

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N1

A - четырехзначное число из одинаковых цифр - это $1111 \cdot k$, где $k \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$.

$1111 = 11 \cdot 101$. 101 - простое число. A · B · C ~~= 0~~ - квадрат, значит в этом произведении присутствует еще один множитель 101. $C / 101$ тк $C < 100 \Rightarrow C : 101$.

$B : 101$ и в записи B есть цифра 1. Значит $B = 101$. Если нет, и $B = n \cdot 101$, где $n \in \{2, 3, 4, \dots, 9\}$, то $B = \cancel{n} \cdot 101$ записывается как $n, 0, n$, а $n \neq 1$, и B не содержит цифру 1.

$A : 11, B : 11 \Rightarrow C : 11$ и C содержит цифру 5. ~~также~~ и $C < 100$.

Значит, $C = 55$, других двухзначных чисел с такими свойствами нет.

~~также~~ $C : 5 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 5$, но 5 должна входить в четной степени в $A \cdot B \cdot C \Rightarrow A : 5$. $a = 5555$

Итого, единственная тройка $(5555; 101; 55)$

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}, \quad x, y > 0 \text{ по условию}$$

$$K(x, y) = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$K(x-3, y+3) = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \quad K(x, y) = K(x-3, y+3)$$

$$\frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{xy} \Rightarrow (x+y+1)xy = (x+y+1)(x-3)(y+3), \quad x \neq 3$$

$$x \neq 3 \quad x, y > 0 \Rightarrow x+y+1 > 1, \text{ значит } x+y+1 \neq 0, \text{ на это выражение сократим.}$$

$$xy = (x-3)(y+3)$$

$$\cancel{xy} = \cancel{xy} - 3y + 3x - 9 \quad -y + x - 3 = 0$$

$$x = y + 3$$

Подставим $x = y + 3$ в M :

$$M = (y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y = 27$$

Ответ: $M = 27$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\
 & \sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x \\
 & \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x = 0 \\
 & \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos 2\pi x \\
 & \cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos(\pi x - \pi y) \\
 & \cos 2\pi x + \cos(\pi x - \pi y) = 0 \\
 & \cos 2\pi x = -\cos(\pi x - \pi y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi - \pi x + \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = \pi + \pi x - \pi y + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = y + 1 + 2n \\ x = -y + 1 + 2k \end{cases} \text{ - подходят все такие пары чисел.}$$

$$b) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi.$$

$$\text{ODЗ: } \begin{cases} x \in [-4; 4] \\ y \in [-9; 9] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-4; 4] \\ y \in [-9; 9] \end{cases}$$

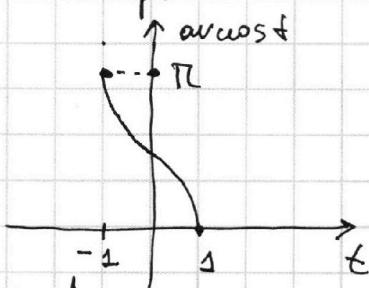
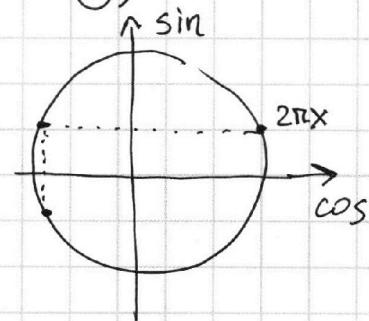
$$\arccos t \leq \pi, \text{ причем } \arccos t = \pi \Rightarrow t = -1$$

Значит, $x \neq -4$ и $y \neq -9$. С учетом ODЗ:

$$\begin{aligned} x &\in (-4; 4] \\ y &\in (-9; 9] \end{aligned}$$

Построим график $y(x) = 3x - 1 + 2n$ и
 $y(x) = -x + 1 + 2k$

и посчитаем кол-во целых точек на заданных промежутках





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

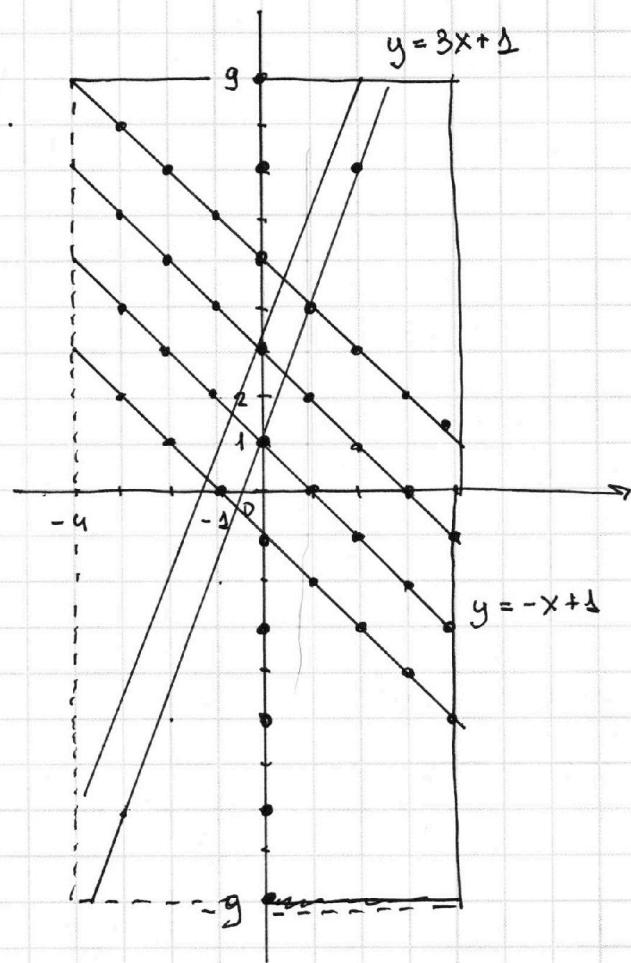
7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нетрудно заметить, что на
каштей $x \in \mathbb{Z}$, $y \in (-\infty; 9]$
приходят $y \in \mathbb{Z}$, $y \in [-3; 9]$.

Значит, что y имеет 72
значения.



Ответ: а) $\begin{cases} y = 3x - 1 + 2n \\ y = -x + 1 + 2k \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}$

б) 72



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть было N одиннадцатилетников всего, а выделили x девяток. Вероятность того, что Петя и Валя попадут на концерт с четырьмя:

$$P_1 = \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1}$$

Вероятность, что они попадут с x девятками при таком же N :

$$P_2 = \frac{x}{N} \cdot \frac{3(x-1)}{N-1}$$

Известно, что $3,5P_1 = P_2$

$$3,5 \cdot \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{N-1} = \frac{x(x-1)}{N(N-1)}. \text{ Из условия } x > 2 \Rightarrow \text{ на } N(N-1) \text{ можно}$$

сократить

$$42 = x(x-1)$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

$$(x-7)(x+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=-6 \end{cases}$$

Из условия $x > 2 \Rightarrow x = 7$, было выделено 7 девяток

Ответ: 7

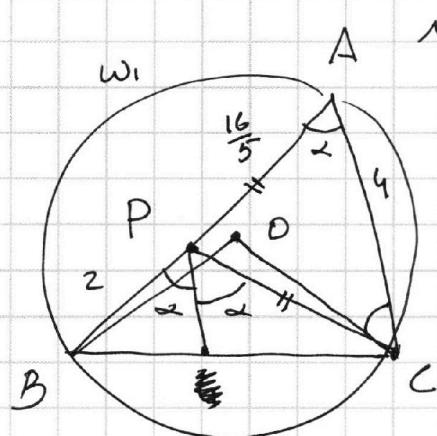


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



N 5

$$\angle BAC = 2\alpha$$

$\angle BOC = 2\alpha$, тк $\angle BOC$ - центральный,

$\angle BAC$ - вписаный, они

отвечают на дугу BC

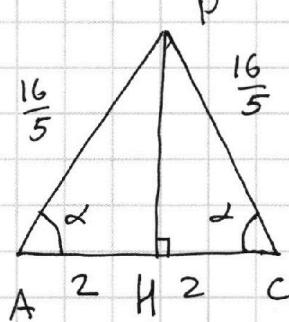
$\angle BPC = \angle BOC$ т.к. $P, O \in \omega_2$

$P, O, B, C \in \omega_2$.

Приведем биномиальную формулу $\angle BPC = PL$.

$$\angle BPL = \angle LPC = \alpha$$

$\angle BPC = 2\alpha$ - внешний для $\triangle PAC \Rightarrow \angle PCA = \angle BPC - \angle PAC = \alpha$. $\triangle APC$ - равнобедренный, $AP = PC = \frac{16}{5}$



PH - высота, она же медиана, HC = 2

$$\cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{16} = \frac{5}{8}$$

$\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ - треугольник остроугольный

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AC \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot 4 \left(2 + \frac{16}{5} \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{39}}{4} \cdot \frac{26}{5} = \frac{13\sqrt{39}}{5}$$

$$\text{Ответ: } \frac{13\sqrt{39}}{5}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases} \quad \text{№6}$$

$x^2 + y^2 \leq 9$ — окружность с центром $b(0;0)$ и радиусом 3.

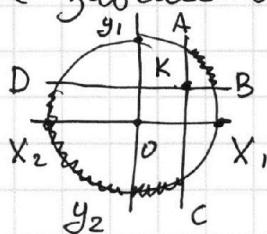
$$(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$

Т.к. $(2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha)^2 = 4$,
~~точка $(\sin\alpha; \cos\alpha)$~~ лежит
на окружности с центром
 $(0;0)$ и радиусом 2 — точка
 $(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$

$\Phi(\alpha)$ заштрихована на графике.

Видно, что это часть периметра M , которую составляет окружность,
не зависящая от α .



$\cup Y_1 A = \cup Y_2 C$ и $\cup D X_2 = \cup B X_1$. Тогда
это часть периметра квадрата равна T_L .

$$\cup AB + \cup DX_2 + \cup X_2 Y_2 + \cup Y_2 C = \cup AB + \cup Y_1 A + \cup BX_1 + \frac{R}{2} = T_L$$

Значит, нужно максимизировать $AC + BD$

$$AC = 2\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha}; BD = 2\sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} = 2\sqrt{5 + 4\cos^2\alpha}$$

$$AC + BD = 2(\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{5 + 4\cos^2\alpha})$$

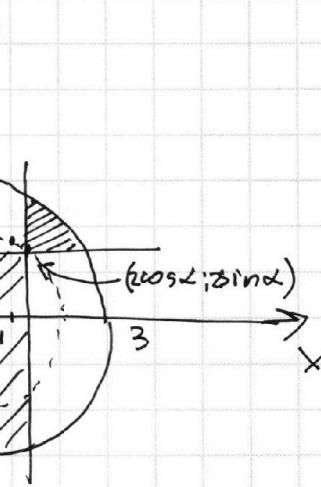
$$\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{5 + 4\cos^2\alpha} \leq \sqrt{\frac{9 - 4\cos^2\alpha + 5 + 4\cos^2\alpha}{2}} = \sqrt{7}. \text{ Равенство}$$

достигается при $9 - 4\cos^2\alpha = 5 + 4\cos^2\alpha$

Итого макс. $M: T_L + \sqrt{7}$

Ответ: макс $M = T_L + \sqrt{7}$

$$\text{при } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

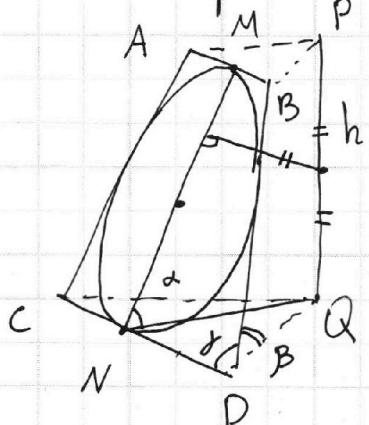


- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Еще в многограннике Эшар , касающемся рёбер многогранника, то все его грани - вписаные многогольники. \Rightarrow все боковые грани пирамиды - вписаные трапеции



$$PQ = h, MN = \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$\cos \alpha = \cos \gamma \cdot \cos \beta$$

$$BD = AC = \frac{h}{\sin \beta}$$

$$\sin \gamma = \frac{MN}{BD} = \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{h} \Rightarrow$$

$$\sin \beta = \sin \alpha \sin \gamma$$

$$QN = \frac{h}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$ND = \frac{MN}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2 \sin \alpha} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$MB = \frac{h}{2 \sin \alpha} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

$$ND - MB = \frac{h}{\sin \alpha} \operatorname{tg} \gamma$$

$$DQ = \sqrt{QN^2 + ND^2} = \frac{h}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha}}$$

$$\frac{DN}{DQ} = \frac{ND - MB}{ND} = \frac{h \operatorname{tg} \gamma}{\sin \alpha} \cdot \frac{2 \sin \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \quad B$$

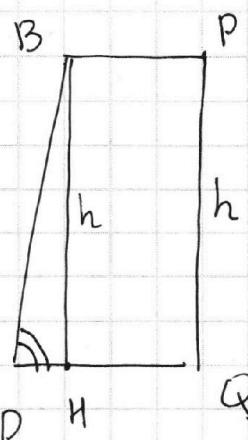
$$DN = \frac{h}{2} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha}} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} = h \operatorname{ctg} \beta$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha}}$$

$$\sin \beta = \sin \alpha \sin \gamma$$

$$\cos \beta = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma}$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \sin \gamma}$$



Это система из 3-х уравнений с 3 неизвестными.
Решив ее, получим $\cos \beta = \frac{1}{3}$.

$$\beta = \arccos \frac{1}{3}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~task~~

Diagram showing a triangle with an inscribed circle of radius r . The triangle has height h from vertex A to base BC . The angle at vertex A is α , at vertex B is β , and at vertex C is γ . The diagram illustrates various trigonometric ratios involving the radius r and the height h .

Equations derived:

$$\sin \beta = \frac{h}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin \gamma}{h} = \frac{\sin \gamma \sin \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin \beta = \sin \gamma \sin \alpha$$

$$\frac{h}{2 \sin \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$b = \frac{h}{2 \sin \alpha} \cdot \tan \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{h}{2 \sin \alpha} (\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}) = \frac{1}{\sin \beta}$$

$$\frac{1}{\sin \beta} (\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2}) = \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin \gamma}$$

$$\frac{h}{2 \sin \alpha} \left(\frac{h}{\sin \gamma \sin \alpha} + \frac{2h}{\sin \beta} \right) = \frac{h}{\sin \gamma \sin \alpha} \cdot \frac{h}{\sin \alpha}$$

$$\frac{2}{\sin \gamma \sin \alpha} = \frac{h}{\sin \gamma \sin \alpha} + \frac{2}{\sin \beta}$$

$$\frac{r \cdot \tan \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \alpha} = \frac{2r \sin \alpha}{\sin \beta}$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}$$

$$\frac{2}{\sin \gamma} = \frac{2}{\sin \beta}$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin \gamma}$$

$$4 \sin^2 \alpha = 4 \sin^2 \beta + \tan^2 \alpha \sin^2 \beta$$

$$\sin \beta = \sin \alpha \sin \gamma$$

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma$$

$$4 \sin^2 \alpha = 4 \sin^2 \beta + \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha$$

$$4 \sin^2 \alpha = 4 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma \sin^2 \alpha$$

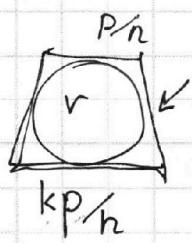
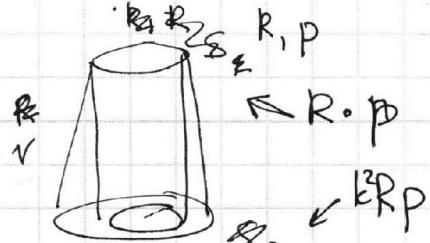
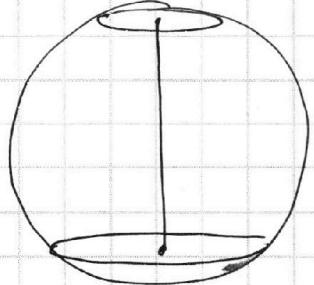


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

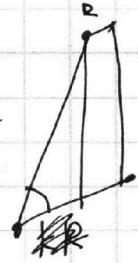


$$kR, \cancel{R^2}, \cancel{PS}$$

$$P \frac{k+1}{2} - g$$

ω

$k-1$



$$\cancel{R_1 R_2 S} R, p$$

$$\leftarrow R \cdot p$$

$$\leftarrow k^2 R P$$

$$S_b = r \cdot p \frac{k+1}{2}$$

$$(k^2 - 1) R \pi$$

$$\omega \cdot \cos \alpha = (k-1) R$$

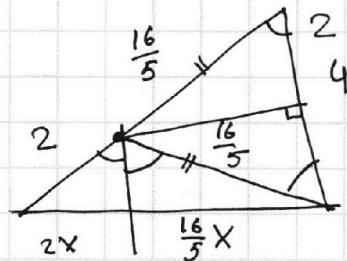
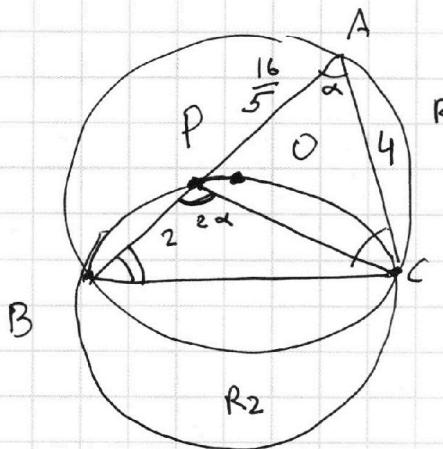
$$r \cdot p \frac{k+1}{2} \cdot \cos \alpha = (k-1)^2 R p$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Хорошо!

$$AP = \frac{16}{5}, \quad BP = 2, \quad AC = 4$$

$\sin \alpha = ?$

$$\frac{b}{\sin \alpha} = 2R_1, \quad \frac{b}{\sin 2\alpha} = 2R_2$$

$$2R_2 \sin 2\alpha = R_1 \sin \alpha$$

$$\frac{4}{\sin \beta} = 2R_1, \quad \frac{PC}{\sin \beta} = 2R_2 \quad \frac{25}{39}$$

$$\frac{PC}{4} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2 \cos \alpha} \quad \frac{25}{39}$$

$$PC = \frac{4}{2 \cos \alpha} = \frac{16}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$\cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{16} = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{25}{64}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \quad S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot 4 \left(2 + \frac{16}{5} \right) =$$

$$\frac{\sqrt{39}}{4} \cdot \frac{26}{5} = \frac{[Bg. 13]}{10}$$

$\sin \alpha$ — R -уголевник

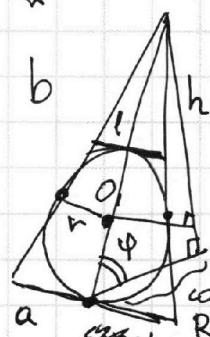
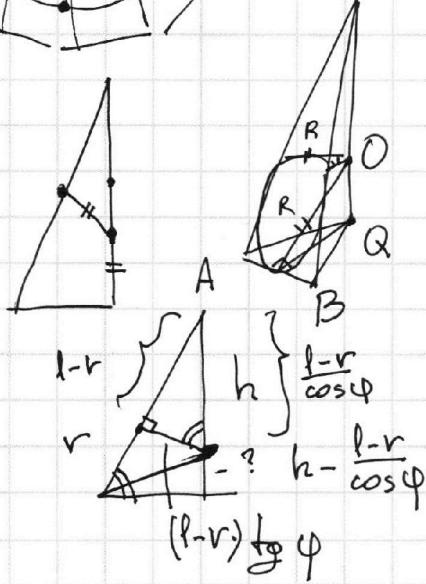
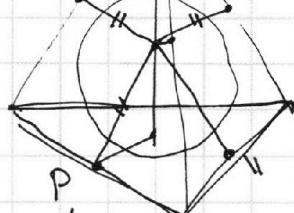
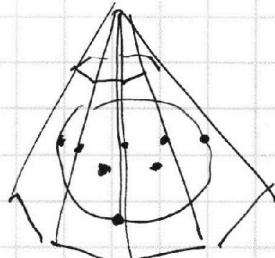


$$r(2b+2a) = 2la$$

$$r(b+a) = la$$

$$r = \frac{la}{b+a} \quad a = \sin \alpha$$

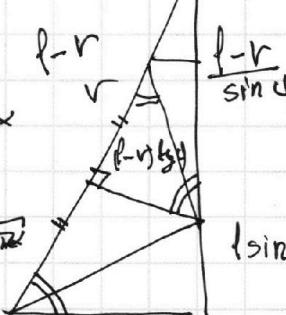
$$b = \sqrt{l^2 + \sin^2 \alpha}$$



$$l-r \cos \alpha$$

$$l-r \sin \alpha$$

$$\sqrt{l^2 + \sin^2 \alpha}$$



$$l \sin \alpha - \frac{l-r}{\sin \alpha}$$

$$\cos \alpha$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

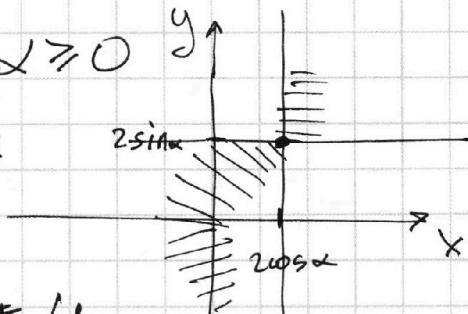
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0$$

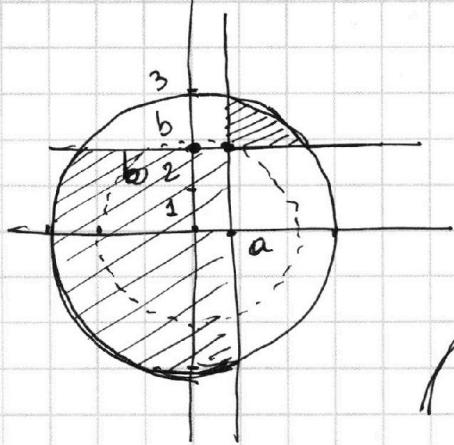
$$xy - 2\cos\alpha y - 2\cos\alpha x + 4\sin\alpha \cos\alpha \geq 0$$

$$x - 2\cos\alpha \geq 0$$

$$y - 2\sin\alpha \geq 0$$



$$a^2 + b^2 = 4$$



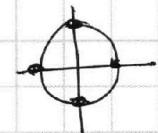
$$R \cdot \arcsin \frac{a}{R} \cos = \frac{a}{R}$$

$$\frac{\pi}{2}$$

если

$$|a| \leq 2$$

$$a^2 \leq 4$$



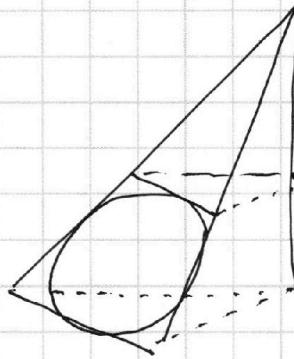
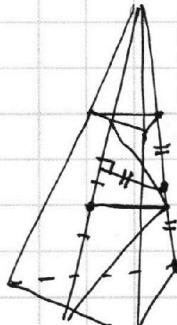
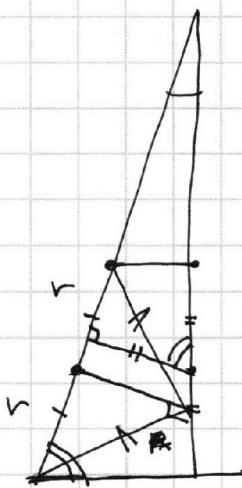
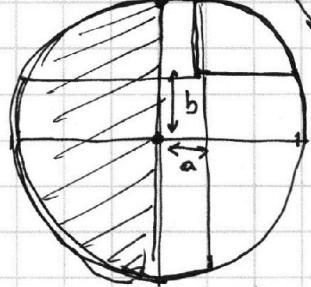
по окружности величины $\pi/2$!

$$2\sqrt{g-a^2} + 2\sqrt{g-b^2} = \\ = 2(\sqrt{g-a^2} + \sqrt{g-b^2}) - \text{кубик мал.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g-a^2}} + \frac{1}{\sqrt{g-b^2}} \quad \sqrt{g-a^2} = \sqrt{g-b^2} \\ a=0 - \text{мал.}$$

$$\sin = 0 \text{ или } \cos = 0 \quad b^2 = 4$$

$$\alpha = \frac{R\pi}{2}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

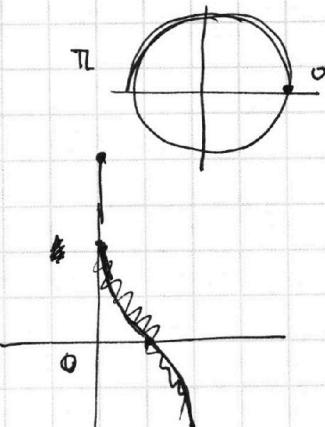
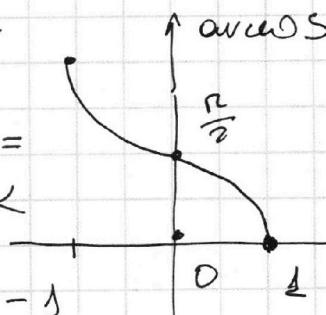
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi$$

3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

101 | 7
40
31



$$\arccos \frac{x}{4} = \pi$$

$$\frac{x}{4} = -1 \quad x = -4 \\ \frac{y}{9} = -1 \quad y = -9$$

Переделоп! Ура-а!
 $x = -3$

$$y + 1 + 2n = -9 \\ \leq y + 1 + 2k = -3$$

$$\begin{cases} \frac{x}{4} \in (-1; 1) \\ \frac{y}{9} \in (-1; 1) \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-4; 4) \\ y \in (-9; 9) \end{cases}$$

$$y = 3x - 1 + 2n \\ y = -x + 1 + 2k$$

72

$$r^2 + (l-r)^2 \cos^2 \varphi = \cos^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \varphi} (l \sin^2 \varphi - l + r)^2$$

$$r = \frac{l \sin \alpha}{\sqrt{l^2 + \sin^2 \alpha} + \sin \alpha} = \frac{l}{\sqrt{\frac{l^2}{\sin^2 \alpha} + 1} + 1}$$

$$r^2 \sin^2 \varphi + (r-l)^2 \cos^2 \varphi = \cos^2 \alpha + (r - l \cos^2 \varphi)^2$$

$$r^2 - 2rl \cos^2 \varphi + l^2 \cos^2 \varphi = \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + r^2 - 2rl \cos^2 \varphi$$

$$l^2 \cos^2 \varphi = \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + l^2 \cos^4 \varphi$$

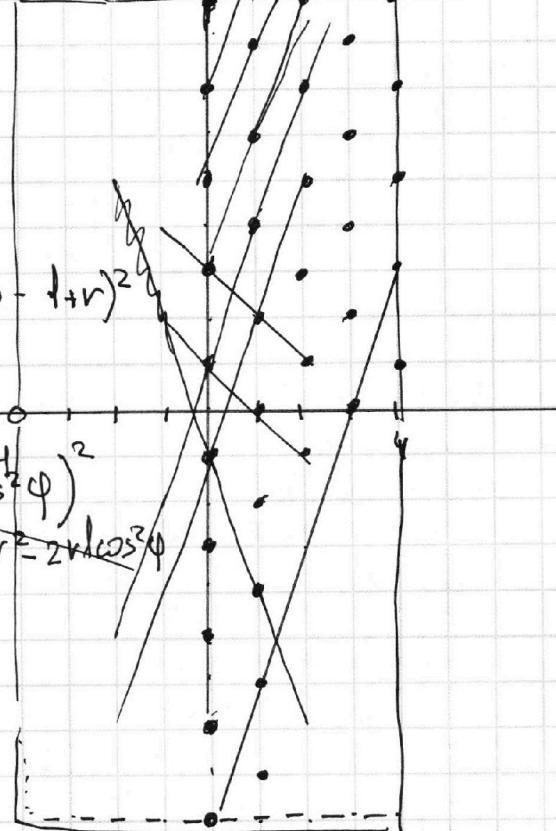
$$\frac{4}{\sin^2 \varphi} = 4 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \varphi}$$

$$4 = 4 \sin^2 \varphi + \cos^2 \alpha$$

$$3 = \sin^2 \varphi = 1$$

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \varphi + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \varphi} = 1$$

$$x = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$$



10 9 10 9 10
9 9 9 9 9



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad x \neq 3$$

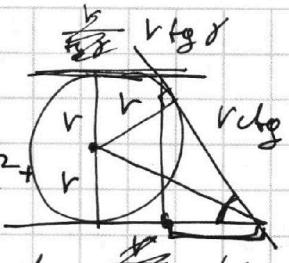
$$x^3 - y^3 - 9xy$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$xy = (x-3)(y+3) = xy - 3y + 3x - 9$$

$$x-y=3 \quad x=y+3$$

$$(y+3)^3 - y^3 - 9y(y+3) = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y - 27y = 27$$



$$r\sin\alpha \quad r(\sin\alpha - \cos\alpha)$$

$$\textcircled{1} \quad 111 \leftarrow 101 \cdot 11 \quad \text{101-пробое ???}$$

~~A = 101 \cdot 11 \cdot k, k \in \{3; 9\}~~

~~B = 101~~

~~C = 55 \quad C : 11 \Rightarrow C = 55~~

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 5 & 5 \\ \hline & 1 & 0 \\ \hline & 5 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Все?

\textcircled{4} \quad N - олимп.

$$P_1 = \frac{4}{N} \cdot \frac{3}{(N-1)}$$

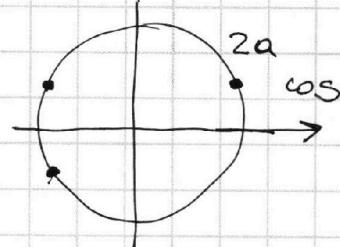
$$P_2 = \frac{k}{N} \cdot \frac{(k-1)}{N-1}$$

$$3,5 \cdot \frac{12}{N(N-1)} = \frac{k(k-1)}{N(N-1)}$$

$$7 \cdot 6 = k(k-1) \quad k=7$$

$$k^2 - k - 42 = 0$$

$$(k-7)(k+6) = 0$$



$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

~~(a-b)~~

$$(\sin a - \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a$$

$$\sin^2 a - \cos^2 a = -\sin b \sin a - \cos a \cos b = 0$$

$$-\cos 2a$$

$$-\cos(a-b)$$

$$-\cos(a-b)$$

$$2a = \pi - a + b + 2\pi n$$

$$2a = \pi + a - b + 2\pi k$$

$$3a = \pi + b + 2\pi m$$

$$a = -b + \pi + 2\pi k$$

$$4\cos^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha = 4$$

$$4\sin^2 \alpha = 4 - 4\cos^2 \alpha$$

$$-4\sin^2 \alpha$$

