

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $A = \overline{aaaa}$, тогда: $A = \overline{aa} \cdot 100 + \overline{aa} = \overline{aa} \cdot 101 = 101 \cdot 11 \cdot a \Rightarrow (\cos a \leq 9)$ (н.п.)

$\Rightarrow A : 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101 \Rightarrow$ т.к. это квадрат, а 101 - простое число, то или B или C делится на 101. т.к. $C < 100 \Rightarrow C : 101 \Rightarrow B : 101$

B - трехзначное $\Rightarrow B = k \cdot 101$, где $k \in \mathbb{N}$, при этом $k < 10$ т.к. $10 \cdot 101 > 1000 \Rightarrow B = 101$ (носередине 0) $\Rightarrow B = 101$ (т.к. должна быть цифра 1, а носередине 0).

При этом $A \cdot B \cdot C = 101 \cdot 11a \cdot 101 \cdot C \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11a$, но $B \nmid 11a$ (простое)

$A : 11a$ только один раз $\Rightarrow C : 11a$ (т.к. $A \cdot B \cdot C$ квадрат) \Rightarrow

$\Rightarrow C = \overline{aa} \Rightarrow C = 55$ (т.к. есть цифра 5) $\Rightarrow (A; B; C) = (5555; 101; 55)$

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Чтобы упростить: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$

2

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\begin{cases} x+y+1 = 0 \text{ нет реш. тк. } x>0 \text{ и } y>0 \\ xy = (x-3)(y+3) \end{cases} \Rightarrow xy = (x-3)(y+3) = xy + 3x - 3y - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-y = 3$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = (x-y) \cdot ((x-y)^2 + 3xy) = (x-y)^3 + (x-y)3xy$$

$$\text{Из } x-y = 3 \text{ получаем: } x^3 - y^3 = 27 + 9xy \Rightarrow x^3 - y^3 - 9xy = 27$$

Ответ: 27

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

[] 3

~~$\cos 2\pi x \cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0$~~

$$2 \cos \left(\frac{3\pi x - \pi y}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi x + \pi y}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}; \quad \begin{cases} 3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k \\ \pi x + \pi y = \pi + 2\pi k \end{cases}; \quad \begin{cases} 3x - y = 2k + 1 \\ x + y = 2k + 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 2k - 1 \\ y = 2k + 1 - x \end{cases} \Rightarrow (x; 3x - 2k - 1); (x; 2k + 1 - x), \text{ где } x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z} - \text{решение}$$

f) $\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi$

Заметим, что $\arccos x \in [0; \pi] \Rightarrow$ паре (x, y) не верно только при $x = y = 1$

$$\frac{x}{4} = \frac{y}{9} = 1$$

$$\text{Также: } -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$-1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \Rightarrow -9 \leq y \leq 9$$

На рисунке видны числа $3x - (2k+1)$ и $2k+1-x$ симметричны \Rightarrow для них рассматриваются только решения вида $(x; 2k+1-x)$

Заметим, что x и y — это различные значения, при этом $x \in [-4; 4]$, а $y \in [-9; 9]$.

Для каждого x , ~~и~~ $y \in [-9; 9]$ отличных от x

- для x решения \Rightarrow для значений x (их всего 5) есть 10 пар (x, y) .
 для несуществующих x ($x=4$) — возможных y есть 9 пар (x, y) . При этом
 пара $(4, 9)$ не возможна \Rightarrow возможных пар (x, y) всего:
 $10 \cdot 5 + 9 \cdot 4 - 1 = 85$

Ответ: $(x; 2k+1-x); (x; 3x - 2k - 1), x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$; 85 пар



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Пусть учеников n . Тогда вероятность такого события есть:

$$P(A) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{(n-1)}$$

(№ 4)

Пусть событие X бывает, т.е. разыграно было X кн., тогда вероятность одной малой частью попасть на конверт:

$$P(B) = \frac{(x+4)}{n} \cdot \frac{(x+3)}{(n-1)}$$

По условию:

$$P(B) = \frac{7}{2} P(A) \Rightarrow \frac{(x+4)(x+3)}{n(n-1)} = \frac{7 \cdot 12}{2n(n-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+4)(x+3) = 42$$

$$x^2 + 7x + 12 = 42$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0$$

Но > оп. > Видят:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = -30 \\ x_1 + x_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -10 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 3 \text{ (т.к. разыграли только)} \Rightarrow 6 \text{ кн.}$$

Сумма разыгранных: $3+4=7$ кн.

Ответ: 7

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

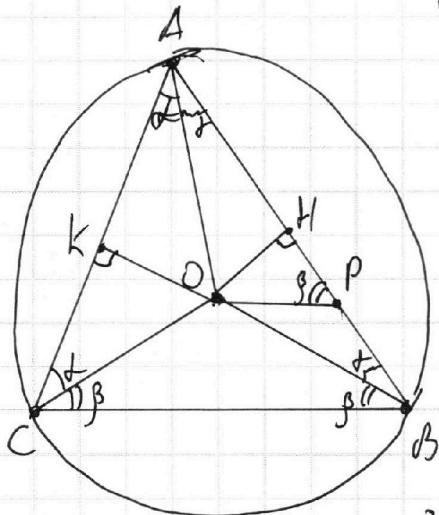


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~5



- 1) $\angle CAO = \angle ACO = \alpha$ (т.к. $\triangle AOC$ - р/т)
- $\angle BAO = \angle ABO = \gamma$ (т.к. $\triangle AOB$ - р/т)
- $\angle CBO = \angle BCO = \beta$ (т.к. $\triangle COB$ - р/т)

2) Опустим перпендикульр OH на сторону

AB ; т.к. $\triangle AOB$ - р/т, то OH - бисектриса медианы $\Rightarrow BH = \frac{1}{2} AB$

Аналогично опустим перп. OK на AC , $CK = \frac{1}{2} AC$

3) По обл-ли линс. теор-ки: $\angle OPK = \angle OCB = \beta$

4) Рассмотрим ω с центром P радиусом R , тогда:

$$\cos \alpha = \frac{CK}{R} = \frac{AC}{2R} = \frac{2}{R}; \cos \gamma = \frac{BH}{R} = \frac{13}{5R}$$

5) Реш. косинусом $\angle OPB$:

$$OP^2 = R^2 + 4 \rightarrow 4R \cdot \cos \gamma = R^2 + 4 \rightarrow 4R \cdot \frac{13}{5R} = R^2 - \frac{32}{5} \rightarrow OP = \sqrt{R^2 - \frac{32}{5}}$$

$$= R^2 - \frac{32}{5} \Rightarrow OP = \sqrt{R^2 - \frac{32}{5}}$$

$$\text{По т. Пифагора для } \triangle OPB: OH^2 = OP^2 - PH^2 = R^2 - \frac{32}{5} - \frac{9}{25} =$$

$$= R^2 - \frac{169}{25} \Rightarrow OH = \sqrt{R^2 - \frac{169}{25}}$$

$$6) \sin(\alpha + \gamma) = \sin \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha = \frac{2}{R} \sqrt{1 - \frac{169}{25R^2}} + \frac{13}{5R} \sqrt{1 - \frac{4}{R^2}} =$$

$$= \frac{2 \cdot \sqrt{25R^2 - 169}}{5R^2} + \frac{13 \sqrt{R^2 - 4}}{5R^2} = \frac{\sqrt{100R^2 - 26^2} + \sqrt{169R^2 - 26^2}}{5R^2}$$

$$7) S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin(\alpha + \gamma) = \frac{52}{5} \cdot \frac{\sqrt{100R^2 - 26^2} + \sqrt{169R^2 - 26^2}}{5R^2}$$

$$8) \text{Реш. синусами: } BC = 2R \cdot \sin(\alpha + \gamma) = \frac{2(\sqrt{100R^2 - 26^2} + \sqrt{169R^2 - 26^2})}{5R}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2\cos \alpha) (y - 2\sin \alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

№ 6)

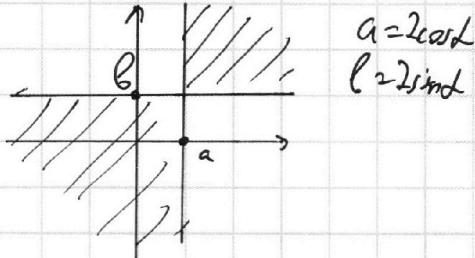
— круг с центром $O(0;0)$ и радиусом $R=3$

$$* (x - 2\cos \alpha) (y - 2\sin \alpha) \geq 0$$

↑

$$\begin{cases} x - 2\cos \alpha \geq 0 & \text{область правее прямой } x = 2\cos \alpha \\ y - 2\sin \alpha \geq 0 & \text{область выше прямой } y = 2\sin \alpha \\ x - 2\cos \alpha \leq 0 & \text{область левее прямой } x = 2\cos \alpha \\ y - 2\sin \alpha \leq 0 & \text{область ниже прямой } y = 2\sin \alpha \end{cases}$$

→ прямик этого
неп-ка содержит та-
с точностью до
суммы



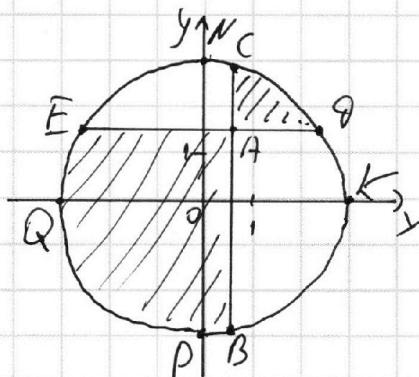
Заметим, что $-2 \leq 2\cos \alpha \leq 2$ и $-2 \leq 2\sin \alpha \leq 2 \Rightarrow$ точка пересечение прямых $x = 2\cos \alpha$ и $y = 2\sin \alpha$ лежит внутри круга с центром $O(0;0)$ и стороной 4, т.е. круг радиуса $\sqrt{9}$ (т.к. $2^2 + 2^2 = 8 < 9$)

Тогда $Q(\alpha)$ будет так выглядеть:

Заметим, что из координатной оси Ox симметрично относительно Ox лежат PB (нижняя) и NC (верхняя) по выше

аналогично: $(QK) = (EQ)$

Тогда $(CQ) + (EB) = (QP) + (NK) = \frac{L}{2}$, где L — длина окружности



$$(B - \text{отрезок прямой } x = 2\cos \alpha \rightarrow ((2\cos \alpha; \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}) \\ B(2\cos \alpha; -\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha})) \quad | \sim) \\ \Rightarrow CB = \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} - (-\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}) = 2\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}$$

$$\text{Аналогично: } DE = 2\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}$$

$$\text{Тогда периметр } M = (CQ) + (EB) + CB + DE = 3\pi + 2\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} + 2\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Рассмотрим гр. 46 $M(L) = 3\pi + 2\sqrt{9-4\cos^2 L} + 2\sqrt{9-4\sin^2 L}$

$$M'(L) = \frac{(9-4\cos^2 L)'}{2\sqrt{9-4\cos^2 L}} + \frac{2(9-4\sin^2 L)'}{2\sqrt{9-4\sin^2 L}} = \frac{-8\cos L \cdot (-\sin L)}{\sqrt{9-4\cos^2 L}} + \frac{-8\sin L \cdot \cos L}{\sqrt{9-4\sin^2 L}} =$$

$$\geq 8\sin L \cos L \left(\frac{1}{\sqrt{9-4\cos^2 L}} - \frac{1}{\sqrt{9-4\sin^2 L}} \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow 4\sin 2L \left(\frac{1}{\sqrt{9-4\cos^2 L}} - \frac{1}{\sqrt{9-4\sin^2 L}} \right) \geq 0$$

Получим максимум этой функции; (Вспомни, что $9-4\cos^2 L > 0$ и $9-4\sin^2 L > 0$)
 $\sin 2L = 0$

$$\sqrt{9-4\cos^2 L} = \sqrt{9-4\sin^2 L}$$

$$\begin{cases} L = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \cos^2 L = \sin^2 L \end{cases}; \quad \begin{cases} L = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} \\ \cos 2L = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} L = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} \\ 2L = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}; \quad \begin{cases} L = \frac{\pi}{2} + \pi k \cdot \frac{1}{2} \\ L = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

Т.к. при $\sin L = \cos L$ в квадранте, то отсюда имеем $2L = \pi/2 + \pi k$

\Rightarrow получаем несколько решений для L :

$$M(0) = 3\pi + 2\sqrt{9-4 \cdot 1} + 2\sqrt{9-4 \cdot 0} = 3\pi + 2\sqrt{5} + 6$$

$$M\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\pi + 2\sqrt{9-4 \cdot \frac{1}{2}} + 2\sqrt{9-4 \cdot \frac{1}{2}} = 3\pi + 4\sqrt{2}$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\pi + 2\sqrt{9-4 \cdot 0} + 2\sqrt{9-4 \cdot 1} = 3\pi + 2\sqrt{5} + 6$$

$$3\pi + 2\sqrt{5} + 6 \vee 3\pi + 4\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{5} + 6 \vee 4\sqrt{2}$$

~~$2\sqrt{5} + 6$~~

$$56 + 24\sqrt{5} \vee 912$$

$$2455 \vee 56$$

$$\sqrt{2830} < \sqrt{3136} \Rightarrow M_{\max} = 3\pi + 4\sqrt{2}, \text{ достигается при } L = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } M_{\max} = 3\pi + 4\sqrt{2}; \text{ при } L = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

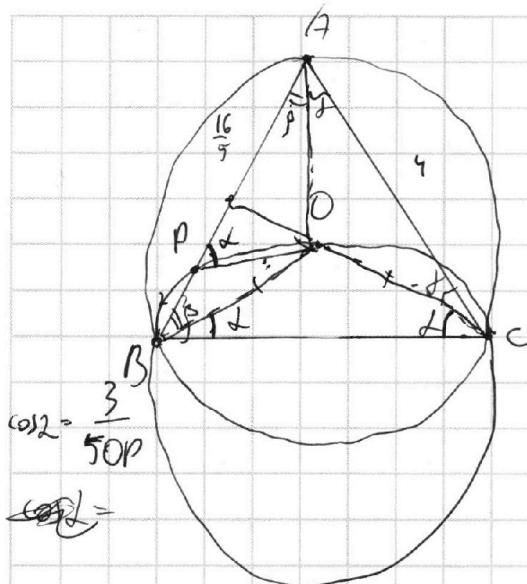
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} AP &= \frac{16}{5}; BP = 2; AC = 5 \\ \angle AOB &= 360^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - (180^\circ - 2\beta) = \\ &= 2\alpha + 2\beta = 180^\circ - 2\gamma \\ \angle AOB &= 180^\circ - (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) = 180^\circ - 2\gamma \end{aligned}$$

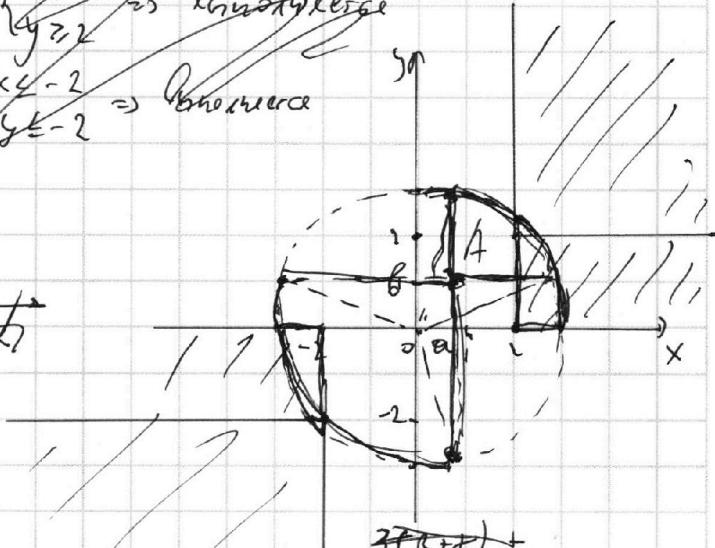
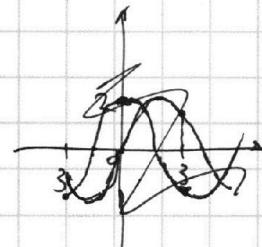
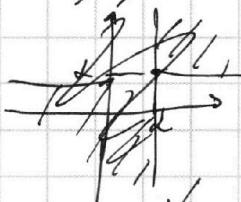
$$\begin{aligned} \angle APB &= (180^\circ - \alpha) - \angle \beta \cdot (180^\circ - \alpha + \beta) = \\ &= \alpha + \beta + 180^\circ - 2\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{13}{5R} \cdot \sqrt{1 - \frac{4}{R^2}} &= \frac{13}{5R} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - 4}}{R} = \frac{13 \cdot \sqrt{R^2 - 4}}{5R^2} = \sqrt{16SR^2 - 169R^2} \\ \frac{2}{R} \cdot \sqrt{1 - \frac{169}{25R^2}} &= \frac{2 \cdot \sqrt{25R^2 - 169}}{5R^2} = \frac{\sqrt{25R^2 - 169}}{5R^2} \end{aligned}$$

$\text{① } (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0;$

$x \geq 2\cos\alpha \Rightarrow$ линия $x = 2\cos\alpha$
 $y \geq 2\sin\alpha \Rightarrow$ линия $y = 2\sin\alpha$
 $(x-2)y \geq 0 \Rightarrow$ $x \geq 2 \Rightarrow$ прямая $x = 2$
 $\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 1, \sin\alpha = 0 \Rightarrow L \text{ на } x = 2$

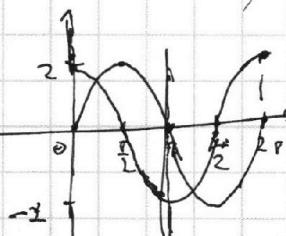
$$(x-2)(y-\beta) \geq 0$$



$$\begin{aligned} 3(\beta + \gamma) &+ \\ 2\cos\alpha &= 9, 2\sin\alpha = 8 \\ A(a; b) & \quad a^2 + b^2 = 9 \Rightarrow b = \sqrt{9 - a^2} = \end{aligned}$$

$$b = \sqrt{9 - a^2} + \sqrt{9 - a^2} = 2\sqrt{9 - a^2}$$

$$b = 2\sqrt{9 - a^2}$$



$$p = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 - a^2} + \sqrt{9 - a^2} = 2\sqrt{9 - a^2}$$

$$p = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 - a^2} + \sqrt{9 - a^2} = 2\sqrt{9 - a^2}$$

$$2\pi R \Rightarrow \pi R = 5\pi$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A:11 \text{ т.к. } A = \overline{aabb} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 101 = 11 \cdot a \cdot 101$$

$$A:101, C:101 \Rightarrow B:101$$

$$\text{I) } a=1 \Rightarrow A=11 \cdot 101$$

$$\begin{cases} C = \overline{b5} \\ C = \overline{5b} \end{cases} \Rightarrow C:5$$

$$B:101 \Rightarrow B = \overline{cfc} \rightarrow B = 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C = \underbrace{101 \cdot 11 \cdot a \cdot 101}_{\cdot C} \Rightarrow C = 11a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 55 \Rightarrow A = 5555$$

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y-3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad x^3 - y^3 - 9xy - ? \quad \text{не могу}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow \begin{cases} x+y+1 > 0 \text{ т.к. } x, y > 0 \\ xy = (x-3)(y+3) \end{cases}$$

$$3y - 3y = 9$$

$$\cancel{(x-y)^3 = (x-y)(x^2 - xy + y^2)} \quad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = x-y = 5$$

$$= 3((x-y)^2 + 3xy) = 3(x-y)^2 + 5xy \Rightarrow x^3 - y^3 - 9xy = 3(x-y)^2 = 27$$

$$\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$-\cos 2\pi x = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0 = \cos\left(\frac{3\pi y - \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$y = 2k + 1 - x$$

$$y = 3x - 2k - 1$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi y - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{cases} \quad \begin{cases} 3\pi x - \pi y = \pi + 2\pi k \\ \pi x + \pi y = \pi + 2\pi l \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3x - y = 1 + 2k \\ x + y = 1 + 2l \end{cases}$$

$n_{3\pi x}$ и $n_{\pi y}$, если $\sqrt[4]{n}$ четно то

$$\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{(n-4)} = \frac{12}{n(n-4)}$$

$n_{\pi x}$ и $x+4$

Одес-?

$$\frac{(x+4)(x+3)}{n(n-4)} = \frac{42}{n(n-4)}$$

$$x^2 + 7x + 12 = 42; \quad x^2 + 2x - 30 = 0$$

$$0 = 49 + 12 = 61 = 11^2 \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -30 \end{cases}$$

$$x_1 = 3 \quad -10$$

$$x_2 = -$$

$$x_1 =$$

$$x_2 =$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P(\alpha) = 2\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha} + 2\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} + 3\pi$$

$$P'(\alpha) = \frac{(9 - 4\cos^2 \alpha)'}{2\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}} + \frac{(9 - 4\sin^2 \alpha)'}{\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}} = \frac{-8\cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}} + \frac{-8\sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}}$$

$$= 8\cos \alpha \sin \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha}} \right)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} = \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}$$

$$\sqrt{9 - 4\sin^2 \alpha} = \sqrt{9 - 4\cos^2 \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$P = 6 + 2\sqrt{5} + 3\pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$P = 4\sqrt{2} + 3\pi$$

$$6 + \sqrt{20} \vee \sqrt{112}$$

$$56 + 12\sqrt{20} \vee 112$$

$$12\sqrt{20} \vee 56$$

$$\sqrt{2880} \vee \boxed{\sqrt{3136}}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 2880 \\ \hline 56 \\ 456 \\ \hline 336 \\ 280 \\ \hline 56 \\ 336 \\ \hline 280 \\ \hline 3136 \end{array}$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$(x; 2k+1-x); \quad \cancel{(x; 3x-2k-1)}$$

$$-4 \leq x \leq 4, \quad \cancel{y \in \{-9, -2, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 8, 9\}}$$

$$-9 \leq y \leq 9; \quad \text{если четное } x: y \text{ есть } 10 \text{ парное} \Rightarrow 5 \cdot 10 = 50$$

$$\text{если нечетное } x: y \text{ есть } 9 \text{ нечетное} \Rightarrow 5 \cdot 9 = 36 \text{ пар.}$$

85

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

