

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$
Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.
- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N1

$$A = \overline{aaaa} = 1111a$$

Всм

$n \in N$

$$ABC = n^2$$

$$1111a \cdot B \cdot C = n^2 \\ 11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow n:11, n:101 \quad (101, 11 - \text{простые})$$

$$\text{ст} \quad n = 1111K, K \in N$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = 1111^2 K^2$$

$$a \cdot B \cdot C = 1111^2 K^2$$

$$a \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot K^2 \Rightarrow a \cdot B \cdot C : 101,$$

при этом a -цифра, $B < 100 \Rightarrow B : 101 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{B=606} \quad (\text{хочя бы 1 цифра} = 6)$$

$$a \cdot 606 \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot K$$

$$6aC = 11K^2 \Rightarrow 6aC : 11$$

бас

$$a\text{-цифра, значит } C : 11 \Rightarrow \boxed{C=33} \quad (\text{хочя бы 1 цифра} = 3)$$

$$6 \cdot a \cdot 33 = 11 \cdot K^2$$

$$18a = K^2$$

$$2 \cdot 9 \cdot a = K^2$$

$a \neq 0$

Произведение $2 \cdot 9 \cdot a$, где a -цифра явл. квадратом

только при $a \in \{2; 8\}$

$$\text{Ответ: } (2222; 606; 33)$$

$$(8888; 606; 33)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

N²

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$x, y > 0 \Rightarrow x+y+5 \neq 0$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$0 = 2x - 2y - 4$$

$$0 = x - y - 2$$

$$x = y + 2$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = x^3 + 3x^2 - 2 + 3x - 4 + 8 - y^3 - 6(y+2)y = \\ = 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 12y = 8$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$\frac{N^3}{\partial}$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) / \cos \pi x$$

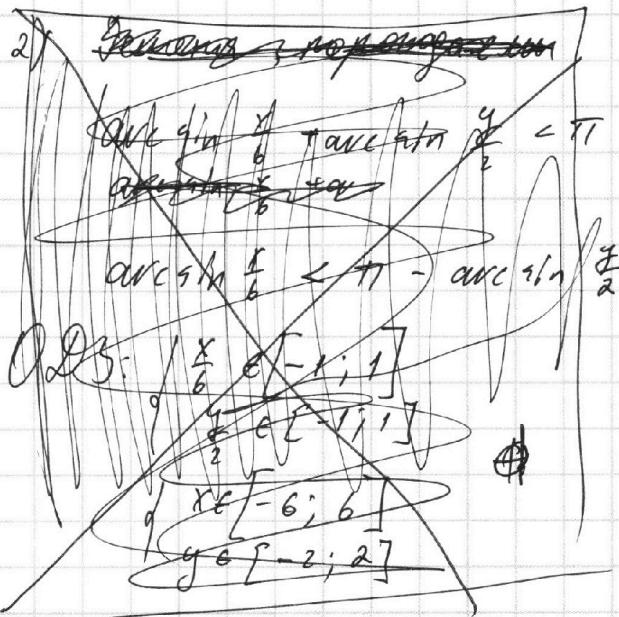
$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = -\sin \pi x \sin \pi y - \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$$

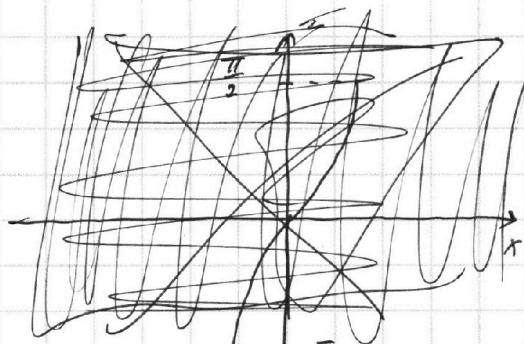
$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi x - \pi y + 2\pi K, & K, n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -\pi x + \pi y + 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y + 2K & (1) \\ 3x = y + 2n & (2) \end{cases}$$



$$2) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi.$$



Заметим, что $\arcsin t \leq \frac{\pi}{2}$, поэтому неравенство выполняется всегда на области определения, кроме случая $\arcsin \frac{x}{6} = \arcsin \frac{y}{2} = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} x \in [-1, 1] \\ y \in [-1, 1] \\ \frac{x}{6} \neq 1 \\ \frac{y}{2} \neq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in [-6, 6] \\ y \in [-2, 2] \\ x \neq 6 \\ y \neq 2 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

~~Решение, которое я сделал:~~

~~Установка~~ ~~хуторок~~
~~Борисовка~~

~~Члены~~

3) Заметим, что если пара (x, y) находится одновременно из уравнений (1) и (2), то она находится и в другом, т.к. $[x+y] = [3x-y]$ является однородным уравнением четвертого, и только она определяет подходит ли это решение. Поэтому на - во всех решениях можно найти посчитав на - во решения (1):

~~Но это было бы слишком много, а это было бы слишком много, чтобы~~
Посчитаем на - во всех решениях, а потом используем случаи $x=6$
 $y=2$.

$$x+y=2k$$

Если $y \in \{-2; 0; 2\}$, то x - любой четный: $x \in \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\}$

\downarrow
21 реш.

Если $y \in \{-1; 1\}$, то x - любой нечетный: $x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$

\downarrow
12 реш.

Итого: $21+12-1 = 32$ реш

$$\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

Ответ: 1) ~~$(-\tilde{y}+2k; \tilde{y})$~~ $\tilde{y}, n \in \mathbb{Z}; \tilde{y} \in \mathbb{R}$
 ~~$\left(\frac{\tilde{y}+2n}{3}; \tilde{y}\right)$~~

2) 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N⁴

($k < n$)

Пусть есть n человек и k билетов. Найдём вероятность того, что 2 выбранных человека получат ^{одновременно} билеты.

Чтобы x -ко-во сп-в распределения билетов, при котором оба получат.

$$P = \frac{x}{C_n^k}$$

Выберем из n человек k обладателей:

Чт-во сп-в, при которых получат $\text{Всё} : C_{n-1}^{K-1}$

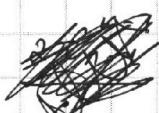
$\leftarrow \dots \rightarrow$

$\text{Люди} : C_{n-1}^{K-1}$

$\leftarrow \dots \rightarrow$

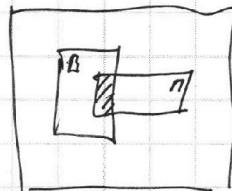
Наконец: C_{n-2}^K
из них

$$2C_{n-1}^{K-1} - x + C_{n-2}^K = C_n^K$$



$$x = 2C_{n-1}^{K-1} + C_{n-2}^K - C_n^K$$

$$P = \frac{2C_{n-1}^{K-1}}{C_n^K} + \frac{C_{n-2}^K}{C_n^K} - 1 \neq$$



Решение

$$\frac{C_{n-1}^{K-1}}{C_n^K} = \frac{(n-1)! \cdot K! \cdot (n-K)!}{(K-1)! \cdot (n-K)! \cdot n!} = \frac{K}{n}$$

$$\frac{C_{n-2}^K}{C_n^K} = \frac{(n-2)! \cdot K! \cdot (n-K)!}{K! \cdot (n-K-1)! \cdot n!} = \frac{(n-K)(n-K-1)}{(n-1)n}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\rho = \frac{2k}{n} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-1)n} - 1. \quad (1)$$

~~Предположим, что в кон~~

Если $n \leq 4$, то при добавлении биномов

ρ не изменится, что неверно, значит
берем только в начале выкладываемся (1).

~~В-так-ко бином в конце~~
Предположим, что в конце всем хватило биномов
 $| b \geq n)$

$$\rho_{\text{конце}} = 1$$

$$\rho_{\text{начало}} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{8}{n} + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)n} - 1 = \frac{1}{6} \quad | 6n(n-1)$$

$$48(n-1) + 6(n-4)(n-5) - 6n(n-1) = n(n-1)$$

$$48(n-1) + 6(n-4)(n-5) = 7n(n-1)$$

~~$48 - 48n + 48$~~

$$6(n^2 - 9n + 20) = (n-1)(7n-48)$$

$$6n^2 - 54n + 120 = 7n^2 - 55n + 48$$

$$n^2 + n + 82 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 82 < 0$$

$b \leq n$
нет реш., т.к. в корне есть

и можем пользоваться (1) для каждого

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$6 \left(\frac{8}{n} + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)n} - 1 \right) = \frac{26}{n} + \frac{(n-6)(n-8-1)}{(n-1)n} - 1$$

$$6(8(n-1) + (n-8)(n-5) - n(n-1)) = 26(n-1) + (n-6)(n-6+1) -$$

$$6((8-n)(n-1) + (n-7)(n-5)) = (26-n)(n-1) + (n-6)(n-6+1)$$

$$6(-n^2 + 8n - 8 + n^2 - 9n + 20) = 26n - 26 + n + n^2 - 26n + 6^2 - n + 6$$

$$= 26n - n^2 - 26 + n + n^2 - 26n + 6^2 - n + 6$$

$$6 \cdot 12 = b^2 - b$$

$$b^2 - b - 72 = 0$$

Решение. $b = -8$ \textcircled{D}
 $b = 9$

$$b = 9$$

Ответ = ~~9~~ 9

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \leq 0 \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 \leq 169 \quad (2)$$

$$5\sqrt{2} \cos \alpha = a$$

$$5\sqrt{2} \sin \alpha = b$$

$$a^2 + b^2 = 100 \quad (*)$$

$$(x + a)(y + b) \leq 0$$

График (1) — четверти плоскости как на рис. 1.

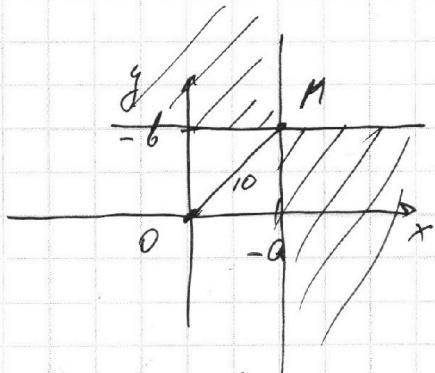


рис. 1.

При этом из (*) следует, что $OM = 10$ (M — точка пересечения прямых, ~~одр.~~ четьерти плоскости)

График (2) — круг с центром в O ; $r = 13$.

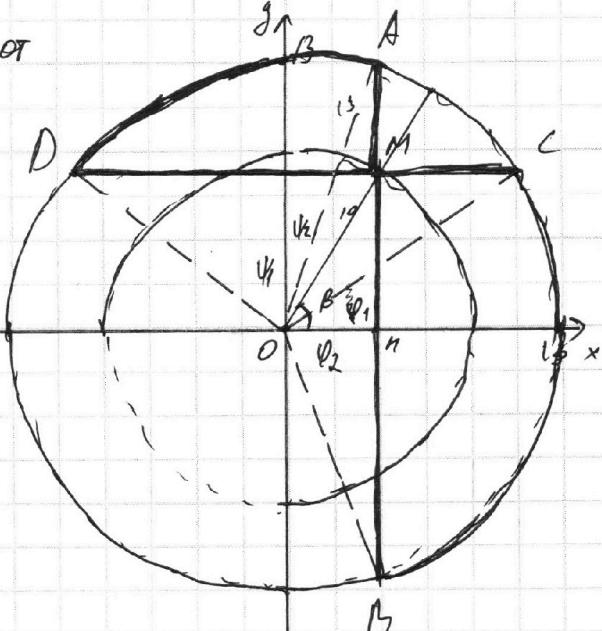
Получим зависимость периметра от положения точки M . Понятно, что в силу симметрии можно рассмотреть только положение т. M в I четверти, ~~и при остальных~~ при остальных положениях ответ один.

$$\angle(OM, x) = \beta$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{\text{отн. } \beta}{13}$$

$$\cot \psi_1 = \frac{\text{отн. } \beta}{13} \quad | \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1 + \psi_1 = \frac{\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= \frac{10 \cos \beta}{13} \\ \cos \varphi_2 &= \frac{10 \cos \beta}{13} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \psi_1 + \psi_2 = \pi$$

$$\widehat{CB} + \widehat{AD} = \pi \quad (\text{умы дуг})$$

$$\widehat{AD} + \widehat{CB} = \pi \cdot 13 \quad (\text{длинные дуги})$$

~~Найдем, какую β выбрать~~

$$AB = 2AM = 2\sqrt{13^2 - 10^2 \cos^2 \beta}$$

$$CD = 2\sqrt{13^2 - 10^2 \sin^2 \beta}$$

$$P(M) = 13\pi + 2\left(\sqrt{13^2 - 10^2 \cos^2 \beta} + \sqrt{13^2 - 10^2 \sin^2 \beta}\right)$$

Найдём β , при котором $P(M) \rightarrow \max$

$$\underbrace{\sqrt{13^2 - 10^2 \cos^2 \beta}}_{a_1} + \underbrace{\sqrt{13^2 - 10^2 \sin^2 \beta}}_{b_1} \rightarrow \max$$

$$\text{так как } a_1^2 + b_1^2 = 2 \cdot 13^2 - 10^2 (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = \dots$$

P не зависит
от $\beta \Rightarrow$

\Rightarrow Из теоремы о средних (средней квадратичной и среднем арифметическом) следует, что найденное значение $a+b$ принимает при $a=b$, т.е. $\boxed{\beta = 45^\circ}$

$$P_{M(\max)} = 13\pi + 2\sqrt{13^2 - 10^2 \cdot \frac{1}{2}} = 13\pi + 4\sqrt{119}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Подходящие значения т. M
отложены на рис.

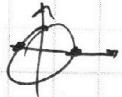
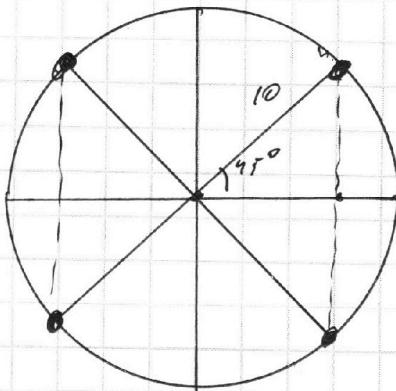
$$5\sqrt{2} \cos \alpha = \pm 10 \cdot \cos 45^\circ = \pm 5\sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \pm 1$$

$$\alpha = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $P(M)_{\max} = 13\pi + 4\sqrt{119}$

$$\alpha = \pi K, K \in \mathbb{Z}.$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Решение, соответствующее (1):

$$x = -y + 2k$$

$$x+y = 2k$$

$$k \in [-4; 4]$$

$$k \in [-4; 3]$$

$$k \in [-6; 6]$$

$$y \in [-2; 2]$$

$$x+y \in [-8; 8]$$

$$(т.к. \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \text{ невесм.)})$$

(имеет смысл, что $x+y$ может принимать любые значения из промежутка, и только такие)

Получаем, что для $k \in [-4; 3]$ можно выбрать $k \in [-6; 6]$, например ~~будет соответствовать единственное~~ y , и при этом первое выполнено.

Итого: 8. 13 = ~~решение~~¹⁰⁴

Решение, соответствующее (2):

$$3x = y + 2n$$

$$3x - y = 2n$$

$$3x \in [-18; 18]$$

$$\begin{array}{r} 169 \\ - 50 \\ \hline 119 \end{array}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
<input type="checkbox"/>						

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

• Решения, порождающие (1):
 $x+y = 2n$

$y = 2$: x - любое чётное, кроме 6
 $\{6; 4; 2; 0\} - \{2; -4; -6\} \rightarrow 6$ реш

~~$y = 3$: x - любое чётное~~
~~Четвертого~~

$y = 1; y = -1$: x - любое нечётное:
 $\{6; -5; -3; -1; 1; 3; 5\} \rightarrow 6$ реш

$\rightarrow 6$ реш

$y = 0, y = -2$: x - любое чётное
 $\{6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\} \rightarrow 7$ реш

~~7 реш~~
~~7 реш~~

Итого: $6+3+7-2 = 18+14 = 32$ реш

• Решения, порождающие (2):

$3x - y = 2n$

~~Четвертого чётного~~

Процесс рассуждения аналогичен предыдущему, отличие лишь в том, что ограничение есть только на чётность, а

$3x-y$ и $x+y$ имеют одинаковую чётность.

Итого: 32 реш

- ~~Четвертого чётного~~
- Из того, что на то, подходит ли пара ~~реш~~ (x, y) виляет только их чётность следует, что $\nabla(x, y)$ чётны.
(1) чётн. (2)

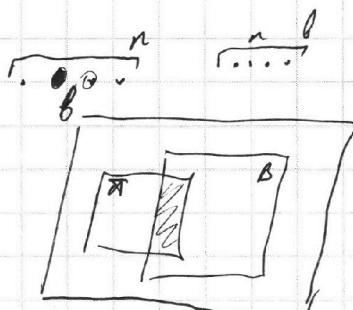
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~Лицем~~ Лицем: C_{n-1}^{b-1}

Равн.: C_{n-1}^{b-1}
 C_{n-2}^b

~~Всего~~ Всего: x
 C_n^b

$$P = \frac{x}{C_n^b}$$

$$2C_{n-1}^{b-1} - x + C_{n-2}^b = C_n^b$$

$$\therefore C_n^b$$

$$2 \frac{C_{n-1}^{b-1}}{C_n^b} - P + \frac{C_{n-2}^b}{C_n^b} = 1$$

$$P = \frac{2C_{n-1}^{b-1}}{C_n^b}$$

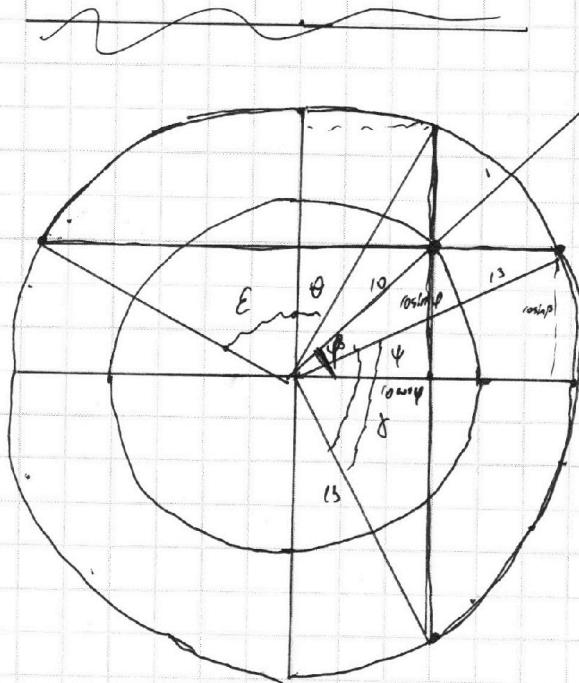


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \psi = \frac{10 \sin \beta}{13}$$

$$\sin \delta = \frac{10 \cos \beta}{13}$$

~~sin 2 cos^2~~
~~10 sin beta~~
~~10 sin theta~~

$$\sin \theta = \frac{10 \cos \beta}{13}$$

$$\cos \epsilon = \frac{10 \sin \beta}{13}$$

$$\sin \psi = \cos \epsilon$$

$$\psi + \epsilon = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \delta = \sin \theta$$

$$\theta - \delta \approx \frac{\pi}{2}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

3) Решение, порождающие (1)

$$x+y = 2K.$$

Подчищаем все решения при $x \in [-6; 6]$, $y \in [-2; 2]$, а можно использовать случаи $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

$x+y \in [-8; 8]$ (подчищаем все удовлетворяющие **правило**)
 $K \in [-9; 9]$.

$$\begin{aligned} 2K &\in [-6; 5] \\ K &\in [-3; 3] \\ K &\in [-2; 4] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} + & + & + & + & - & - & - \\ -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{array}$$

Для ~~каждого~~ $\forall K \in [-9; 9]$ можно выбрать $\forall x \in$

3) Решения, порождающие (1) :

$$x+y = 2K$$

, т.е. что $x=6, y=2$ подходит.

$$y=2 : x = 2K - 2 \in [-6; 5]$$

$$2K \in [-4; 7]$$

$$2K \in [-4; 6]$$

$$K \in [-2; 3] \rightarrow 6 \text{ реш.}$$

$$y=1 : x = 2K - 1 \in [-6; 6]$$

$$2K \in [-5; 7]$$

$$2K \in [-4; 6]$$

$$K \in [-2; 3]$$

$$K \in (-\infty; 3] \rightarrow 6 \text{ реш.}$$

$$y=0 :$$

$$x = 2K \in [-6; 6]$$

$$K \in [-3; 3]$$

$$\rightarrow 7 \text{ реш.}$$

$$y=-1 :$$

$$x = 2K + 1 \in [-6; 6]$$

$$2K \in [-7; 5]$$

$$2K \in [-6; 4]$$

$$K \in [-3; 2]$$

$$\rightarrow 6 \text{ реш.}$$

$$\begin{aligned} \text{Итого: } 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = \\ = 18 + 14 = 32 \text{ реш.} \end{aligned}$$

$$y=-2 :$$

$$x = 2K + 2 \in [-6; 6]$$

$$2K \in [-8; 4]$$

$$K \in [-4; 2]$$

$$\rightarrow 7 \text{ реш.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Решения , гороподобные (2)~~

~~УЗВОК~~

~~запись~~

~~аналог -18; 15~~

~~аналог -9; 17~~

~~аналог -18; 16~~

~~аналог -9; 8~~

~~УЗВОК ВК~~

Решения , гороподобные (2)

$$3x = y + 2n$$

$$y = 2: \quad 3x - 2 = 2n \Rightarrow x \neq 2 \quad (\text{при таком } x \neq 6)$$

$$x = 4, \quad x = 2, \quad x = 0, \quad x = -2, \quad x = -4, \quad x = -6 \quad \text{- все}$$

6 реш

$$y = 1: \quad 3x - 1 = 2n \Rightarrow x \neq 2$$

$$\begin{aligned} x &= 5 \\ x &= 3 \\ x &= 1 \\ x &= -1 \\ x &= -3 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

6 реш



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$48(n-1) + 6(n-4)(n-5) = n(n-1)$$

$$\underline{48n - 48} + 6(n^2 - \underline{9n} + 20) = n^2 - n$$

$$\cancel{48n - 48} \quad 5n^2 - 5n + 72 = 0$$

$$D = 25 - 4 \cdot 5 \cdot 72$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P = \frac{2k}{n} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{(n-1)n} - 1 \quad (1)$$

~~Установлено~~ Если бы ~~установлено~~ было $n=4$, то при добавлении биномов вероятность не изменится, значит в начале применима формула (1).

Пусть в конце было выделено b биномов.

Преустановим, что $b < n$, тогда по формуле (1) можно постичь вероятность в конце

$$6P(K=b) = P(K=b)$$

$$6 \cdot \left(\frac{8}{n} + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)n} - 1 \right) = \frac{2b}{n} + \frac{(n-b)(n-b-1)}{(n-1)n}$$

$$6(8(n-1) + (n-4)(n-5)) = 2b(n-1) + (n-b)(n-b-1)$$

$$6(8n-8 + n^2 - 9n + 20) = 2bn - 2b + n^2 - 2bn + b^2 - n + b$$

$$6(n^2 - n + 12) = n^2 + b^2 - n - b$$

$$5n^2 - 5n + 72 = b^2 - b$$

$$5b(n - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} + 72 = (b - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

$$5(n - \frac{1}{2})^2 + 72 = (b - \frac{1}{2})^2 + 1$$

$$5(n - \frac{1}{2})^2 + 71 = (b - \frac{1}{2})^2$$

$$4(n - \frac{1}{2})^2 + 71 = (b - \frac{1}{2})^2 - (n - \frac{1}{2})^2 = (b + n - 1)(b - n)$$

$$(2n-1)^2 + 71 = (b + n - 1)(b - n)$$

Получим, что $b > n$. Противоречие.

Значит $b \geq n$, т.е. в конце все получили биномы и вероятность в конце равна 1. Тогда вероятность в начале равна $\frac{1}{6}$:

$$P = \frac{8}{n} + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)n} - 1 = \frac{1}{6} \quad | \cdot 6n(n-1)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = -\sin \pi x \sin \pi y - \cos \pi x \cos \pi y$$

$$-\cos 2\pi x = -(\cos(\pi x - \pi y))$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$2\pi x = \pi y$$

$$\begin{cases} \pi x = \pi y - \pi y + 2\pi k \\ 2\pi x = -\pi x + \pi y + 2\pi k \end{cases}$$

$$3\pi x = -\pi y$$

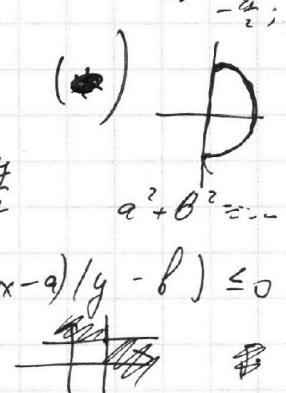
$$\begin{cases} x = -y + 2k \\ 3x = y + 2k \end{cases}$$

$$1) \arcsin\left(\frac{-y+2k}{6}\right) + \arcsin\frac{y}{2} < \pi$$

$$\arcsin\left(\frac{-y+2k}{6}\right) + \cancel{\arcsin\frac{y}{2}} < \pi - \arcsin\frac{y}{2}$$

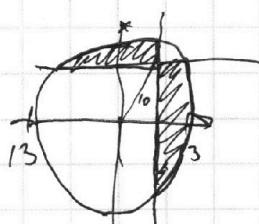
$$\arcsin\frac{-y+2k}{6} < \arcsin(\pi - \arcsin\frac{y}{2}) \quad (x-a)/y - b \leq 0$$

$$\begin{matrix} \leftarrow \\ -19 \end{matrix}$$



$$\begin{aligned} y + 5\sqrt{2} \cos \alpha &< 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &< -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y &> -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y^2 + p^2 &= 100 \\ \cos \alpha &> 0 \\ x &< -5\sqrt{2} \cos \alpha \end{aligned}$$

$$x^2 > p^2 > 50 \cos^2 \alpha$$

$$\begin{aligned} &25 \cdot 2 \\ &25 \cdot 4 = 100 \\ &48 - 54 + 1 = \\ &= -6 + 1 = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= 2 \cdot \sqrt{10^2 - 10 \cos^2 \beta} + \\ &+ 2 \cdot \sqrt{10^2 - 10^2 \sin^2 \beta} + \end{aligned}$$

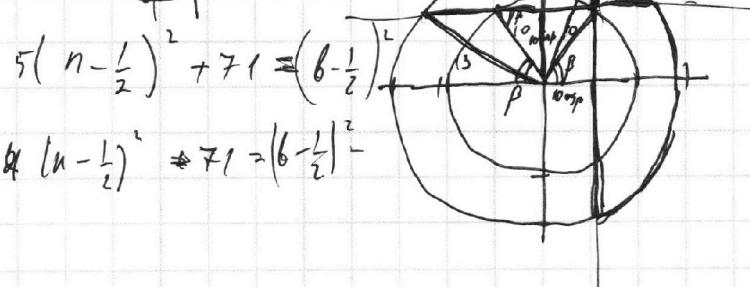
$$\begin{aligned} n^2 - n &= \\ &= n^2 - \cancel{2} \cdot \frac{1}{2} n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \end{aligned}$$

$$= \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$5(n^2 - n) + 72 = 8^2 - 6$$

$$5\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} + 72 = \left(8 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$5\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + 72 = \left(8 - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{xyz}$$

$$C = \overline{pq}$$

$$\begin{cases} p \\ q \end{cases} = 6$$

$$A = 1111a$$

$$11 \cdot 100 + 11 = 11 \cdot 10^1$$

~~1111~~

$$\begin{matrix} n:11 \\ n:101 \end{matrix}$$

$$100\text{?}00$$

$$ABC = n^2$$

$$1111a \cdot B \cdot C = n^2$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = n^2$$

$$11 \cdot 101 \cdot a \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot K^2$$

$$a \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot K^2$$

$$a \cdot 696 \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot K^2$$

$$6aC = 11 \cdot K^2$$

$$6 \cdot a \cdot 33 = 11 \cdot K^2$$

$$18a = K^2$$

$$2 \cdot 9 \cdot a = K^2$$

$$n = 11 \cdot 101 \cdot K$$

$$\cancel{ABC} \cancel{K} : 101$$

$$\boxed{B=106}$$

$$B : 101$$

$$c : 11$$

$$33$$

$$c = 33$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{g/h+x-h+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{\cancel{x+y+5}}{(x-2)(y+2)} \quad (>0)$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$0 = 2x - 2y - 4$$

$$0 = x - y - 2$$

$$x - y = 2$$

$$x = 2 + y$$

$$M =$$