega}{R+r}$; $\cos\alpha = \dfrac{R-r}{R+r}$. $\Rightarrow \alpha = \arccos\dfrac{R-r}{R+r}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7	СТРАНИЦА
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

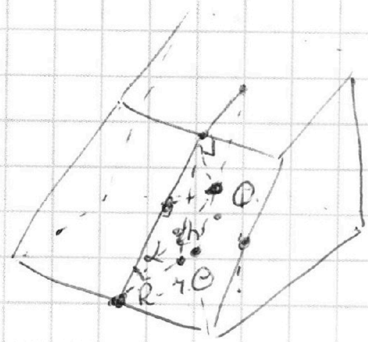
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

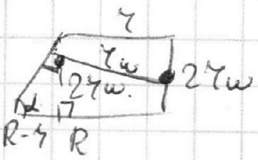
R_Ω; r_ω, R – нижняя грань впис

r – верхняя грань впис



$h = 2r_\omega$

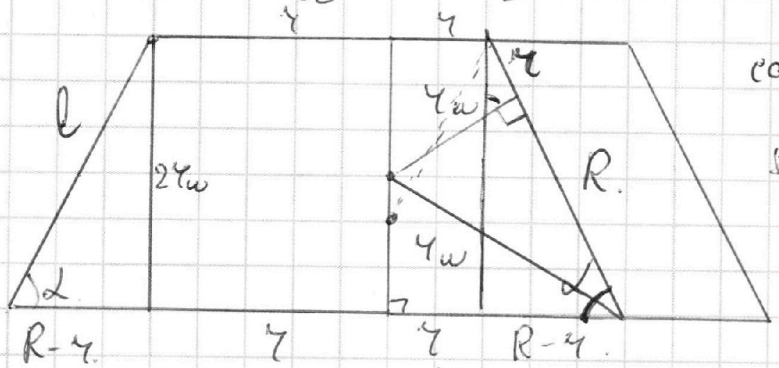
$R_\Omega^2 = x^2 + r^2 = R^2 + (h-x)^2$

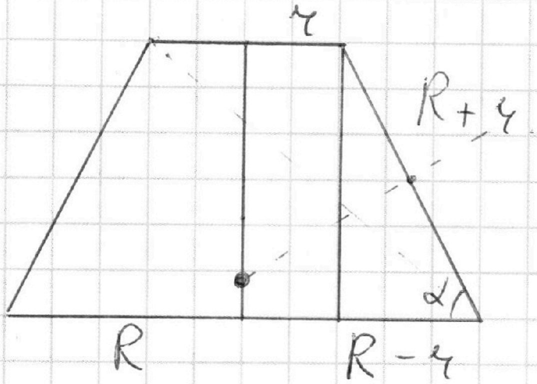


$h = 2r_\omega$ $\quad R_\Omega^2 = r_\omega^2 + r^2$

$\cos\alpha = \frac{R-r}{R+r}$

$\sin\alpha = \frac{2r_\omega}{R+r}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 0; \ \cos\alpha = 1. \Rightarrow (1): \ x\cdot(y-4) \le 0$

$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = 1, \ \cos\alpha = 0 \Rightarrow (1): (x+4)\cdot y \le 0.$

$\alpha = \pi \Rightarrow \sin\alpha = 0, \ \cos\alpha = -1 \Rightarrow (1). \ x\cdot(y+4) \le 0.$

$\alpha = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\alpha = -1; \ \cos\alpha = 0 \Rightarrow (1): \ (x-4)\cdot y \le 0.$

$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin\alpha, \cos\alpha \in (0; 1)$

$\alpha = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}. \Rightarrow (1): \ (x+2\sqrt{2})(y-2\sqrt{2}) \le 0$

$x = 2\sqrt{2}; \Rightarrow y = \sqrt{36-8} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$

$P = \pi 4 + 2\cdot(\ \sqrt{36-(4\sin\alpha)^2} + \sqrt{36-(4\cos\alpha)^2})$

$P \to max \Rightarrow \sqrt{36-16\sin^2\alpha} + \sqrt{36-16\cos^2\alpha} \to max.$

$t = \sin^2\alpha; \quad \cos^2\alpha = 1-t, \quad t\in[0; 1].$

$\sqrt{36-16t} + \sqrt{36-16+16t} \to max.$

$\sqrt{9-4t} + \sqrt{5+4t} \to max.$

$3+\sqrt{5} \vee 2\sqrt{7}.$

$\frac{-4}{2\sqrt{9-4t}} + \frac{4}{2\sqrt{5+4t}} = 0.$

$9+6\sqrt{5}+5 \vee 28$

$\sqrt{5} \vee \frac{14}{6}.$

$\frac{2}{\sqrt{9-4t}} = \frac{2}{\sqrt{5+4t}} \Rightarrow \sqrt{9-4t} = \sqrt{5+4t}$

$5 \vee \frac{196}{36}$

$9-4t = 5+4t.$

$8t = 4 \Rightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{}$

$P = 6\pi + 2\cdot(\sqrt{36-8} + \sqrt{36-8})$

$P = 6\pi + 4\sqrt{28} = 6\pi + 8\sqrt{7}. \quad \alpha \in \{\frac{\pi}{4}+\pi n\} \ n\in Z.$

$P = 6\pi + 4(\sqrt{9} + \sqrt{5}) = 6\pi +$

$\sqrt{5} \approx 2,3 \to 5,3$

$\sqrt{7} \approx$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\arccos t \in [0; \pi]$; $\arcsin p \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\arccos t - \arcsin p \geq -\frac{\pi}{2}$ $\forall (p, t) \in [-1; 1]$

Тогда $\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \neq -\frac{\pi}{2} \\ \left(\frac{x}{7}, \frac{y}{4}\right) \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-7; 7] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$

$$\begin{cases} \arccos \frac{x}{7} \neq 0 \\ \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in [-7; 7) \\ y \in [-4; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3n - k + 1}{2} \geq -7 \\ \frac{3n - k + 1}{2} < 7 \\ \frac{n + k + 1}{2} \geq -4 \\ \frac{n + k + 1}{2} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3n - k \geq -15 \\ 3n - k < 13 \\ n + k \geq -9 \\ n + k < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4n \geq -24 \quad n \geq -6 \\ 4n < 20 \quad n < 5 \\ \cancel{k \geq -9 - n} \quad 13 + k > 3n \geq -18 \\ k - 15 \leq 3n < 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n \geq -6 \\ n < 5 \\ k > -31 \\ k \leq 0 \end{cases} \Rightarrow n \in [-6; 5),\ k \in (-31; 0]$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

4) Начальный шанс: $\frac{4}{x}\cdot\frac{3}{b}=\frac{12}{x^2}$.

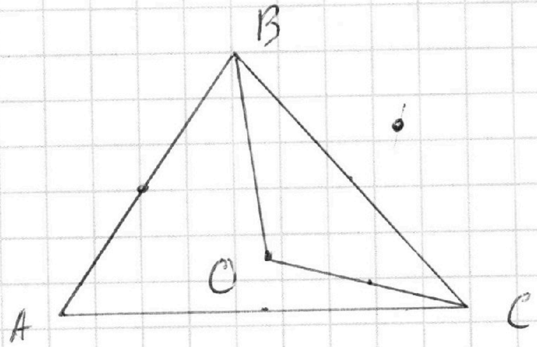
$\frac{(4+y)}{x}\cdot\frac{(3+y)}{x}=\frac{(4+y)(3+y)}{x^2}$

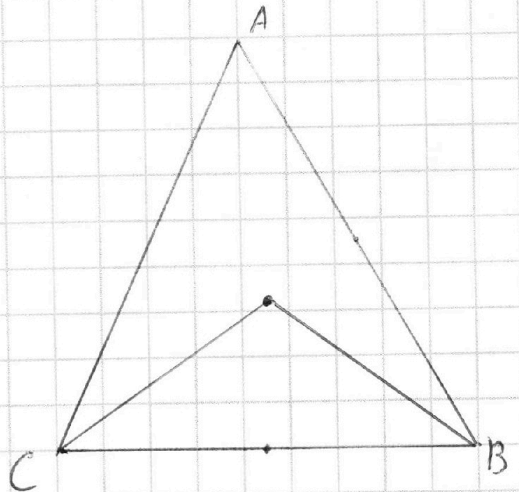
Стало:
$(4+y)(3+y)=11\cdot12$.

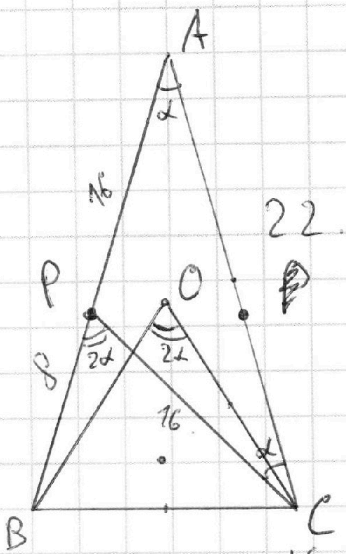
$y^2+7y+12=11\cdot12$ $\quad y^2+7y-120=0$.

$\left[\begin{array}{l} y=-15 \\ y=8 \end{array}\right. \to y=8 \to$ стало $4+8=12$.

5)







22.

$16^2=16^2+22^2-2\cdot16\cdot22\cdot\cos\alpha$.

$\cos\alpha=\frac{22}{32}=\frac{11}{16}$

$\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{121}{256}}=\frac{\sqrt{135}}{16}=\frac{3\sqrt{15}}{16}$.

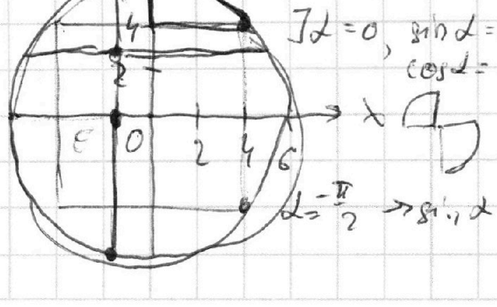
$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\cancel{24}^{3}\cdot\cancel{22}^{11}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{\cancel{16}}=$ 21

$S=\frac{99\sqrt{15}}{2}$.

6) $\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le0.\\ x^2+y^2\le36.\end{cases}$

$P=2\pi r$; $\quad P=4\cdot24=84$.

$P\approx64$.



$x\in[4,6]$, то $()\ge0$

$\exists\alpha=0$, $\sin\alpha=0$
$\cos\alpha=1$.

$\alpha=\frac{\pi}{2}\to\sin\alpha=$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

1) $A = x\cdot x\cdot x\cdot x = x\cdot 1111,\ x\in[1,9],\ x\in\mathbb{Z}$

$A = 11\cdot x\cdot 101$

$P = A\cdot B\cdot C$, $P = N^2$, $N^2 = 11\cdot 101\cdot x\cdot B\cdot C$

~~$C = 11$~~ Если $C = 11$, то $B = 101\cdot y$, $y = 7$ (т.к. B содержит 7)

Тогда при $C = 11$: $N^2 = 11^2\cdot 101^2\cdot 7\cdot x \Rightarrow x = 7$.

Пусть $C \neq 11$, тогда $C \not\vdots\, 11$ ($\{1\} \in \bar{C}$)

C не может быть кратно 101 (т.к. $C < 100$)

Т.о. $B = 101\cdot 11\cdot y$, $y\in[1,9] > 1000$.

$\times\begin{array}{r}101\\11\\\hline 101\\101\\\hline 1111\end{array}$

2) $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$x + y + 3 = \frac{xy}{x-4} + \frac{xy}{y+4} + \frac{3xy}{xy - 4y + 4x - 16}$

$\cancel{x^2y} - \cancel{4xy} + 4x^2 - 16x + \cancel{xy^2} - 4y^2 + 4\cancel{xy} - 16y + \cancel{3xy} - 12y + 12x - 48 =$

$= \cancel{xy^2} + \cancel{4xy} + \cancel{x^2y} - 4\cancel{xy} + \cancel{3xy}$

$4x^2 - 4y^2 - 16x - 16y - 12y + 12x - 48 = 0$.

$x^2 - y^2 - \cancel{x} - 7y - 12 = 0$.

$x^2 - x - (y^2 + 7y + 12) = 0$.

$D = 1 + 4y^2 + 28y + 48 = 4y^2 + 28y + 49 = (2y+7)^2$

$x = \frac{1 - (2y+7)}{2} = -y - 3$ не удовл. усл зад.

$x = \frac{1 + 2y + 7}{2} = y + 4$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$M = x^3 - y^3 - 12xy$

$+4\left[\begin{array}{l} M = y^3 + 12y^2 + 48y + 64 - y^3 - 12y^2 - 48y = 64. \\ x = y+4. \end{array}\right.$ -3

$y^3 + 3\cdot y^2 4 + 3\cdot y\cdot 4^2 + 4^3 = y^3 + 12y^2 + 48y + 64.$

$12xy = 12y(y+4) = 12y^2 + 48y.$

3) $(\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cos\pi y.$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$

$$- \frac{\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{array}}{2\cos\alpha\sin\beta.}$$

$\begin{cases} \alpha + \beta = \pi y \\ \alpha - \beta = \pi x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2}(x+y) \\ \beta = \frac{\pi}{2}(y-x) \end{array}$

$2\sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(y+x)\right)\cdot\sin\pi y = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}(y+x)\right)\cdot\cos\pi y$

$\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) = 0. \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right)\cdot\sin\pi y - \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right)\cdot\cos\pi y = 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x) + \pi y\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y = 1+2n \\ \frac{\pi}{2}(3y-x) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x+y = 2n+1. \\ \quad n,k \in \mathbb{Z}. \\ 3y - x = 2k+1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 4y = 2 + 2n + 2k \\ x = 3y - 2k - 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{n+k+1}{2} \\ x = \frac{3n-k+1}{2}. \end{cases} \; n,k \in \mathbb{Z}.$