

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел $(x; y)$ удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
| ИЗ |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = a(1111)$$

$$1111 = 11 \cdot 101 \quad 101 \not\div 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, \quad 101 \mid 7$$

т.к. $101 < 121$ $\not\div \{2, \dots, 11\} \Rightarrow 101$ - простое.

$$A = 11 \cdot 101 \cdot a \quad a \in \{1, \dots, 9\}$$

$$B = \overline{bcd} \quad \text{в 1-й цифре "1"}$$

$$C = \overline{ef} \quad \text{1-я цифра "5"}$$

$$A \cdot B \cdot C = k^2 \quad (\text{т.к. } k^2 : 101 \text{ т.к. } A : 101 \Rightarrow B \cdot C : 101,$$

$$C \not\div 101 \text{ т.к. } C - \text{двухзначное} \Rightarrow B : 101, B = k(101)$$

$$\text{т.к. } 101 > 100 \Rightarrow k < 10 \Rightarrow B = \{101, 202, 303, \dots, 909\}$$

$$\text{т.к. среди цифр } B \text{ } \not\div "1" \Rightarrow B = 101 \text{ т.е. получаем:}$$

$$: 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 101 \cdot \overline{ef} = k^2 \quad \text{т.к. } a < 10 \Rightarrow \overline{ef} : 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e = f = 5 \text{ т.к. среди цифр } C \text{ } \not\div 5 \Rightarrow C = 55 = 1$$

$$\Rightarrow 11^2 \cdot 101^2 \cdot a \cdot 5 = k^2 \Rightarrow a = 5$$

Ответ: (5555, 101, 55)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x, y > 0$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy = (x-3)(y+3), \quad xy = xy - 3y + 3x - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - y = 3 \quad y = x - 3, \quad M = x^3 - y^3 - 9xy =$$

$$= x^3 - (x-3)^3 - 9x(x-3) = x^3 - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - 9x^2 + 27x = x^3 - x^3 + 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = 27$$

Ответ: 27



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x$$

$$- \cos 2\pi x = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$- \cos 2\pi x = \cos(2\pi x + \pi)$$

$$\pi x > 0 \Rightarrow$$

$$y > \pi \Rightarrow 2\pi x + \pi + 2\pi n = \pi y - \pi x + \pi k$$

$$y < \pi \Rightarrow 2\pi x + \pi + 2\pi n = \pi x - \pi y + \pi k$$

$$\cancel{2\pi x > 0 \text{ или } \pi > 0 \text{ или } \pi < 0} \quad 2\pi x = 2\pi + 2\pi x$$

$$2\pi x + \pi + 2\pi n = \pi y - \pi x + \pi k$$

$$3x + 1 = y + k - 2n$$

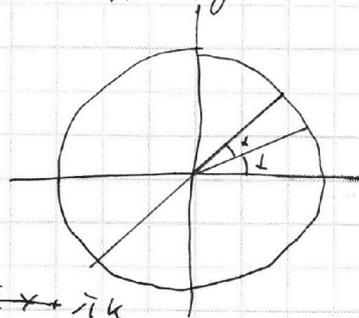
$$3n + 1 = y + 2\Delta \quad \text{где } \Delta \in \mathbb{Z}$$

или

$$2\pi x + \pi + 2\pi n_2 = \pi x - \pi y + \pi k_2$$

$$n + y + 1 = 2\Delta_2 \quad \text{где } \Delta_2 \in \mathbb{Z}$$

$$a) \text{ Ответ: } \underset{\text{или}}{3n - y = 2\Delta - 1} \text{ или } n + y = 2\Delta_2 - 1 \quad \text{где } \Delta, \Delta_2 \in \mathbb{Z}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
| из |

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

k - кол-во 11-ти км. ав.
 n - количество км. шоссе

$$\frac{4}{k} \cdot \frac{3}{k-1} = p_1 \quad 3,5 p_1 = \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{12 \cdot 3,5}{k(k-1)} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} \Rightarrow n^2 - n = 42$$

$$n^2 - n - 42 = 0 \quad D = 1 + 168 = 169 \quad n_{1,2} = \frac{1 \pm 13}{2}$$

т.к. $n > 0 \Rightarrow n = 7$ Ответ: 7



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AC = 4, BP = 2, AP = \frac{16}{5}$$

$$\angle ABC = ?$$

\mathcal{O}_1 - центр окр-ти ω_2

$$\angle BAC = 2$$

$$\angle ABC = AB \cdot AC \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2 =$$

$$= \frac{26}{5} \cdot 2 \cdot \sin 2$$

$$\angle BOC = 2\alpha$$

$\triangle ABC$ по теор. кос. б-и

$$\Rightarrow BC^2 = 16 + \frac{26^2}{25} - 8 \cdot \frac{26}{5} \cos 2 = 2R_1^2 - 2R_1^2 \cos 2 =$$

$$2R_1^2 (1 - \cos 2) = 4R_1^2 \sin^2 \alpha \quad \cos 2 = \cos 2\alpha$$

$$1 = 2R_1^2 (2 - 2\cos^2 \alpha) = 4R_1^2 (1 - \cos^2 \alpha) = 4R_1^2 \sin^2 \alpha$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R_1} = \frac{\frac{26}{5} \cdot 4 \cdot 2R_1 \sin \alpha}{4R_1} = \frac{52 \sin \alpha}{5}$$

$\angle CPB = \angle BOC = 2\alpha$

$$PC^2 = 16 + \frac{256}{25} - \frac{128}{5} \cos 2$$

$$BC^2 = 16 + \frac{26^2}{25} - 8 \cdot \frac{26}{5} \cos 2 = 4 + 16 + \frac{256}{25} + \frac{128}{5} \cos 2 - 4 \sqrt{16 + \frac{256}{25} - \frac{128}{5} \cos 2}$$

$$\cdot (2u^2 - 1) \frac{(26 - 16)(26 + 16)}{25} - \frac{8 \cdot 26 + 128}{5} \cos 2 - 4 = -4PC \cdot (2u^2 - 1)$$

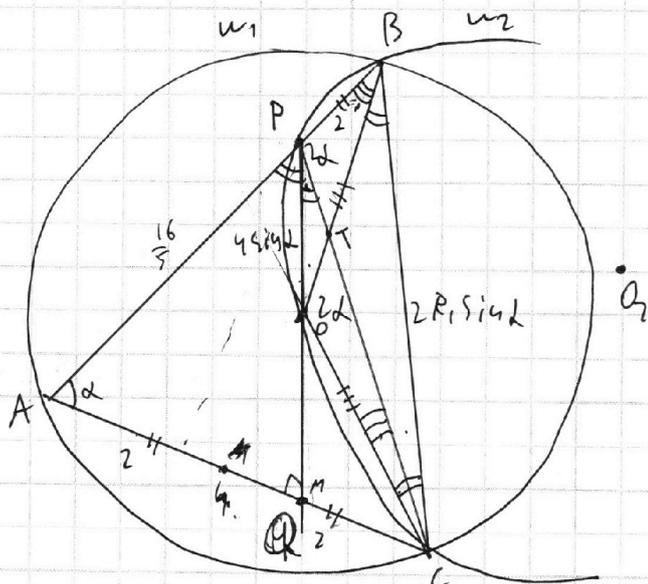
$$4 \cdot 84 - 336 \cos 2 - 20 = -20PC \cdot (2u^2 - 1)$$

$$64 - 336 \cos 2 = -20PC (2u^2 - 1)$$

$$84 \cos 2 - 16 = \sqrt{\frac{656}{25} - \frac{128}{5} \cos 2} (2u^2 - 1)$$

$$84 \cos 2 - 16 = \sqrt{656 - 540 \cos 2} (2u^2 - 1)$$

$$34^2 u^2 - 37 \cdot 84 \cos 2 + 256 = (656 - 540 \cos 2) (2u^2 - 1)^2$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{APC}{PCB} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

~~APC~~

$$34^2 n^7 - 256 = 656(4n^4 - 4n^2 + 1) - 540n(4n^4 - 4n^2 + 1)$$

$$\angle OBC = \angle OCB = \angle OPC = \beta$$

$$\beta + \alpha = 90^\circ \text{ и } 2\alpha + \beta + \beta = 180^\circ$$

$$\angle OCP = \angle PBO = \alpha$$

$$PC \perp OB = T \quad \frac{OC}{PB} = \frac{BC}{OP} \quad \frac{R_1}{2} = \frac{2R_1 \sin \alpha}{PO} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PO = 4 \sin \alpha, \quad \angle OPA = 180^\circ - 2\alpha - \beta = \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{при проецировании } PO \text{ на } O, \quad PO \perp AC = Q$$

$$\angle AQP = 90^\circ, \text{ в } \triangle APC \text{ } PQ \text{ и } BO \text{ медианы и медиана}$$

$$\text{и } \angle APQ = \beta = \angle QPC \Rightarrow Q \text{ и } M \text{ совпадают где}$$

$$M - \text{серединая } AC, \quad PC = \frac{16}{5} \Rightarrow \frac{APC}{PCB} = \frac{PCB}{PCB} =$$

$$\Rightarrow \text{в } \triangle APQ \quad AQ = 2, \quad AP = \frac{16}{5} \Rightarrow PQ = \sqrt{\frac{256}{25} - \frac{100}{25}} =$$

$$= \frac{\sqrt{156}}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{156} \cdot 5}{5 \cdot 16} = \frac{\sqrt{39}}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle ABC = \frac{AB \cdot AC}{2} \cdot \sin \alpha = \frac{26 \cdot 4}{2} \cdot \frac{\sqrt{39}}{4} = \frac{26\sqrt{39}}{10}$$

Ответ: $\frac{26\sqrt{39}}{10}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos t)(y-2\sin t) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \geq 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 9 - \text{круг} \\ \text{с центром } (0,0) \text{ и } R=3 \end{cases}$$

$$(x-2\cos t)(y-2\sin t) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2\cos t \\ y \geq 2\sin t \\ \text{или} \\ x \leq -2\cos t \\ y \leq -2\sin t \end{cases}$$

~~$x \in [-2; 2] \text{ и } y \in [-2; 2]$~~

~~$x, y \in [-2; 2], \text{ но } x \geq 0, y \geq 0$~~

~~$$\begin{cases} x \geq 2\cos t \\ y \geq 2\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2\sqrt{1-y^2} \\ y \geq 2\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq 4-y^2 \\ x^2+y^2 \geq 4 \end{cases}$$~~

0 - точки пересечения прямых

$x = 2\cos t$
 $y = 2\sin t$ и обратной им формулы

ищем по этим 2 формулам

определение точек круга, на

рис. найдем ГМТ точек

$O(2\cos t; 2\sin t)$

$2\sin t = \pm 2\sqrt{1-\cos^2 t}$

~~$2\sin t = 2\cos t = x, 2\sin t = y, y^2 = 4 - x^2$~~

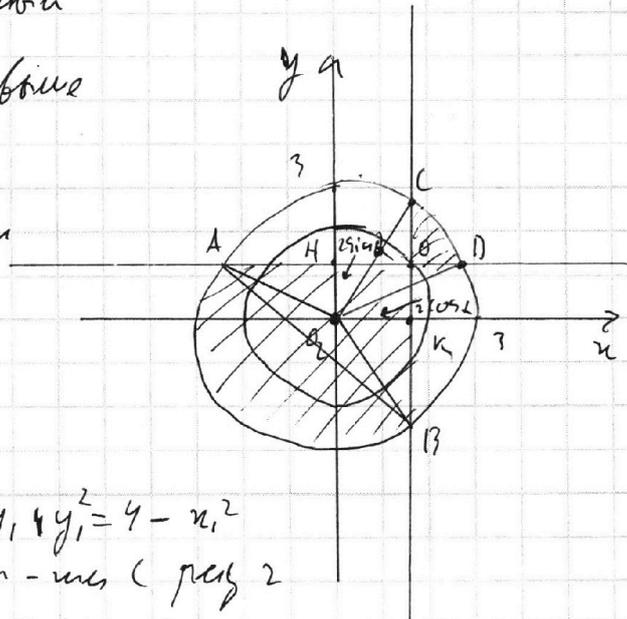
~~$y^2 + x^2 = 4$ и т.д. $O \in O.K.P$ - т.к. (рис 2)~~

~~и центром O, O найдем формулу описан. - и круг.~~

~~определяется на рис. $AH = \sqrt{9-4\sin^2 t} = HD, AO = \sqrt{9-4\sin^2 t} + 2\cos t \Rightarrow$~~

~~$OB = \sqrt{9-4\cos^2 t} + 2\sin t \Rightarrow AB = \sqrt{9-4\sin^2 t} + 4\cos^2 t + \sqrt{9-4\cos^2 t} + 4\sin^2 t + 4\sin t \sqrt{9-4\cos^2 t} + 4\cos t \sqrt{9-4\sin^2 t} = 4(\sin t \sqrt{9-4\cos^2 t} + \cos t \sqrt{9-4\sin^2 t})$~~

~~$AB = 6$~~





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a) $(\sin \lambda x - \sin \lambda y) \sin \lambda x = (\cos \lambda x + \cos \lambda y) (\cos \lambda x - \sin \lambda y)$

$$\sin^2 \lambda x - \sin \lambda y \sin \lambda x = \cos^2 \lambda x + \cos \lambda y \cos \lambda x - (\cos^2 \lambda x - \sin^2 \lambda y)$$
$$-\cos^2 \lambda x + \sin^2 \lambda y = \cos \lambda y (\cos \lambda x + \sin \lambda y) - \cos^2 \lambda x$$
$$-\cos^2 \lambda x = \cos(\lambda y - \lambda x)$$
$$2\lambda x + 2\lambda k = \lambda y - \lambda x + 2\lambda n + \lambda$$
$$-\cos^2 \lambda x = \cos(\lambda y - \lambda x)$$
$$2\lambda x + 2\lambda k = \lambda y - \lambda x + 2\lambda n + \lambda$$
$$3x - y = 2n - k + 1$$
$$-\cos^2 \lambda x = \cos(\lambda x - \lambda y)$$
$$2\lambda x + 2\lambda k = \lambda n - \lambda y + 2\lambda n + \lambda$$
$$n + y = 2n - 2k + 1$$
$$\begin{cases} 3n - y = 2n - 2k + 1 \\ n + y = 2n - 2k + 1 \end{cases}$$
$$2\lambda x + 2\lambda k = \lambda y - \lambda x + 2\lambda n + \lambda$$
$$2\lambda x + \lambda + 2\lambda k = \lambda y - \lambda x + 2\lambda n$$
$$3n + 1 + 2k = y + 2n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(x-1 \cos \alpha)(y-2 \sin \alpha) \geq 0$
 $x^2 + y^2 \leq 9$
 $(x-2 \cos \alpha)(y-2 \sin \alpha) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \end{cases} \vee \begin{cases} x \leq -2 \cos \alpha \\ y \leq -2 \sin \alpha \end{cases}$

$x > 0, y > 0$
 $\begin{cases} x \geq 2 \cos \alpha \\ y \geq 2 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 2 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ y \geq 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \end{cases}$
 $y^2 + x^2 \geq 4$

$x \leq 0, y \geq 0$
 $\begin{cases} y \geq 2 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \\ y^2 + x^2 \geq 4 \end{cases}$

$x > 0, y < 0$
 $y \geq -2 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$
 $y^2 + x^2 \leq 4$

$x < 0, y < 0$
 $y \leq -2 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$
 $y^2 + x^2 \leq 4$

$x \in [2 \cos \alpha, 3], y \in [2 \sin \alpha, 3]$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Handwritten solution on grid paper for a geometry problem involving a sphere and a triangle.

Top Left: ~~2478~~
89

Top Middle: 128.5 , $500 + 100$, 40

Top Right: 189 , 89 , 336 , $756 \overline{) 14}$, 392

Center: A large diagram of a sphere with a triangle ABC inscribed on its surface. Point P is marked on the sphere's surface. Lines connect P to A , B , and C . A smaller diagram to the left shows a similar setup with points A , B , C and a point P on a sphere.

Bottom Left: 16.25

Bottom Middle: $336 \overline{) 14}$, 184

Bottom Right: $\sin \alpha = ?$, $\frac{26}{5}$, 2.26 , $160 + 48$, $208 +$, $+ 128$, 336 , 0.2 , 42 , $10.$, $420 \overline{) 19}$, 40 , 20 , 184

Bottom Left Equation: $\frac{y}{n+2} = \frac{n}{y+R}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА ___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cos \alpha; 2 \sin \alpha$$

$$2 \cos \alpha; 2 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

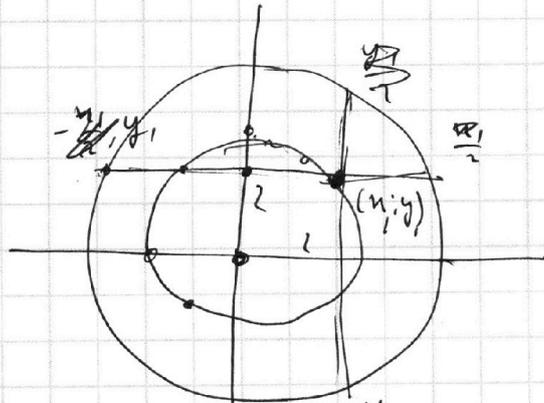
$$2x = 2 \sqrt{1 - y^2}$$

$$x = 0 \quad y = 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

$$y^2 = 4 - x^2$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

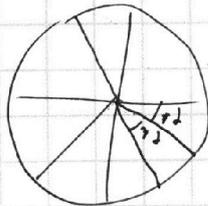
$$x \in [-2; 2]$$



$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

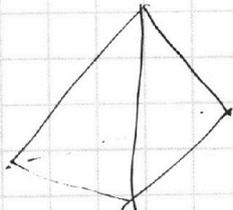
$$9 + 9 - 6 \cos 2\alpha =$$

x_1
 x_2



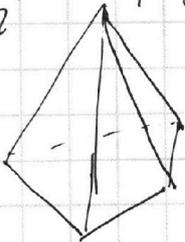
= *вероятность*

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

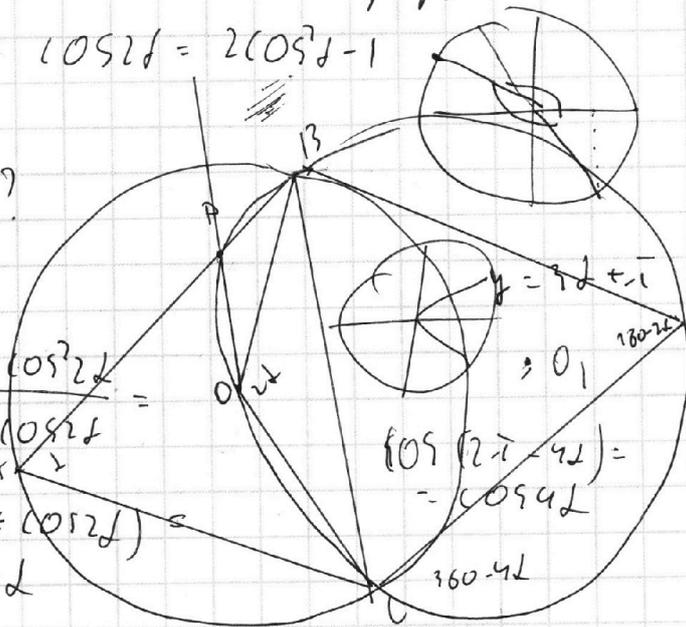


$$\frac{4abc}{4R}$$

$$\frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2 - 2 \cos^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{2(1 - \cos^2 \alpha)}{1 - \cos \alpha}$$

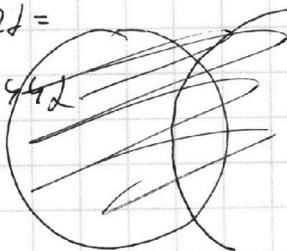


$$= 2(1 + \cos \alpha) = 2 \cos^2 \alpha$$



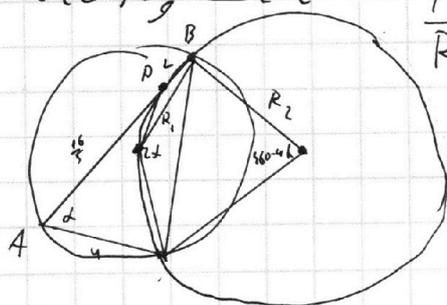
$$2R_1^2 - 2R_1^2 \cos 2\alpha =$$

$$= 2R_2^2 - 2R_2^2 \cos 2\alpha$$



$$2R_1 \cos \frac{x}{4} + R_2 \cos \frac{y}{9} \geq 2r$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 2 \cos \alpha$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(\pi + y) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

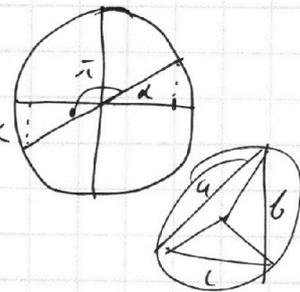
$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \sin \pi x - \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x - \cos(\pi x - \pi y) = \cos 2\pi x$$

$$\cos(\pi x + \pi y) = \cos \pi x \cos \pi y$$

$$2\pi x = \pi x - \pi y + \pi + 2\pi k$$

$$\boxed{x = 1 - y} \quad y = 1 - x$$



$$a \cos \frac{x}{4}$$

$$a \cos \frac{1+2\delta - x}{9}$$

$$x \in [-4; 4]$$

$$y \in [-9; 9]$$

$$y = -x$$

$$x + y = 1 + 2k - 2h$$

$$2(k - h) = 2\delta$$

$$x + y = 1 + 2\delta$$

$$|\delta| \leq 12$$

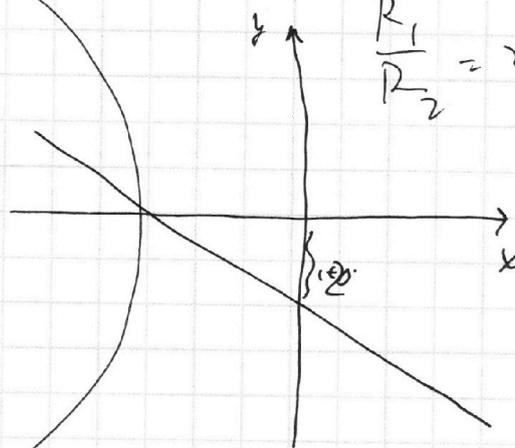
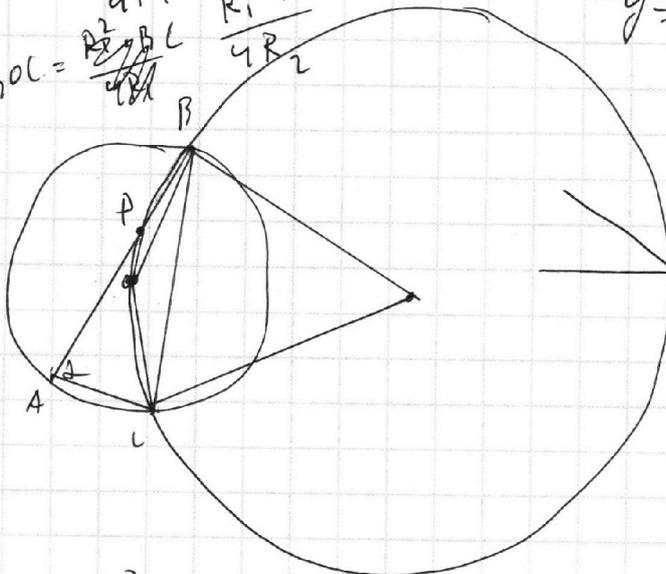
$$x + y \in [-13; 13]$$

$$y = 1 + 2\delta - x$$

$$\frac{R_1}{R_2} = 2 \cos \delta$$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R_1}$$

$$S_{AOC} = \frac{AO^2 \cdot BC}{4R_2}$$



$$S_{AOC} = 2R_1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
 2
 3
 4
 5
 6
 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n6

$$(x - 2 \cos t)(y - 2 \sin t) \geq 0$$

$$\sin t \in [-1; 1]$$

$$t = \frac{\pi}{2}$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 2$$

$$x \leq 0$$

$$y \leq 2$$

$$x \geq 2$$

$$x \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$y \geq \sqrt{3}$$

$$[-2; 2] \quad x \leq 1$$

$$y \leq \sqrt{3}$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos t = 0$$

$$(x_0; y_0)$$

$$\sin t = 1$$

$$(x_0; y_0)$$

$$\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2}$$

$$(y_0 + \sqrt{9 - x_1^2})^2 + (x_0 + \sqrt{9 - y_1^2})^2 =$$

$$= y_0^2 + 2y_0\sqrt{9 - x_1^2} + 9 - x_1^2 + x_0^2 + 2x_0\sqrt{9 - y_1^2} + 9 - y_1^2 +$$

$$+ 2x_0\sqrt{9 - y_1^2} = 2(y_0\sqrt{9 - x_1^2} + x_0\sqrt{9 - y_1^2})$$

$$4(\sin t \sqrt{9 - \cos^2 t} + \cos t \sqrt{9 - \sin^2 t})$$

$$x = 2 \cos t$$

$$x \geq 2 \cos t$$

$$y \geq 2 \sin t$$

$$x \leq 2 \cos t$$

$$y \leq 2 \sin t$$

$$x \geq \sqrt{3}$$

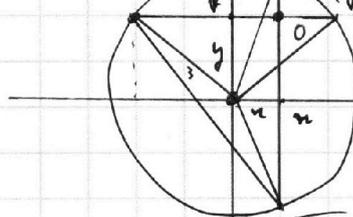
$$x \geq 2$$

$$y \geq 0$$

$$x = 2 \cos t$$

$$y = 2 \sin t$$

$$-\sqrt{9 - y^2}$$

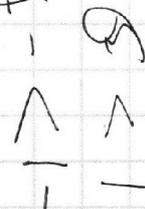
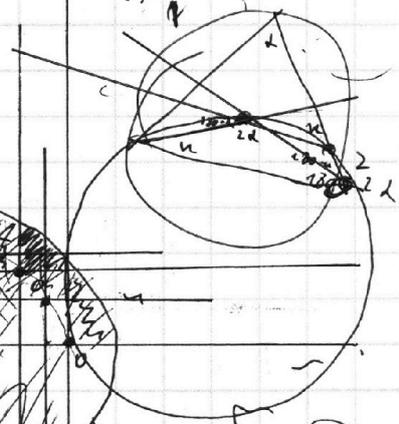
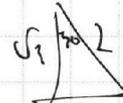
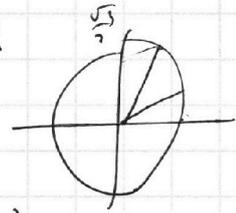


$$y = k$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 = 9 - k^2$$

$$y^2 = 9 - x^2$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~4
4
n > 4

p-ком-во ум

$$\frac{4}{p} \cdot \frac{3}{p-1} = \frac{12}{p(p-1)} \quad 12 \cdot 3,5 \quad \frac{12 \cdot 7}{2} = 42$$

$$\frac{n}{p} \cdot \frac{n-1}{p-1} = \frac{n(n-1)}{p(p-1)} = \frac{24}{7p(p-1)}$$

$$7n(n-1) = 24$$

$$7n^2 - 7n - 24 = 0 \quad D = 49 + 28 \cdot 24 =$$

$$= 7(7 + 4 \cdot 24) = 7(7 + 96)$$

$$\frac{n(n-1)}{p(p-1)} = \frac{42}{p(p-1)}$$

$$n^2 - n - 42 = 0 \quad D = 1 + 168 = 169$$

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm 13}{2}$$

$$n = \frac{14}{2} = 7 \quad D = 3$$

a^2 + b^2 = 2ab cos

SA BC =

~5
ABC = ?

$$AP = \frac{16}{5} \quad BP = 2 \quad AC = 4$$

$$\frac{16}{5} + \frac{10}{5} = \frac{26}{5}$$

$$PC = f(\angle)$$

кор б

$$PC^2 = 16 + \frac{256}{25} - \frac{2 \cdot 16 \cdot 4}{5} \cos \angle$$

$$\cos \angle = \pi \quad 1 - \cos^2 \angle$$

$$\cos 2\angle = (\cos^2 \angle - \sin^2 \angle) = 2\cos^2 \angle - 1 = 2u^2 - 1$$

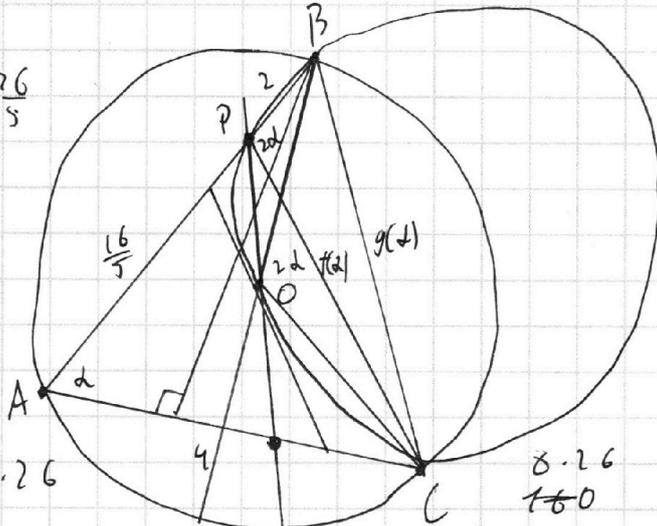
$$BC^2 = 16 + \frac{26^2}{25} - 2 \cdot 4 \cdot \frac{26}{5} \cdot \cos \angle = 16 + \frac{156}{25} + \frac{128}{5} \cos \angle + 4 -$$

$$- 2 \cdot 2 \cdot PC \cdot (2u^2 - 1)$$

$$\frac{26^2 - 16^2}{25} + 2 \left(\frac{128}{5} - \frac{208}{5} \right) - 4 + 8PC \cdot (2u^2 - 1) = 0$$

$$\angle BOC = \frac{2 \cdot 4 \cdot 26 \cdot R^2}{2}$$

$$2R^2 (1 - \cos^2 \angle)$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\alpha) A = \overline{abcd} \overline{aaaa} = a(1000 + 100 + 10 + 1)$
 $B = \overline{abcd} \overline{b,c,d} = 1$
 $C = \overline{ef} \quad e, f = 5 \quad f = 5 \Rightarrow d = 0, \text{ и } a = 5$
 $d = 5$

$ABC = k^2$

$-\cos 2\alpha = \cos(\alpha - \beta)$

$a(1111) = \frac{1111}{11} \cdot \frac{11}{101}$

$a \cdot 11 \cdot 101 = B \cdot C$

$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 = \overline{ef}$

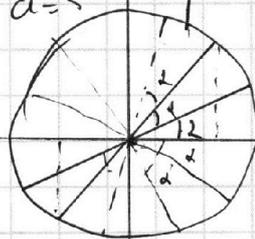
$k: 101 \quad B: 101$

$ef: 11 \quad 55$

$b = 101 \cdot 1 \Rightarrow b = 101$

$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 5 \cdot 11$

202
 303
 404
 $505 \dots 909$



v

$\alpha 2 \quad n, y$

$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1045 +$

$B = -\cos 2\alpha = \cos(\pi + \beta - \alpha)$

$k = \frac{3}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{xy}$

$\frac{x}{3} \cdot y \cdot 3$

$M = x^3 - y^3 - 3xy = ?$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{x} + \frac{1}{3y}$

$26y^3 - 27y = ?$

$\frac{3n+3y}{3ny} = \frac{3y+x}{3xy}$

$3n+3y = 3y+x$

$y(26y^2 - 27) = ?$

$2n = 6y \quad y \neq 0$

$26 \cdot 3y^2 - 27 = 0$

$n = 3y$

$26y^2 - 27 = 0$

$(3y)^3 = 27y^3$

$y^2 = \frac{27}{26}$

$y = 11 + 3n$

$2\alpha = \beta - \alpha + \pi$

$\beta - \alpha = 2\alpha + \pi$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\begin{aligned} (x^2 - 2xy + y^2)(x-y) &= \\ = x^3 - 2x^2y + xy^2 - x^2y + 2xy^2 - y^3 &= \\ = x^3 - 3x^2y &= \\ xy = xy + 3x - 3y - 9 &= \\ x - y - 3 = 0 &= \\ x - y = 3 & \Rightarrow x = y + 3 \end{aligned}$$

$$x^3 - (x-3)^3 = 9x(x-3)$$

$$x^3 - (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) = 9x^2 + 27x$$

$$9x^2 - 27x + 27 = 9x^2 + 27x \Rightarrow 27 = 54x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha - \cos^2 \alpha = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$-\cos 2\alpha = \cos(\alpha - \beta)$$

$$-\cos 2\alpha = \cos \beta$$

$$\beta = 2\alpha + \pi$$

$$\alpha x - \alpha y + 2\alpha k =$$

$$= 2\alpha x + \pi + 2\alpha y$$

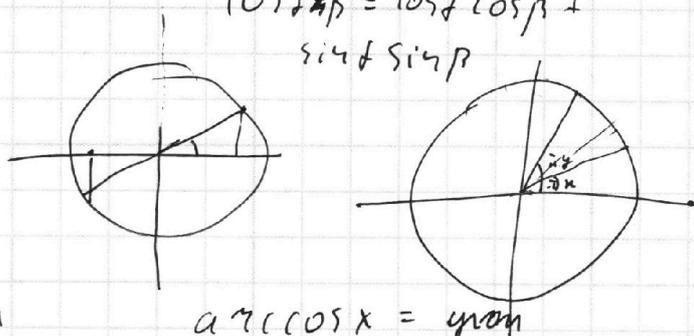
$$x - y + 2k = 2x + 1 + 2y$$

$$2k - 2y - 1 = x + y$$

$$\sin \alpha \quad x + y = 2k - 2y - 1$$

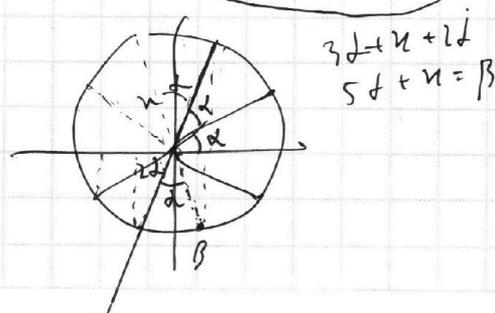
$$\cos 2\alpha = -\cos(\beta - 2\alpha)$$

$$\cos 2\alpha = -\cos(-3\alpha) \Rightarrow \beta = -2\alpha$$



$$\cos \alpha \cos \beta = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos \alpha \sin \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \cos \alpha$$



$$3\alpha + \pi + 2\alpha = 5\alpha + \pi = \beta$$