



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - цифра числа A , тогда $A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a = 11 \cdot 101a$, $0 \leq a \leq 9$

$A : 101 \Rightarrow ABC : 101$, но ABC - кв-т нац. числа

$\Rightarrow ABC : 101^2 \Rightarrow$ среди чисел B и C должен

быть 1 или 101, т.к. 101 - простое, $0 \leq a \leq 9$, т.е.

$a \nmid 101$. C - двузначное, т.е. $C \nmid 101 \Rightarrow C : 101$

и содержит цифру 2 $\Rightarrow C = 202$

$A : 11 \Rightarrow ABC : 11 \Rightarrow ABC : 11^2 \Rightarrow$ среди B и C : 11, т.к.

$B \nmid 11$, $0 \leq a \leq 9$, т.е. $a \nmid 11 \Rightarrow C = 33$, т.к. содержит

одинаковую цифру 3 $\Rightarrow ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 =$

$= 11^3 \cdot 101^2 \cdot 6 \cdot a \Rightarrow a : 6 \Rightarrow a = 6$

Ответ: $(666; 202; 33)$

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3

4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \mid : xy(y-1)(y+1) \neq 0$$

$$(y^2+y)(x-1) + (x^2-x)(y+1) + 2(x-1)(y+1) = (y^2+y)x \quad (1)$$

$$\textcircled{+} (x^2-x)y + 2xy$$

$$(y^2+y)x - (y^2+y) + (x^2-x)y + (x^2-x) + 2xy - 2y + 2x - 2 \quad (2)$$

$$\textcircled{-} (y^2+y)x + (x^2-x)y + 2xy$$

$$x^2 - x + 2x - y^2 - y - 2y - 2 = 0$$

$$x^2 + x - (y^2 + 3y + 2) = 0 - \text{КВ - не л. с. отн. } x :$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(y^2 + 3y + 2)}}{2}, \quad x_1 = \frac{-1 - \sqrt{1 + 4(y^2 + 3y + 2)}}{2} < 0 \Rightarrow$$

\Rightarrow нестороживший, т.к. по усл. $x > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{4y^2 + 12y + 9}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{(2y+3)^2}}{2} = \frac{-1 + 2y + 3}{2} =$$

$$= y + 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = 3y^2 + 3y + 1 \quad (3)$$

$$\textcircled{3} y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

решение: $M = 1$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

Пусть $\pi x = a, \pi y = b$

$$\cos^2 a - \sin^2 a + \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = 0$$

$$\cos 2a + \cos(a+b) = 0$$

$$\cos 2a = -\cos(a+b) = -\cos 2a = \cos(\pi - 2a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b = \pm(\pi - 2a) + 2\pi N, N \in \mathbb{Z} \quad | : \pi$$

$$x+y = \pm(1-2x) + 2N$$

$$1. \quad x+y = 1-2x+2N$$

Пусть $x+y = t$ - модуль

$$t = 1-2x+2N \Rightarrow x = \frac{1+2N-t}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{модуль}$$

$$t = 1-2t+2y+2N \Rightarrow y = \frac{3t-2N-1}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{модуль}$$

$$2. \quad x+y = -1+2x+2N$$

Пусть $x+y = t$ - модуль

$$t = -1+2x+2N \Rightarrow x = \frac{t+1-2N}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{модуль}$$

$$t = -1+2t+2y+2N \Rightarrow y = \frac{t-1+2N}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{модуль}$$

$$\text{Одн. } \left(\frac{t+1-2N}{2}; \frac{t-1+2N}{2} \right), \left(\frac{1+2N-t}{2}; \frac{3t-2N-1}{2} \right), N \in \mathbb{Z}, t - \text{модуль}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть n - кол-во одногодчиков класса, k - кол-во бывших в кружке юмористов

событие A - Петя не попал на концерт, P_A - вероятность

событие B - Вася не попал на концерт, P_B - вероятность

P_{A_1} - вероятность в начале, P_{A_2} - в конце, P_{B_1} - в начале, P_{B_2} - в конце

P_1 - вероятность вероятность, что оба попали на концерт в начале юмористов, P_2 - вероятность в конце

$P_{A \cap B}$ - вероятность, что оба не попали, ~~в начале~~ в начале

$P_{A \cap B}$ - вероятность, что в конце оба не попали ~~в начале~~

~~$P_A + P_B = P_{A \cap B}$~~ - вероятность, что хотя кто-то не пойдет \Rightarrow

$$\Rightarrow P_1 = 1 - (P_{A_1} + P_{B_1} - P_{A \cap B_1})$$

~~$P_{A_1} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!} = P_{B_1}$~~

~~$P_{A \cap B_1} = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4!}$~~

~~$P_2 = 1 - (P_{A_2} + P_{B_2} - P_{A \cap B_2})$~~

~~$P_{A_2} = \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!} = P_{B_2}$~~

~~$P_{A \cap B_2} = \frac{(n-2)(n-3)\dots(n-k-1)}{k!}$~~

~~$2,5 P_1 = P_2$~~

$$P_{A_1} = \frac{\frac{1}{4!}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = \frac{n-4}{n} = P_{B_1}$$

кол-во бывших

исходов

кол-во всех исходов

I-

I-



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P_{A \cap B_1} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4!}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{9!}} = \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)}$$

Аналогично, $P_2 = 1 - (P_{A_2} + P_{B_2} - P_{A \cap B_2})$

$$P_{A_2} = \frac{\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{k!}}{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}} = \frac{n-k}{n} = P_{B_2}$$

$$\frac{P_{A \cap B_2}}{P_{A \cap B_1}} = \frac{\frac{(n-2)(n-3)\dots(n-k-1)}{k!}}{\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$$

$$2,5 f_1 = f_2$$

$$2,5 \left(1 - 2 \cdot \frac{n-4}{n} + \frac{(n-4)(n-5)}{n(n-1)} \right) = 1 - 2 \cdot \frac{n-k}{n} + \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$$

$$2,5 \left(1 + \left(1 - \frac{4}{n} \right) \left(\frac{n-5}{n-1} - 2 \right) \right) = 1 + \left(1 - \frac{k}{n} \right) \left(\frac{n-k-1}{n-1} - 2 \right)$$

$$2,5 \left(1 + \left(1 - \frac{4}{n} \right) \left(-1 - \frac{4}{n-1} \right) \right) = 1 + \left(1 - \frac{k}{n} \right) \left(-1 - \frac{k^2}{n-1} \right)$$

$$2,5 \left(\frac{4}{n} - \frac{4}{n-1} + \frac{16}{n(n-1)} \right) = \frac{k}{n} - \frac{k}{n-1} + \frac{k^2}{n(n-1)} | \cdot n(n-1)$$

$$10(n-1) = 10n + 40 = k(n-1) - kn + k^2$$

$$-10 + 40 = -k + k^2$$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

$$(k-6)(k+5)=0$$

$$k = -5 < 0 - \text{посторонний} \Rightarrow k = 6$$

Ответ: ~~6~~ 6

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$

тогда $\angle BOC = 2\alpha$

По теореме о центр. и внешн. угле:

$\angle BAC$ - внешн. $\triangle ABC$ и опир. на \overline{BC}

$\angle BOC$ - центр. $\triangle ABC$ и опир. на \overline{BC}

$\Rightarrow \angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$

$\triangle BOC$: $\angle BPC = \angle BOC$ как внешн. $\triangle BOC$ и опир. на \overline{BC}

$\Rightarrow \angle BPC = 2\alpha$ - внешний угол $\triangle APC$ $\Rightarrow \angle APC =$

$\Rightarrow \angle BPC = \angle PAC + \angle PCA \Rightarrow \angle PCA = 2\alpha - \alpha = \alpha = \angle PAC$

$\Rightarrow \triangle PAC$ - р/сн. $\angle ACP = 90^\circ$ $\Rightarrow PC = AP = 7,5$

Пом. косинусов:

$$\text{для } \triangle BPC: a^2 = 25 + \frac{225}{4} - 2 \cdot \frac{15}{2} \cdot 5 \cdot \cos 2\alpha$$

$$\text{для } \triangle ABC: a^2 = \frac{625}{4} + 81 - 2 \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \cos \alpha$$

$$25 + \frac{225}{4} - 75 \cos 2\alpha = 81 + \frac{625}{4} - 225 \cos \alpha$$

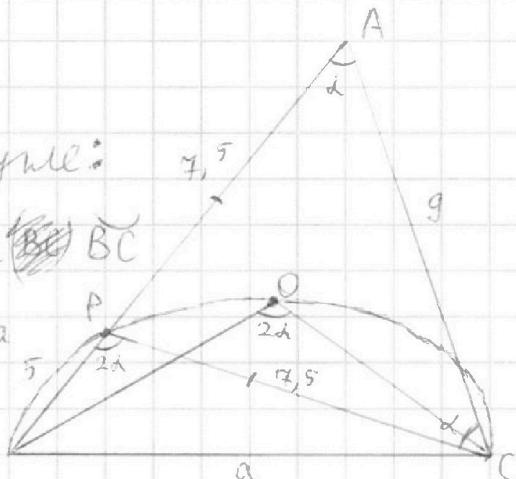
$$75 \cos 2\alpha + 100 + 56 - 225 \cos \alpha = 0$$

$$75(2 \cos^2 \alpha - 1) + 156 - 225 \cos \alpha = 0$$

$$150 \cos^2 \alpha - 225 \cos \alpha + 81 = 0 \mid : 3$$

$$50 \cos^2 \alpha - 75 \cos \alpha + 27 = 0 \mid : 50$$

$$\cos^2 \alpha - \frac{3}{2} \cos \alpha + \frac{27}{50} = 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

если $t = \cos \alpha \in (-\infty, 1] \subset (0, 1)$, т.к. α - острый

$$t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{27}{50} = 0$$

$$\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{81}{50}}$$

$$t_{1,2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{54}{25}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{100}}}{2} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{3}{10}}{2} = \frac{3}{4} \pm \frac{3}{20}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{21}{20} > 1 \Rightarrow \text{посторонний}$$

$$t_2 = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = \cos \alpha$$

По осн. триг. можем вы: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \quad (\sin \alpha \neq -\frac{4}{5}, \text{т.к. } \alpha \text{ - острый})$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = 45$$

Ответ: $S_{ABC} = 45$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 \leq 25$ - окружность, у которой все точки внутри и на границе удовл. нерав- бы

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

Пусть $3\sqrt{2} \sin \alpha = a$, $3\sqrt{2} \cos \alpha = b$

$$(x - a)(y - b) \leq 0$$

Если $y \geq b$, то $x \leq a$

Если $y \leq b$, то $x \geq a$ \Rightarrow все точки, у которых $x \leq a$ и

$y \geq b$ или $x \geq a$ и $y \leq b$ удовл. нерав- бы (см. схем.

рис.1) \Rightarrow удовл. система

точки, принадлежащие пере-

сечению (см. схем. рис.2)

$$\Rightarrow M = AB + CD + \overarc{AC} + \overarc{BD}$$

$\angle APC = 90^\circ$, но $\angle P$ -дл. угол между хордами

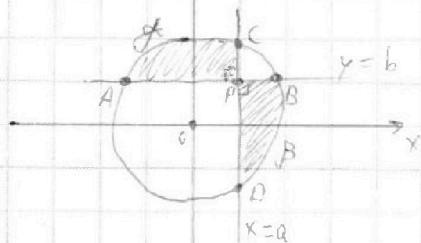
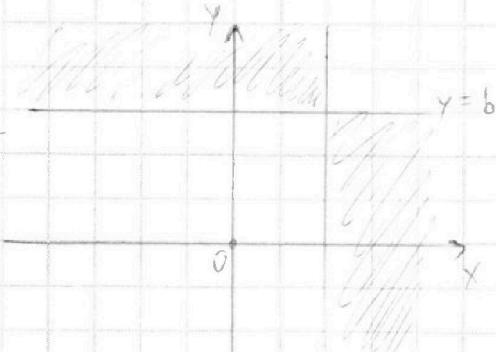
$\angle APC = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ$, где α - град. мера \overarc{AC} , β - град. мера \overarc{BD} (см. рис. 1)

β - град. мера $\overarc{BD} \Rightarrow \alpha + \beta = 180^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overarc{AC} + \overarc{BD} = (\alpha + \beta)R_{окр} = (\alpha + \beta) \cdot 5 = 5\pi$$

$$\Rightarrow M = AB + CD + 5\pi$$

Пусть $AB = x$, $CD = y$



(см. рис. 2)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = x + y + 5\pi \rightarrow \max$$

Пусть $\angle AOK = \alpha$.

$OK = b$, OK -диаметр \Rightarrow

\Rightarrow опустим высоту из т. О на

AB , $OK = b$, OK -диаметр, $OK \perp AB \Rightarrow$ по сб-вз

хорд и диаметров $AK = KB = \frac{x}{2}$

Пусть $\angle AOK = \alpha$. $\cos \alpha = \frac{b}{5}$, $\sin \alpha = \frac{\frac{x}{2}}{5} = \frac{x}{10}$

По осн. триг. в

то в. Пирамида $BAKO$: $\frac{x^2}{4} + b^2 = 25 \cdot 4$

$$x = \sqrt{100 - 4b^2}$$

аналогично, $y = \sqrt{100 - 4a^2}$

$$M = \sqrt{100 - 4b^2} + \sqrt{100 - 4a^2} + 5\pi \rightarrow \max$$

Заметим, что $a^2 = 18 \sin^2 \alpha$, $b^2 = 18 \cos^2 \alpha$ и по

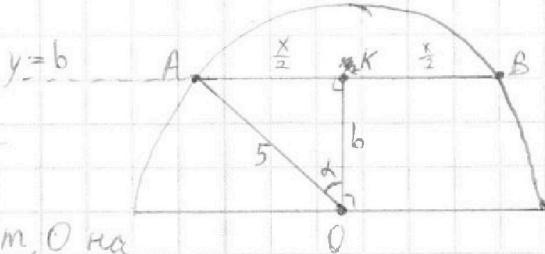
осн. триг. можем сказать $a^2 + b^2 = 18 \Rightarrow b^2 = 18 - a^2$

$$M = \sqrt{28 + 4a^2} + \sqrt{100 - 4a^2} + 5\pi \rightarrow \max \text{ по } a$$

$$M' = \frac{8a}{2\sqrt{28+4a^2}} - \frac{8a}{2\sqrt{100-4a^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{28+4a^2} = \sqrt{100-4a^2}$$

$$\Rightarrow 8a^2 = 72 \Rightarrow a^2 = 9, a = \pm 3$$

Проверим, что это максимум:



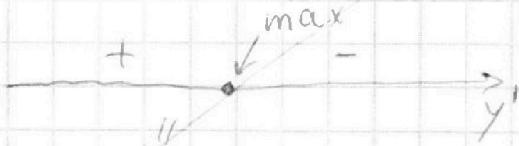
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\text{дан } a_1 = 3; a = 2;$$

$$\Rightarrow a_3 = 0$$

$$-\sqrt{28+4a^2} = \sqrt{100-4a^2} \Rightarrow 8a^2 = 72, a^2 = 9, a_{1,2} = \pm 3$$

Проверим, что это max:



$$\text{дан } a_1 = 3; a = 2; \sqrt{28+4a^2} < \sqrt{100-4a^2}$$

$$M' = 4a \left(\frac{1}{\sqrt{28+4a^2}} - \frac{1}{\sqrt{100-4a^2}} \right) > 0$$

$$a = 4; \sqrt{28+4a^2} > \sqrt{100-4a^2}$$

$$\text{при } M' = 4a \left(\frac{1}{\sqrt{28+4a^2}} - \frac{1}{\sqrt{100-4a^2}} \right) < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1 = 3$ - максимум (см. схем. рис. 3)

дан $a_3 = 0; a = 2; M' > 0 \Rightarrow$ не максимум,

м.р. $2 > 0$ и $M' > 0$, а должно быть $M' < 0$ (см. схем. рис. 3)

$$\text{дан } a_2 = -3; a = -1; \sqrt{28+4a^2} < \sqrt{100-4a^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M' = 4a \left(\frac{1}{\sqrt{28+4a^2}} - \frac{1}{\sqrt{100-4a^2}} \right) < 0, \text{м.р. } a < 0$$

$$a = -4; \sqrt{28+4a^2} > \sqrt{100-4a^2} \Rightarrow M' = 4a \left(\frac{1}{\sqrt{28+4a^2}} - \frac{1}{\sqrt{100-4a^2}} \right) < 0$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{100-4a^2}} \right) > 0, \text{м.р. } a < 0 \Rightarrow \text{при } a_2 = -3 \text{ - максимум (см. схем. рис. 3)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ЧИЗ Ч

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\Rightarrow \alpha_1 = 3$$

$$\alpha_2 = -3$$

$$1. \alpha_1 = 3 : a = 3\sqrt{2} \sin \alpha = 3$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi N, N \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_2 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi N, N \in \mathbb{Z}$$

$$2. \alpha_2 = -3 : a = 3\sqrt{2} \sin \alpha = -3$$

$$\sin \alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha_3 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi N, N \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha_4 = \frac{5\pi}{4} + 2\pi N, N \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi N}{2}, N \in \mathbb{Z}$$

Onkleni zvazek

$$M = \sqrt{28+4 \cdot 9} + \sqrt{100-4 \cdot 9} + 5\pi = 16 + 5\pi$$

$$\text{Объем: } M = 16 + 5\pi, \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi N}{2}, N \in \mathbb{Z}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



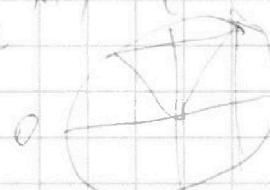
- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 1111a = 11 \cdot 101a \quad x+y = \pm(1-2x) + 2N$$

$$B \quad ABC = z^2 \quad B = \sqrt{b^2 - 2^2}$$



$$B = 202 \quad a+b = \pm(\pi-2a) + 2\pi N \quad \cos a = -\cos(\pi-a)$$

$$ABC = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 20 \cdot 2 \cdot C = 101^2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot a \cdot C$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$\frac{x+y}{xy}$$

$$C: 11 \quad \begin{cases} a=6 \\ a=2 \\ a=8 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad | \cdot xy(x-1)(y+1)$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy \quad (y^2 + y)(x-1) + (y^2 - x)(y+1) +$$

$$\pi y = b \quad + 2(x-1)(y+1) = (y^2 + y)x +$$

$$\pi x = a \quad \cos(a+b) = -\cos 2a + (x^2 - x)y + 2xy$$

$$x^2 - x + 2xy - 2y + 2x - 2 = \frac{\cos(\pi-2a)}{x^2 - x} + 2(x-1)(y+1) = y^2 + y +$$

$$= y^2 + y - 2xy + 2xy$$

$$x^2 + x - 2 = y^2 + 3y$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4+4y^2+12y}}{2} \quad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8+4y^2+12y}}{2} = \frac{9+4y^2+12y}{2}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 a - \cos^2 a + \sin a \cdot \sin b - \cos a \cdot \cos b = 0$$

$$0 = \cos 2a + \cos(a+b)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть a - цифра числа A , тогда ~~$A = \overline{aaaa} =$~~

$$= 1000a + 100a + 10a + a = 1111a = 11 \cdot 101 \cdot a, a \leq 9$$

Так как ABC - кв-м наим. числа и $A \geq 101 \Rightarrow$

$\Rightarrow ABC : 101^2 \Rightarrow$ среди чисел B и C должно быть
м.к. $a \neq 0, a \leq 101$

число 1 или -101, но C - двузначное $\Rightarrow B : 101$,

тогда при этом B содержит цифру 2 $\Rightarrow B = 202$.

$$A : 11, 0 < a \leq 9, \text{ m.e. } a \neq 11 \Rightarrow$$

$$x+y = \pm (1-2x) + 2N$$

$$\text{1. } x+y = 1-2x+2N$$

$$y = 1-3x+2N = 1+2N-3x+3y$$

$$x+y = t \quad t = 1-2x+2N \quad 2N-t = \cancel{1-2x}$$

~~$x = \frac{1+2N-t}{2} = \cancel{\frac{1+2N-t}{2}}$~~

$$x = t-y \quad 1-t \quad P_7 =$$

$$2y = 3t - 2N - 1$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{3t-2N-1}{2}$$

$$\begin{matrix} n \\ K \geq 4 \end{matrix}$$

$$\frac{P_7}{25} = P_2 \quad 2.5P_7 = P_2$$

$$P_7 = \frac{1}{n!} (\text{Pre вид 1} + \text{Pre вид 2} - \text{Pre вид 1,2})$$

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4!}$$

$$\frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{4!}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

Пусть $\pi x = a, \pi y = b$

$$\cos^2 a + \cos a \cdot \cos b - \sin^2 a - \sin a \cdot \sin b = 0$$

$$\cos 2a + \cos(a+b) = 0$$

$$\cos(a+b) = -\cos 2a = \cos(\pi - 2a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b = \pm(\pi - 2a) + 2\pi N, N \in \mathbb{Z}$$

$$\pi(x+y) = \pm \pi(1-2x) + 2\pi N \mid 3\pi$$

$$x+y = \pm(1-2x) + 2N$$

$$1. x+y = 1-2x+2N$$

Пусть $x+y = t$ - любое

$$t = 1-2x+2N \Rightarrow x = \frac{1+2N-t}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое}$$

$$t = 1-2t+2y+2N \Rightarrow y = \frac{3t-2N-1}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое}$$

$$2. x+y = -1+2x+2N$$

Пусть $x+y = t$ - любое

$$t = -1+2x+2N \Rightarrow x = \frac{t+1-2N}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое}$$

$$t = -1+2t-2y+2N \Rightarrow y = \frac{t-1+2N}{2}, N \in \mathbb{Z}, t - \text{любое}$$

~~если $\alpha < \pi$ то $\cos \alpha > 0$~~

$$\cos x \cos y + \sin x \sin y \geq 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

The image shows a page with various mathematical sketches and calculations. At the top left, there is a diagram of a cylinder with radius $\frac{\pi}{4}$ and height $n-1$. Next to it is a complex fraction equation involving $n-1$ and n , which simplifies to $-2 + \frac{10}{n} - \frac{10}{n-1} + \frac{40}{n(n-1)}$. To the right of this is another fraction $\frac{28+36}{n-1} = \frac{64}{8}$.

In the center, there is a diagram of a triangle with vertices labeled A, B, and C. The base AB has length a , and the angle at vertex C is 90° . The distance from vertex C to the base AB is labeled b . The hypotenuse AC is labeled c . Below the triangle, there is a diagram of a cylinder with radius $\frac{\pi}{4}$ and height $n-1$.

On the right side, there is a diagram of a triangle with sides a , b , and c . The angle at vertex C is 90° . The distance from vertex C to the hypotenuse AB is labeled d . The area of the triangle is given as $\frac{1}{2}ab$.

Below the triangle, there is a diagram of a cylinder with radius $\frac{\pi}{4}$ and height $n-1$.

At the bottom left, there is a diagram of a cylinder with radius $\frac{\pi}{4}$ and height $n-1$. The radius is labeled $\frac{\pi}{4}$ and the height is labeled $n-1$.

At the bottom right, there is a diagram of a triangle with sides a , b , and c . The angle at vertex C is 90° . The distance from vertex C to the hypotenuse AB is labeled d . The area of the triangle is given as $\frac{1}{2}ab$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!