



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - цифра числа A , тогда $A = \overline{aaaa} =$
 $= 1000a + 100a + 10a + a = 1111a = 11 \cdot 101a$, $0 < a \leq 9$

$A : 101 \Rightarrow ABC : 101$, но ABC - кв.-т. н.т. числа

$\Rightarrow ABC : 101^2 \Rightarrow$ среди чисел B и C должен

быть 1 н.т. 101 , т.к. 101 - простое, $0 < a \leq 9$, т.е.

$a \nmid 101$. C - двузначное, т.е. $C \nmid 101 \Rightarrow B : 101$

и содержит цифру 2 $\Rightarrow B = 202$

$A : 11 \Rightarrow ABC : 11 \Rightarrow ABC : 11^2 \Rightarrow$ среди B и $C : 11$, т.к.

$B \nmid 11$, $0 < a \leq 9$, т.е. $a \nmid 11 \Rightarrow C = 33$, т.к. содержи-

тит цифру 3 $\Rightarrow ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 =$

$= 11^2 \cdot 101^2 \cdot 6 \cdot a \Rightarrow a : 6 \Rightarrow a = 6$

Ответ: $(6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \mid \cdot xy(x-1)(y+1) \neq 0$$

$$(y^2+y)(x-1) + (x^2-x)(y+1) + 2(x-1)(y+1) = (y^2+y)x \oplus$$

$$\oplus (x^2-x)y + 2xy$$

$$(y^2+y)x - (y^2+y) + (x^2-x)y + (x^2-x) + 2xy - 2y + 2x - 2 \ominus$$

$$\ominus (y^2+y)x + (x^2-x)y + 2xy$$

$$x^2 - x + 2x - y^2 - y - 2y - 2 = 0$$

$$x^2 + x - (y^2 + 3y + 2) = 0 - \text{кв. уравн. отн. к } x:$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(y^2 + 3y + 2)}}{2}, \quad x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(y^2 + 3y + 2)}}{2} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ посторонний, т.к. по усл. $x > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{4y^2 + 12y + 9}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{(2y+3)^2}}{2} = \frac{-1 + 2y + 3}{2} =$$

$$= y + 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = 3y^2 + 3y + 1 \oplus$$

$$\ominus 3y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

$$\text{Ответ: } M = 1$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\text{Пусть } \pi x = a, \pi y = b$$

$$\cos^2 a - \sin^2 a + \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = 0$$

$$\cos 2a + \cos(a+b) = 0$$

$$\cos 2a = -\cos(a+b) = -\cos 2a = \cos(\pi - 2a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b = \pm(\pi - 2a) + 2\pi N, N \in \mathbb{Z} \quad | : \pi$$

$$x+y = \pm(1-2x) + 2N$$

$$1. x+y = 1-2x+2N$$

$$\text{Пусть } x+y = t - \text{любое}$$

$$t = 1-2x+2N \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+2N-t}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое} \end{cases}$$

$$t = 1-2t+2y+2N \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3t-2N-1}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое} \end{cases}$$

$$2. x+y = -1+2x+2N$$

$$\text{Пусть } x+y = t - \text{любое}$$

$$t = -1+2x+2N \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t+1-2N}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое} \end{cases}$$

$$t = -1+2t-2y+2N \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{t-1+2N}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{t+1-2N}{2}; \frac{t-1+2N}{2} \right); \left(\frac{1+2N-t}{2}; \frac{3t-2N-1}{2} \right), N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть n - кол-во одинадцатиклассников,

k - кол-во билетов в конце месяца

событие A - Петя не попал на концерт, P_A - вер-ть

событие B - Васа не попал на концерт, P_B - вер-ть

P_{A_1} - вер-ть в начале, P_{A_2} - в конце, P_{B_1} - в начале, P_{B_2} - в конце

P_1 - ~~вер-ть~~ вер-ть, что оба попали на концерт в начале месяца, P_2 - вер-ть в конце

$P_{A \cap B}$ - вер-ть, что оба не попали, ~~в начале~~

$P_{A \cap B_2}$ - вер-ть, что в конце оба не попали

~~$P_{A_1} + P_{B_1} - P_{A \cap B_1}$~~ - вер-ть, что хотя кто-то не попадет $\Rightarrow$ в начале

$$\Rightarrow P_1 = 1 - (P_{A_1} + P_{B_1} - P_{A \cap B_1})$$

$$P_{A_1} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!} = P_{B_1}$$

$$P_{A \cap B_2} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4!}$$

~~$P_{A_2} = \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-k)}{k!} = P_{B_2}$~~ аналогично, $P_2 = 1 - (P_{A_2} + P_{B_2} - P_{A \cap B_2})$

$$P_{A_2} = \frac{(n-1)(n-2) \dots (n-k)}{k!} = P_{B_2}$$

$$P_{A \cap B_2} = \frac{(n-2)(n-3) \dots (n-k-1)}{k!}$$

$$2,5 P_1 = P_2$$

$$P_{A_1} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!} \leftarrow \text{кол-во благоприятных исходов}$$

$$= \frac{n-4}{n} = P_{B_1}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \leftarrow \text{кол-во всех исходов}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_{A \cap B_1} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4!}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}$$

Аналогично, $P_2 = 1 - (P_{A_2} + P_{B_2} - P_{A \cap B_2})$

$$P_{A_2} = \frac{\frac{(n-1)(n-2) \dots (n-k)}{k!}}{\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}} = \frac{n-k}{n} = P_{B_2}$$

$$P_{A \cap B_2} = \frac{\frac{(n-2)(n-3) \dots (n-k-1)}{k!}}{\frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$$

$$2,5 P_1 = P_2$$

$$2,5 \left(1 - 2 \cdot \frac{n-4}{n} + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)} \right) = 1 - 2 \cdot \frac{n-k}{n} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$$

$$2,5 \left(1 + \left(1 - \frac{4}{n} \right) \left(\frac{n-5}{n-1} - 2 \right) \right) = 1 + \left(1 - \frac{k}{n} \right) \left(\frac{n-k-1}{n-1} - 2 \right)$$

$$2,5 \left(1 + \left(1 - \frac{4}{n} \right) \left(-1 - \frac{4}{n-1} \right) \right) = 1 + \left(1 - \frac{k}{n} \right) \left(-1 - \frac{k-1}{n-1} \right)$$

$$2,5 \left(\frac{4}{n} - \frac{4}{n-1} + \frac{76}{n(n-1)} \right) = \frac{k}{n} - \frac{k}{n-1} + \frac{k^2}{k(n-1)} \quad | \cdot n(n-1)$$

$$10(n-1) \cdot \frac{4}{n} - 10n + 40 = k(n-1) - kn + k^2$$

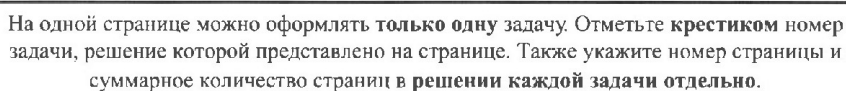
$$-10 + 40 = -k + k^2$$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

$$(k-6)(k+5) = 0$$

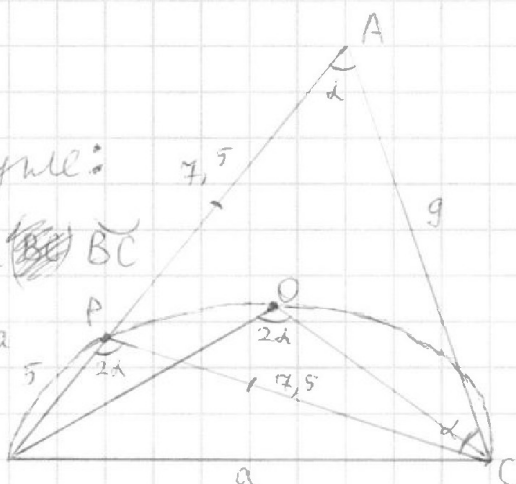
$$k = -5 < 0 - \text{посторонний} \Rightarrow k = 6$$

Ответ: ~~4~~ 6



СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \cos \alpha + \frac{27}{50} = 0$$




На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $t = \cos \alpha \in (0, 1)$, т.к. α - острый

$$t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{27}{50} = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{81}{25}}}{2}$$

$$t_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{54}{25}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{100}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{3}{10}}{2} = \frac{\frac{3}{4} \pm \frac{3}{20}}{1}$$

$$t_1 = \frac{27}{20} > 1 \Rightarrow \text{посторонний}$$

$$t_2 = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = \cos \alpha$$

По осн. триг. тождеству: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}; (\sin \alpha \neq -\frac{4}{5}, \text{ т.к. } \alpha - \text{острый})$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = 45$$

$$\text{Ответ: } S_{ABC} = 45$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 \leq 25$ - окружность с центром $(0,0)$ и радиусом 5, у которой все точки внутри и на границе удовл. Нерав-ву

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

Пусть $3\sqrt{2} \sin \alpha = a$, $3\sqrt{2} \cos \alpha = b$

$$(x - a)(y - b) \leq 0$$

Если $y \geq b$, то $x \leq a$
Если $y \leq b$, то $x \geq a$ $\Rightarrow$ все точки, у которых $x \leq a$ и $y \geq b$ или $x \geq a$ и $y \leq b$ удовл. нерав-ву (см. схем. рис.1) $\Rightarrow$ удовл. системе

точки, принадлежащие пересечению (см. схем. рис.2)

$$\Rightarrow M = AB + CD + \overset{\sim}{AC} + \overset{\sim}{BD}$$

$\angle APC = 90^\circ$, по ф-ле угла между хордами

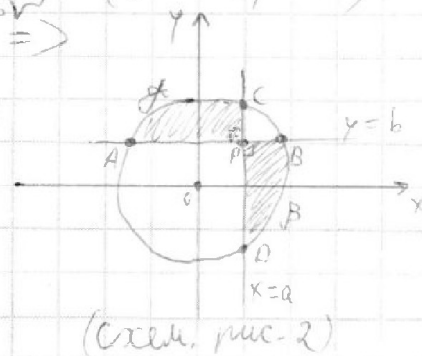
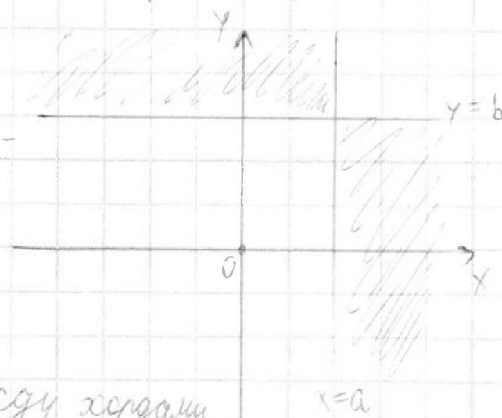
$$\angle APC = \frac{\tilde{A} + \tilde{B}}{2} = 90^\circ, \text{ где } \tilde{A} - \text{уг. мера } \overset{\sim}{AC}, \text{ (схем. рис. 1)}$$

$$\tilde{B} - \text{уг. мера } \overset{\sim}{BD} \Rightarrow \tilde{A} + \tilde{B} = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overset{\sim}{AC} + \overset{\sim}{BD} = (\tilde{A} + \tilde{B}) R_{\text{окр}} = (\tilde{A} + \tilde{B}) \cdot 5 = 5\pi$$

$$\Rightarrow M = AB + CD + 5\pi$$

Пусть $AB = x$, $CD = y$



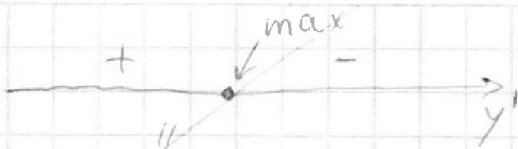


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



для $a_1 = 3$: $a = 0$:

$$\Rightarrow a_3 = 0$$

$$\sqrt{28+4a^2} = \sqrt{100-4a^2} \Rightarrow 8a^2 = 72, a^2 = 9, a_{1,2} = \pm 3$$

Проверяем, что это max:



для $a_1 = 3$: $a = 2$: $\sqrt{28+4a^2} < \sqrt{100-4a^2}$

$$M' = 4a \left(\frac{1}{\sqrt{28+4a^2}} - \frac{1}{\sqrt{100-4a^2}} \right) > 0$$

$a = 4$: $\sqrt{28+4a^2} > \sqrt{100-4a^2}$

$$M' = 4a \left(\frac{1}{\sqrt{28+4a^2}} - \frac{1}{\sqrt{100-4a^2}} \right) < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1 = 3$ - максимум (см. схем. рис. 3)

для $a_3 = 0$: $a = 2$: $M' > 0 \Rightarrow$ точно не максимум,

т.к. $2 > 0$ и $M' > 0$, а должно быть $M' < 0$ (см. схем. рис. 3)

для $a_2 = -3$: $a = -1$: $\sqrt{28+4a^2} < \sqrt{100-4a^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M' = 4a \left(\frac{1}{\sqrt{28+4a^2}} - \frac{1}{\sqrt{100-4a^2}} \right) < 0, \text{ т.к. } a < 0$$

$a = -4$: $\sqrt{28+4a^2} > \sqrt{100-4a^2} \Rightarrow M' = 4a \left(\frac{1}{\sqrt{28+4a^2}} - \frac{1}{\sqrt{100-4a^2}} \right) > 0$

$\Rightarrow$ при $a_2 = -3$ - максимум (см. схем. рис. 3)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow a_1 = 3$$

$$a_2 = -3$$

$$1. a_1 = 3: a = 3\sqrt{2} \sin \alpha = 3$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi N, N \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi N, N \in \mathbb{Z}$$

$$2. a_2 = -3: a = 3\sqrt{2} \sin \alpha = -3$$

$$\sin \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_3 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi N, N \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_4 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi N, N \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi N}{2}, N \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi N}{2}, N \in \mathbb{Z}$

$$M = \sqrt{28 + 4 \cdot 9} + \sqrt{100 - 4 \cdot 9} + 5\pi = 16 + 5\pi$$

$$\text{Ответ: } M = 16 + 5\pi, \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi N}{2}, N \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

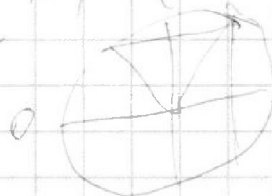
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1111a = 11 \cdot 101a \quad x+y = \pm(1-2x) + 2N$$

$$B \quad ABC = 2^2$$

$$B = \begin{cases} \sqrt{2} \\ \sqrt{2b} \end{cases}$$



$$B = 202 \quad a+b = \pm(\pi-2a) + 2\pi N \quad \cos a = -\cos(\pi-a)$$

$$ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 202 \cdot C = 101^2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot a \cdot C$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$\begin{matrix} x \downarrow 1 \\ y \uparrow 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} C: 11 & a=6 \\ 33 & a=2 \\ & a=8 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad \cdot xy(x-1)(y+1)$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$\begin{aligned} & (y^2+y)(x-1) + (x^2-x)(y+1) + \\ & + 2(x-1)(y+1) = (y^2+y)x + \end{aligned}$$

$$\pi y = b$$

$$\pi x = a$$

$$\cos(a+b) = -\cos 2a$$

$$\cos(\pi-2a)$$

$$\begin{aligned} x^2 - x + 2xy - 2y + 2x - 2 &= \\ &= y^2 + y - 2xy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - x + 2(x-1)(y+1) &= y^2 + y + \\ &+ 2xy \end{aligned}$$

$$x^2 + x - 2 = y^2 + 3y$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4+4y^2+12y}}{2}$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$2y+3-2$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8+4y^2+12y}}{2} = \frac{9+4y^2+12y}{2}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 a - \cos^2 a + \sin a \cdot \sin b - \cos a \cdot \cos b = 0$$

$$0 = \cos 2a + \cos(a+b)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ **1**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - цифра числа A , тогда ~~$A = \overline{aaaa}$~~ $A = \overline{aaaa} =$
 $= 1000a + 100a + 10a + a = 1111a = 11 \cdot 101 \cdot a, a \leq 9$

Поскольку ABC - кв-т. число и $A : 101 \Rightarrow$
 $\Rightarrow ABC : 101^2 \Rightarrow$ среди чисел B и C должен быть
 ещё 1 мн-ль 101 , но C - двузначное $\Rightarrow B : 101$,
 при этом B содержит цифру 2 $\Rightarrow B = 202$.

$A : 11, 0 < a \leq 9, \text{ т.е. } a \nmid 11 \Rightarrow$

$$x + y = \pm(1 - 2x) + 2N$$

$$1. \quad x + y = 1 - 2x + 2N$$

$$y = 1 - 3x + 2N = 1 + 2N - 3x + 3y$$

$$x + y = t$$

$$t = 1 - 2x + 2N$$

$$2N - t = 1 - 3x$$

~~$x = t - y$~~

$$x = \frac{1 + 2N - t}{2} = 1$$

$$x = t - y$$

$$1 -$$

$$P_1 =$$

$$2y = 3t - 2N - 1$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3t - 2N - 1}{2}$$

$$n$$

$$k > 4$$

$$P_1 = P_2, 2.5P_1 = P_2$$

~~P_1~~

$$P_1 = P_{\text{не выд. 1}} + P_{\text{не выд. 2}} - P_{\text{не выд. 1, 2}}$$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4!}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

Пусть $\pi x = a$, $\pi y = b$

$$\cos^2 a + \cos a \cdot \cos b - \sin^2 a - \sin a \cdot \sin b = 0$$

$$\cos 2a + \cos(a+b) = 0$$

$$\cos(a+b) = -\cos 2a = \cos(\pi - 2a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b = \pm(\pi - 2a) + 2\pi N, N \in \mathbb{Z}$$

$$\pi(x+y) = \pm\pi(1-2x) + 2\pi N \mid : \pi$$

$$x+y = \pm(1-2x) + 2N$$

$$1. x+y = 1-2x+2N$$

Пусть $x+y = t$ - любое

$$t = 1-2x+2N \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+2N-t}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое} \end{cases}$$

$$t = 1-2t+2y+2N \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3t-2N-1}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое} \end{cases}$$

$$2. x+y = -1+2x+2N$$

Пусть $x+y = t$ - любое

$$t = -1+2x+2N \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t+1-2N}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое} \end{cases}$$

$$t = -1+2t-2y+2N \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{t-1+2N}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое} \end{cases}$$

~~$$\alpha \in [\cos a, \cos b] \Rightarrow \alpha \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$$~~

~~$$\beta = \alpha \in \pi \mid \cos(\beta)$$~~

~~$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta)$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1 + \left(1 - \frac{4}{n}\right) \left(\frac{n-5}{n-1} - 2\right) = \frac{1}{n} - \frac{4}{n-1} + \frac{16}{n(n-1)}$$

$$28 + 36 = 64$$

$$-2,5 + \frac{10}{n} - \frac{10}{n-1} + \frac{40}{n(n-1)} =$$

$$16 \cdot 2,5 = 40$$

$$= -1 + \frac{n}{n} - \frac{n}{n-1} + \frac{n^2}{n(n-1)}$$

$$\sqrt{28+4a^2} + \sqrt{100-4a^2}$$

$$AP = 7,5$$

$$BP = 5$$

$$AC = 9$$

$$a^2 = 25 + \frac{225}{4} - 2 \cdot \frac{15}{2} \cdot 5 \cdot \cos 2\alpha$$

$$a^2 = \frac{625}{4} + 81 - 2 \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cos 2\alpha$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{27}{50} = \frac{54}{25} - \frac{108}{25} = -\frac{54}{25}$$

$$a^2 + b^2 = 18$$

$$b^2 = 18 - a^2 = \frac{225 - 216}{100} = \frac{9}{100}$$

$$a^2 = \pm 3$$

$$\frac{x^2}{100} = 1 - \frac{b^2}{25}$$

$$x^2 = 100 - 4b^2$$

$$C^2 + d^2 = 728$$

$$C^2 + d^2 \rightarrow \max 8$$

$$\sqrt{28+4a^2}$$

$$90^\circ = \alpha + \beta$$

$$28 + 4a^2 = 100 - 4a^2$$

$$\beta + \gamma + \delta = 360^\circ \Rightarrow \alpha + \beta =$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{x}{5} = \frac{10}{5} = 2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{25}}$$

$$\sin \alpha = \sin 2\varphi = 2 \cdot \frac{b}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{25}}$$

$$\sin \varphi = \frac{16}{5}$$

$$\alpha = 180 - 2\varphi$$

$$\sin \alpha = \sin 2\varphi = 2 \cdot \frac{b}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{b^2}{25}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

