



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} \widehat{(x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha)} \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A = \overline{aaaa} \Rightarrow A = K \cdot 1111^{N_1}$ 11-простое число
 $1111 = 11 \cdot 101$, 101 - простое число; ~~101~~
~~101~~ $K \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow$ простое
 $\Rightarrow B \cdot C \leq 101$ число $B = 101$ и его по-другому
 чтобы можно было взять корень не получилось
~~С~~ ~~5~~ есть 5 на конце.
 $B \cdot C \neq 101$, т.к. C - двузначное, а B - трёхзначное
 $\Rightarrow B \cdot C > 101 \Rightarrow$ остаётся только вариант
 $B = 101 \Rightarrow K \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot C = n^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow K \cdot C = 11^{2g+1} = 11^{2g+1}$, чтобы взять корень
 $\Rightarrow C \neq \sqrt{5}$, память не может быть на конце
 числа C, т.к. в этом случае при вычислении
 на K будет чётное число, ~~но~~ в то время как
 11^{2g+1} нечётное, число заканчивающееся памятью,
 в то время как 11^{2g+1} заканчивается единицей.
 $\Rightarrow C = 5d \Rightarrow K \cdot 5d = 11^{2g+1}$.
 Таким образом: $ABC = K \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot C = n^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow K \cdot B \cdot K \cdot C \cdot 11^2 \Rightarrow KC = 11 -$ минимальное
 число, которое удовлетворит условию $11^{2g+1}, g=0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow K \cdot C = 11$, но $K \cdot C > 50$, т.к. $C = 5d \Rightarrow$
 \Rightarrow решения нет. продолжение

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ищем: $n^2 = k \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C$

из произведения $k \cdot C$ 101 невозможна получить, т.к. 101 - простое, а произведение $k \cdot B; B \cdot C; k \cdot B \cdot C > 101$, т.к. B - трёхзначное, а C - двухзначное \Rightarrow

$\Rightarrow B = X \cdot 101$. - то есть в разложении B должно быть 101, тогда $X = 1$, чтобы выполнялось условие о наименьших единицах в числе $\Rightarrow B = 101 \Rightarrow n^2 = k \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot C$

Числа могут взять $\sqrt{k \cdot 11 \cdot C}$, C должно содержать в разложении 11, т.к. $k \in [1; 9] \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 11 \cdot Y, C = 5d$ или $C = 5d$ или $C = 55 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 55 = 11 \cdot 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow n^2 = k \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 5 \Rightarrow \sqrt{k \cdot 5} \Rightarrow$

$\Rightarrow k \cdot 5 = j^2; k \in [1; 9] \Rightarrow k = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 5 \cdot 1111 = 5555 B = 101 C = 55$

Это единственная тройка как видно из моего решения $(A; B; C) = (5555; 101; 55)$

Ответ: $(A; B; C) = (5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{x+y+1}{xy} &\leq \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow \\
 \Rightarrow (x+y+1) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} \right) &= 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} x+y+1=0 & \text{данное решение не подходит,} \\ (x-3)(y+3)=xy & \text{т.к. } x \text{ и } y > 0 \end{cases} \Rightarrow x-y=3 \Rightarrow \\
 \Rightarrow x=y+3 & \text{такое условие, } x>0, y>0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow x>3 & \cancel{\text{б/c}} \Rightarrow x>y+3, x>3 \text{ - подходит.} \\
 M &= x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9xy = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y^2 = \\
 &= 27y + 27 = 27(y+1) = 27(y+3) - 54 = 27y - 27 = 27(y-1) = 27 \\
 \Rightarrow M &= 27 \\
 \text{Ответ: } M &= 27
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 & a) \sin(\pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Rightarrow \\
 & \Rightarrow 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = 2 \cdot \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x \\
 & 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x \\
 & 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} \left(\sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x - \frac{\cos(\pi x - \pi y)}{2} \cos \pi x \right) = 0 \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x. \end{cases} \\
 & 1) 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi(y+x)}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\
 & \Rightarrow y + x = \pm 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\
 & 2) \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi(x-y)}{2} = \operatorname{ctg} \pi x \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi(x-y)}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \pi x \right) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \frac{\pi(x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi x + \pi n_2 \\
 & \frac{\pi(x-y)}{2} + \pi n_1 = \frac{\pi}{2} - \pi x + \pi n_2 \Rightarrow n_2, n_1 \in \mathbb{Z} \\
 & \Rightarrow 3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \begin{cases} x + y = \pm 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\begin{cases} x + y = \pm 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ 3x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть x - всего членов, тогда

$$\frac{1}{x} \quad 8 \quad \dots$$

Найдём все комбинации.

x удовлетворяющие условию:

$$N_{\text{вс}} = C_x^2 = \frac{(x-2)!}{(x-2-2)! 2!} = \frac{(x-2)!}{(x-4)! 2!} \Rightarrow$$

Всёю вариантов: $N_{\text{вс}} = C_x^4 = \frac{x!}{(x-4)! 4!}$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{N_{\text{вс}}}{N_{\text{вс}}} = \frac{(x-2)!}{(x-4)! 2!} \cdot \frac{(x-4)! 4!}{x!} = \frac{12}{x(x-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{12}{x(x-1)} = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$$

Можно было искать вероятность просто через равновероятность событий как: $P_1 = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$.

Пусть y - днилов в конце месяца, тогда найдём P_2 - вероятность в конце мес.:

$$P_2 = \frac{y}{x} \cdot \frac{(y-1)}{x-1} \cdot \frac{P_2}{P_1} = 3,5 = \frac{y(y-1)}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - y - 42 = 0 \Rightarrow D = 1 + 4 \cdot 42 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm 13}{2} \Rightarrow y = 7, y = -6 - \text{не подходит}$$

Ответ: 7 днилов в конце месяца.

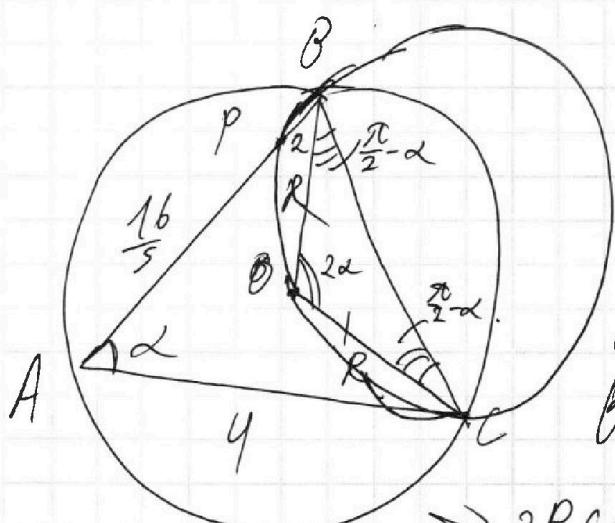


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} & \text{Запишем Th. cos} \\ & \text{для } \triangle ABC \text{ сторона } BC: \\ & BC = \sqrt{\left(\frac{26}{5}\right)^2 + 16 - 2 \cdot \frac{26}{5} \cdot 4 \cos \alpha} \\ & \text{для } \triangle BOC: \\ & BC = 2R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sqrt{\left(\frac{26}{5}\right)^2 + 16 - \frac{52}{5} \cdot 4 \cos \alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{5} \cdot 4 \cdot \sin \alpha = \frac{32}{5} \sin \alpha \\ 2R \sin \alpha = \sqrt{\left(\frac{26}{5}\right)^2 + 16 - \frac{208}{5} \cos \alpha} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

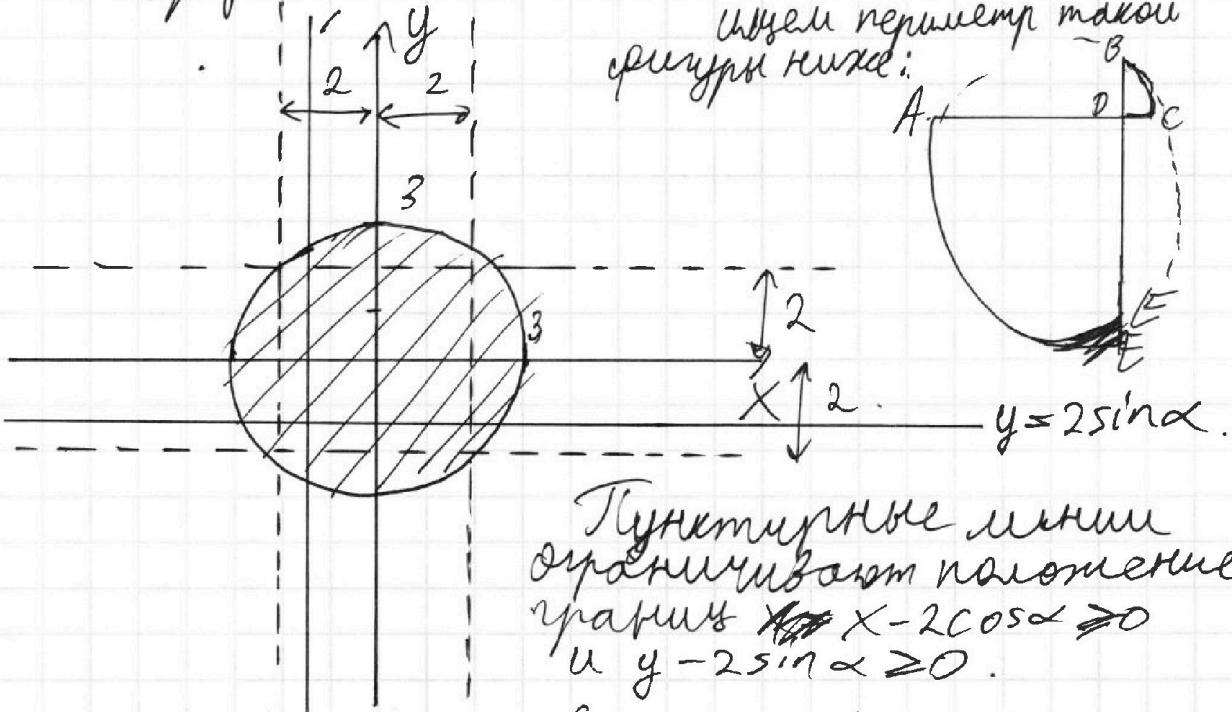
СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

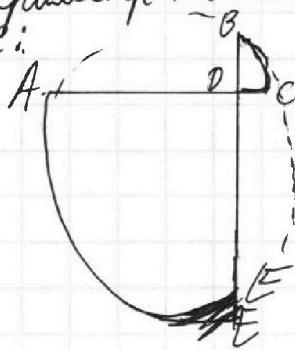
N6

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Изобразим данные множества точек плоскости в координатной плоскости:



Ищем периметр такой фигуры ниже:

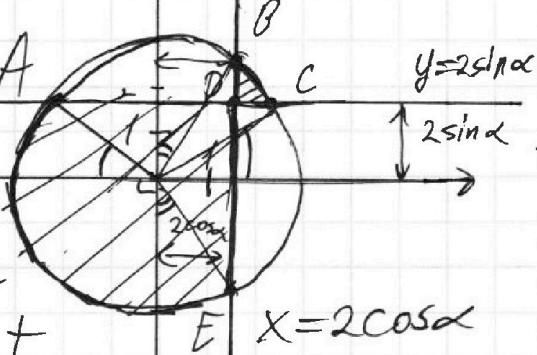


Пунктирные линии ограничивают наложение графиков ~~x - 2cosα ≥ 0~~ и $y - 2\sin\alpha \geq 0$.

$$x = 2\cos\alpha, (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2\cos\alpha \geq 0 \\ y - 2\sin\alpha \geq 0 \\ x - 2\cos\alpha \leq 0 \\ y - 2\sin\alpha \leq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим случай для $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$:



Найдём периметр, получившейся фигуры (ADBCE)

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot \sqrt{3^2 - 4\sin^2\alpha} + 2 \cdot \sqrt{3^2 - 4\cos^2\alpha} + \\ &+ (\arcsin \frac{2\sin\alpha}{R}) + \arcsin \frac{2\cos\alpha}{R} + \frac{\pi}{2} \cdot R + \\ &+ \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2\sin\alpha}{R} - 2\arccos \frac{2\cos\alpha}{R} \right), R = 3 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P = 2 \cdot \sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha} + 2 \cdot \sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha} + (\arcsin(\frac{2 \sin \alpha}{3}) + \arcsin(\frac{2 \cos \alpha}{3})) \cdot 3 \\ + \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(\frac{2 \sin \alpha}{3}) - \arcsin(\frac{2 \cos \alpha}{3}) \right) \cdot 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = 2 \cdot \sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha} + \sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha} + 3\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\alpha) = 2 \cdot \sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha} + \sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha} + 3\pi \Rightarrow$$

Найдём максимум функции, взывей производную по α :

$$P'(\alpha) = \frac{2 \cdot (-4 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)}{\sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha}} + \frac{2 \cdot (-4 \cdot 2 \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha))}{\sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha}} \Rightarrow$$

приравняем производную к нулю \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{-16 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha}} + \frac{16 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16 \sin \alpha \cos \alpha =$$

$$\Rightarrow 16 \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{\sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha}}{\sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha}} - \frac{\sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha}}{\sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha}} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \alpha = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \text{, можно возвести}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3^2 - 4 \cos^2 \alpha} = \sqrt{3^2 - 4 \sin^2 \alpha} \Rightarrow \text{на OZ}, 4 \cos^2 \alpha = 4 \sin^2 \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \sin \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \pm 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ \cos \alpha = -\sin \alpha. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccc} - & \min & + & \max & - & \min & + \\ \hline 0 & & \frac{\pi}{4} & & \frac{\pi}{2} & & \alpha \end{array} \Rightarrow \alpha_{\max} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$= 4\sqrt{7} + 3\pi \quad \text{Очевидно: } \alpha_{\max} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad P = 4\sqrt{7} + 3\pi$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{\pi(y+x)}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\pi(y+x)}{2} = \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y+x = \pm 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2). \sin \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\pi(x-y)}{2} = \cot \pi x \Rightarrow \tan \frac{\pi(x-y)}{2} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \pi x \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi x \Rightarrow x-y = 1-2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-y = 1.$$

$$\frac{\pi(x-y)}{2} + 2\pi n_1 = \frac{\pi}{2} - \pi x + 2\pi n_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-y}{2} + 2n_1 = \frac{1}{2} - x + 2n_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-y = 1-2x+2(n_2-n_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-y = 1+2n_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+x = \pm 1 + 2n_4, n_4 \in \mathbb{Z}. & \text{- все} \\ 3x-y = 1+2n_3, n_3 \in \mathbb{Z}. & \text{норм} \\ n_4 & \text{ещё 2 членов} \\ \text{из } \binom{x-2}{4} & \text{из } \binom{x-2}{2} \\ \text{назад} & \text{назад} \end{cases}$$

$$\overbrace{\quad \quad \quad \quad \quad \quad}^x \text{ человек. } N_{\text{чел}} = C_x^4 = \frac{x!}{(x-4)! 4!}$$

$$N_{\text{чел}} = C_{x-2}^2 = \frac{(x-2)!}{(x-4)! 2!} = x$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

x -всего модей, y -дней.

$$P_1 = \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!}$$

$$\text{Найдем } P_1 = \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} \Rightarrow \\ \text{Найдем } C_x^{y-2} = \frac{x!}{(x-y)! \cdot y!}$$

$\overbrace{\dots}^x$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{(x-y)! \cdot y!}{x!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{(x-y)(x-3)(x-6) \dots 4 \cdot 3 \cdot 2}{(x-2)(x-3)(x-4) \dots 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{12}{(x-2)(x-3)}$$

$$P_2 = \frac{C_x^{y-2}}{C_x^y} = \frac{x!}{(x-y)! \cdot y!}$$

$$\left(\sin(\pi y) - \sin(\pi x) \right)^{\sin(\pi y)} = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \cdot \sin y = \\ = 2 \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \cos y = \cos(\pi y) \cos(\pi x)$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \sin y = 2 \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \cos y$$

$$(\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \sin(\pi x) = 2 \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \cos(\pi x)$$

$$\Rightarrow 2 \cos\left(\frac{\pi(y+x)}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\pi(x-y)}{2}\right) \sin(\pi x) - \cos\left(\frac{\pi(y-x)}{2}\right) \cos(\pi x) \right) = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(1; -2) \text{ и } (-2; 1)$ - недоподходит, т.к. $-2 < 0 \Rightarrow$ кеподходит.

$$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \neq$$

имеем: $\frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{xy} \Rightarrow xy = (x-3)(y+3)$

$x+y+1=0$ - недоподходит, т.к. $x \text{ и } y > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-y \geq 3 \Leftrightarrow x = y+3$ - такое условие \Rightarrow

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x=y+3, x \geq 3 \text{ иное } y \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x=y \Rightarrow y=1 \Rightarrow$ проверим:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 1} = \frac{1}{4-3} + \frac{1}{1+3} + \frac{1}{(4-3)(1+3)} - \text{ выполнено} \Rightarrow$$

\Rightarrow подходит $x=y+3, x>3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow M = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y, y > 0.$$

$$M = y^3 + 3 \cdot 9y + 3 \cdot 3y^2 + 27 - y^3 - 9y^2 - 27y \Rightarrow$$

$\Rightarrow M = 27$. при $y > 0 \text{ и } x > 0$, тогда $M = 27$.

Ответ: $M = 27$.

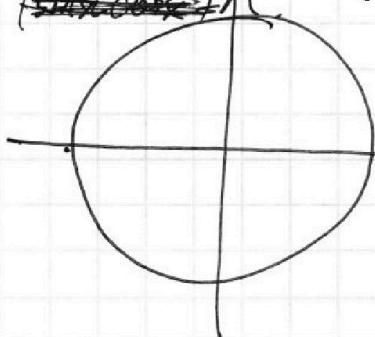
N3

$$(sin \pi x - sin \pi y) sin \pi x = (cos(\pi x) + cos(\pi y)) / cos \pi x$$

~~установлено~~ $\Rightarrow y = x = \pm 1$

$$y = x = \pm \frac{1}{2} + 2n^{\text{нечз}}$$

$$sin(\pi y) = sin(y + \pi + y + \pi) = sin(x + \pi + y)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} \quad B = \overline{b1c} \quad C = \overline{d5} \quad \begin{array}{l} x \neq 3 \\ y \neq -3 \\ y \neq 0 \end{array}$$

$$ABC = n^2 \Rightarrow \overline{aaaa} \cdot \overline{bc1} \cdot \overline{d5}$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy$$

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{1}{xy} = \frac{x-3+y+3}{(x-3)(y+3)} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+y+1) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} \right) = 0 \Rightarrow$$

~~$$(x+y+1)(x^2y^2 + 3xy - 3y - 9)xy = 0$$~~

$$(x+y+1) \left(\frac{(x-3)(y+3)(y-x)}{(x-3)(y+3)xy} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+y+1) \left(\frac{x+3y-9}{(x-3)(y+3)xy} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy \Rightarrow x+y+1=0 ; x-y=3 \Rightarrow x=3+y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+2y+1=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=1 \Rightarrow (1; -2) - \text{подходит} \Rightarrow$$

~~$$\Rightarrow (-2; 1) \text{ нуберн} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = 0 - \text{подходит}$$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

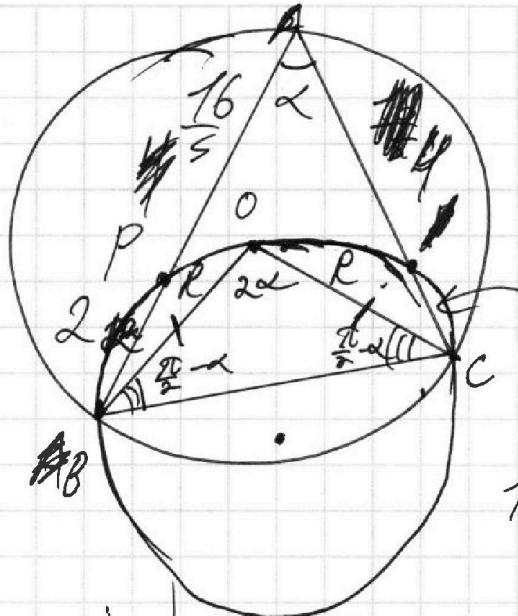
5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

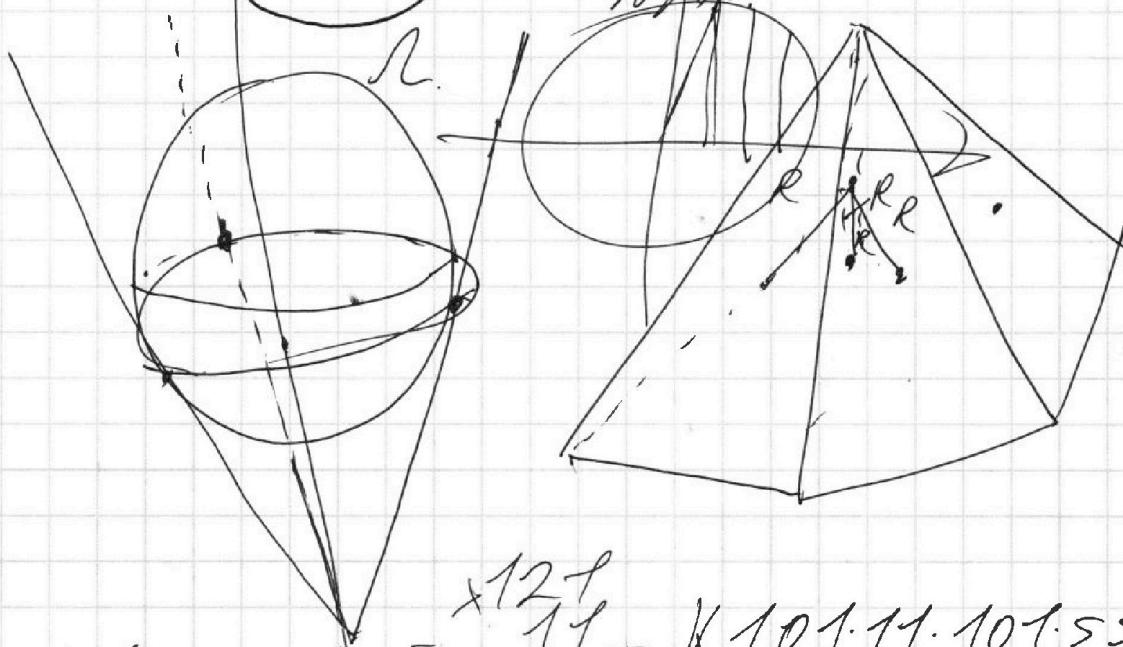


$$2R \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sqrt{\frac{26^2 + 4^2 - 2 \cdot \frac{104}{5} \cos\alpha}{5}}$$

K. 1111. a. b

$$\begin{array}{r} \cancel{1111} \\ \cancel{1111} \\ \hline \cancel{1111} \end{array} \cdot \frac{1111}{15} \text{ нулю не} \quad \begin{array}{r} 1111 \\ 1111 \\ \hline 1111 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1111 \\ 1111 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$1111 = 11 \cdot 101.$$



51.

$$\begin{array}{r} 121 \\ 11 \\ \hline 11 \end{array} \quad K. 101. 11. 101. 55.$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 11 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$K. 1111. B. C = K. 101. 11. B. C = K^2.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_1 = \frac{N_{\text{задач}}}{N_{\text{всех}}} = \frac{(x-2)!}{(x-4)! \cdot 2!} \quad \cancel{\frac{(x-4)! \cdot 4!}{x!}} = \frac{12}{x(x-1)} = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$$

$$P_2 = \frac{y}{x} \cdot \frac{(y-1)}{x-1} \quad y - \text{длины в концах.}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 3,5 = \frac{y(y-1)}{12} \Rightarrow y^2 - y = 42 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2 - y - 42 = 0 \quad D = 1 + 4 \cdot 42 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{169}}{2} \Rightarrow y = 7 \text{ или } -6$$

Ответ: 7 единиц

