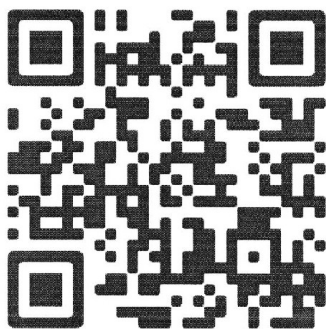
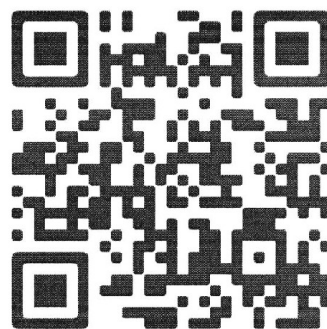




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

① $A, b, C \in \mathbb{N}$ $A \cdot b \cdot C$ — квадрат $\mathbb{N}$ числа,
т.е. $A = \overline{xxxx} = x \cdot 1111 = x \cdot 11 \cdot 101$,
($x \in \mathbb{N}; x \leq 9$)

a, C — вкл. гугу числом

$x \cdot 11 \cdot 101 \cdot b \cdot C = n^2 \Rightarrow b : 101$, иначе 101 входит в нечетное степени

$\rightarrow$ трёхзнач. число

$b : 101$ и содержит в десятичной записи число 7 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ очевидно, что $b = 707$, по другому все три условия выполняются не могут

$$\Rightarrow A \cdot b \cdot C = x \cdot \overbrace{11}^{x \leq 9} \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot C = n^2$$

$\hookrightarrow x \leq 9 \Rightarrow$ чтобы 11 входило в чет степени, $C : 11$

$C : 11$, содержит 1 и вкл. гугу числом $\Rightarrow C = 11$

$$\Rightarrow A \cdot b \cdot C = x \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 = n^2 \quad \text{т.к. } x \in \mathbb{N} \text{ и } x \leq 9, \text{ то}$$

тогда получим полный кв-т $x = 7$

$$\Rightarrow A = 7777$$

$$b = 707$$

$$C = 11$$

Ответ: (7777; 707; 11)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) \quad x, y > 0 \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow x \neq 4 \text{ по ОДЗ}$$

$$\frac{-4}{x(x-4)} + \frac{4}{y(y+4)} + \frac{3(4x-4y-16)}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \quad | \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{-y^2-4y+x^2-4x+3x-3y-12}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \Rightarrow \text{с учетом ОДЗ:}$$

$$x^2 - y^2 - x - 7y - 12 = 0$$

$$(x+y+3)(x-y-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -x-3 \rightarrow \text{не угод. ОДЗ, т.к. при } x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y > 0 \Rightarrow x-4 > 0 \Rightarrow x > 4$$

$$M = x^3 - y^3 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = (x-(x-4))(x^2 + x(x-4) + (x-4)^2) - 12x(x-4) = 4(3x^2 - 12x + 16) - 12x^2 + 48x = 64$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \text{ а) } (x; y) \in \mathbb{Z} \quad (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y &= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y \\ \sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y &= \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y \\ \cos 2\pi y + \cos \pi(x-y) &= 0 \\ 2 \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(3y-x)}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi(3y-x)}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{\pi(3y-x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 2k+1 \\ 3y-x = 2m+1 \end{cases}$$

при $k, m \in \mathbb{Z}$ $2k+1$ и $2m+1$ - любое нечетное число
 обозначим его как a

$\Rightarrow$ решим ур-я будут являться пары чисел:

Отв: $(x; a-x)$ или $(x; \frac{a+x}{3})$, где x - любое вещественное число,
 a - любое нечетное целое число

$$\textcircled{б) } (x; y) \in \mathbb{Z} \quad \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Опр. } \begin{cases} \frac{x}{7} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{4} \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow \text{при таких } x \text{ и } y:$$

$$x = \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$$

$$y = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$$

$$\arcsin \frac{y}{4} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} + \frac{\pi}{2} = \arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$$

так как $\arccos a \in [0; \pi]$, то это непер-во неравенство системы

$$\begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases} \quad (\arccos 1 = 0) \Rightarrow \text{пара } (7; 4) \text{ не удовлетворяет непер-ву}$$

решим ур-я из а) явл. парами ~~$(x; a-x)$~~ пар, явл. р-ем систем ~~$\begin{cases} x+y=a \\ 3y-x=a \end{cases}$~~ $\begin{cases} x+y=a \\ 3y-x=a \end{cases}$ (а-нечет, нец.)

в результате данных операций нечет число можно получить, только если x и y имеют разную чет-ности. (3 на четное не делит) $\Rightarrow$ пар нет (Неч.; чет) при данных

опр. будет 40 (исключая $(7; 4)$: 39), $(\text{чет}; \text{неч})$: 28 $\Rightarrow$ всего 67

Отв: 67 пар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(4) Пусть 11-классников x , а билетов выдано y ($y \leq x$)
 $\Rightarrow$ вероятность того, что 2 конкретных 11-кл. пойдут на концерт вместе составляет $\frac{y}{x} \cdot \frac{y-1}{x-1}$
выполняет, что билет достанется первому, или первому достанется второму

$\Rightarrow$ 1) если в конце месяца билетов (y) было выдано не больше, чем 11-кл. (x)
 $11 \cdot \frac{y-1}{x-1} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$ т.к. 11-кл ≥ 2 , упростим на $x(x-1)$

$$\Rightarrow 11 \cdot 4 \cdot 3 = y^2 - y \Rightarrow y^2 - y - 132 = 0 \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 12 \\ -11 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{не др. укл.}$$

2) если $y \geq x$: $11 \cdot \frac{4-1}{x(x-1)} = 1 \Rightarrow x(x-1) = 11 \cdot 4 \cdot 3$
 $\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 12 \\ -11 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{не др. укл.}$

Ответ: если 11-кл. было 12, то билетов в конце месяца было выдано ≥ 12
если 11-кл. было < 12 , то эта ситуация невозможна
если 11-кл. > 12 , то было выдано 12 билетов



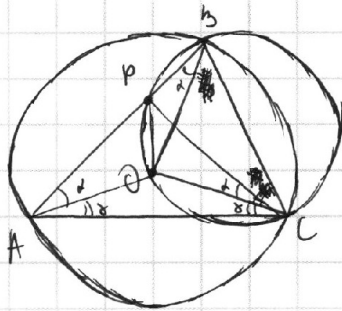
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

5



Дано: $\triangle ABC$ - остроуг; $\omega_1(O; R)$ - описана около $\triangle ABC$; ω_2 - опис. около $\triangle BPC$; $\omega_2 \cap AB = \{P\}$
 $AP = 16$; $BP = 8$; $AC = 22$

Найти: S_{ABC}

Решение:

1) $AO = OB = OC = R$ (св-во опис. окр-ти) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AOB$ и $\triangle AOC$ - равнобедренные

$\Rightarrow$ по св-ву р-б $\triangle$ $\angle BAO = \angle OBA = \alpha$

$\angle OBC = \angle OCB = \beta$
 $\angle OAC = \angle OCA = \gamma$

2) 4-уг BOP - вписан в ω_2 по усл. $\Rightarrow$ по св-ву вписанного

4-уг: $\angle PBO = \angle PCO = \alpha \Rightarrow \angle PCO = \angle PAO = \alpha$ (н. 1)

$\angle OAC = \angle OCA = \gamma$ (н. 1)

$\Rightarrow \angle PAC = \angle PCA = \alpha + \gamma$

$\Rightarrow \triangle PAC$ - р-б (по трем уг.) $\Rightarrow AP = PC = 16$

3) $\triangle APC$, т. кос: $PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos \angle PAC$ (н. 1-2)

$$16^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \angle PAC$$

$$2 \cdot 16 \cdot \cos \angle PAC = 22$$

$$\cos \angle PAC = \frac{11}{16} \Rightarrow \text{т.к. это острый угол}$$

$$\text{по усл. } \sin \angle PAC = \sqrt{1 - \frac{11^2}{16^2}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$4) S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 24 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{2} \text{ см}^2$$

$$\text{Ответ: } \frac{99\sqrt{15}}{2} \text{ см}^2$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

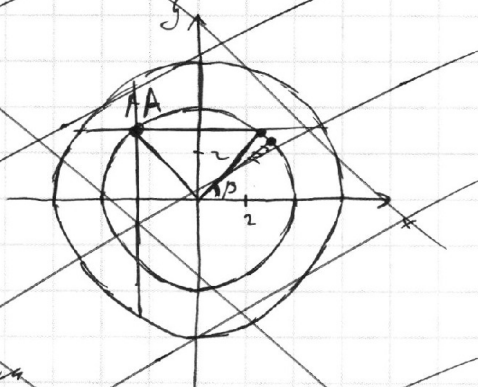
СТРАНИЦА
1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6) $\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$ Пусть $\beta = \frac{3\pi}{2} + \alpha \Rightarrow$ система ~~равносильна~~

$\begin{cases} (x - 4 \cos \beta)(y - 4 \sin \beta) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$

$\hookrightarrow$ графиком явл. круг
с центром $(0;0)$ и $R=6$



При данном β $(-4 \cos \beta; 4 \sin \beta)$

лежит на окружности с центром $(0;0)$ и $R=4$, касаясь ~~прямой~~ ~~касаясь~~

$\Rightarrow (-4 \cos \beta; 4 \sin \beta)$ симметрична ей отн. Oy $\Rightarrow$ это $(-1)A$
Касаясь ~~прямой~~ $x = -4 \cos \beta$ и $y = 4 \sin \beta$, отн. ~~прямой~~ Ox
 $(-1)A$ и 4 -но осей координат

6) $\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$ Пусть $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha \Rightarrow$

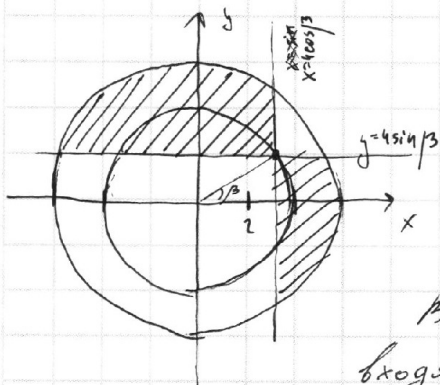
$\Rightarrow$ система ~~равносильна~~

$\begin{cases} (x - 4 \cos \beta)(y - 4 \sin \beta) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases} \rightarrow$ графиком явл.

круг с центром $(0;0)$ и $R=6$

$(4 \cos \beta; 4 \sin \beta)$ соответствует
точке на окружности с центром

$(0;0)$ и $R=4$, прямые $x = 4 \cos \beta$ и $y = 4 \sin \beta$ проходят
через неё 11 -но осей координат

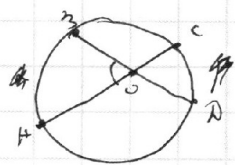


~~$(x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0$~~ $(x - 4 \cos \beta)(y - 4 \sin \beta) \leq 0$ если

$\begin{cases} x \geq 4 \cos \beta \\ y \leq 4 \sin \beta \\ x \leq 4 \cos \beta \\ y \geq 4 \sin \beta \end{cases}$

пересечение совокупности
с $x^2 + y^2 \leq 36$ показано
на графике
штриховкой

В периметр заштрихованной фигуры
входят хорды большой окружности и части её
дуг



Из геометрии: $\angle AOB = \angle COD = \frac{1}{2}(\angle AOB + \angle COD)$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle AOB$ угол между хордами 90° , то сумма
дуг $= 180^\circ \Rightarrow$ это ровно половина окружности при
любом $\beta \Rightarrow$ периметр зависит от хорд.

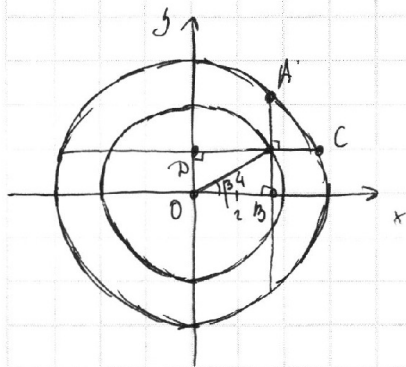


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



сумма длин хорд равна $2(AB + AC)$, так как хорда, перпендикулярная диаметру (оси координат), делится им пополам

$$OA^2 = OC^2 = 36 \text{ (из ур-я окружности)}$$

$$OA^2 = OB^2 + AB^2 \text{ (гипотенуза)}$$

$$OC^2 = OD^2 + CD^2 \text{ (гипотенуза)}$$

$$OB^2 = (4 \cos \beta)^2; OD^2 = (4 \sin \beta)^2$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{36 - (4 \cos \beta)^2} = 2\sqrt{9 - 4 \cos^2 \beta} = 2\sqrt{5 + 4 \sin^2 \beta}$$

$$AC = \sqrt{36 - (4 \sin \beta)^2} = 2\sqrt{9 - 4 \sin^2 \beta} = 2\sqrt{5 + 4 \cos^2 \beta}$$

$$\Rightarrow f(\beta) = AB + AC = 2\sqrt{5 + 4 \sin^2 \beta} + 2\sqrt{5 + 4 \cos^2 \beta}$$

$$\Rightarrow f'(\beta) = \frac{2}{2\sqrt{5 + 4 \sin^2 \beta}} \cdot 8 \sin \beta \cdot \cos \beta - \frac{2}{2\sqrt{5 + 4 \cos^2 \beta}} \cdot 8 \cos \beta \cdot \sin \beta$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{\sin 2\beta}{\sqrt{5 + 4 \sin^2 \beta}} - \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{5 + 4 \cos^2 \beta}} \right) = 0 \quad \begin{pmatrix} 5 + 4 \sin^2 \beta > 0 \\ 5 + 4 \cos^2 \beta > 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sin 2\beta = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{5 + 4 \sin^2 \beta}} - \frac{1}{\sqrt{5 + 4 \cos^2 \beta}} = 0$$

$$1) \sin 2\beta = 0 \Rightarrow 2\beta = \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \beta = \frac{\pi k}{2}$$

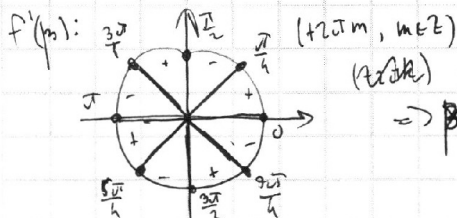
~~при $\beta = 0$ и $\beta = \pi$ хорды вырождаются в отрезки диаметра, поэтому не рассматриваем~~

$$2) \sqrt{5 + 4 \sin^2 \beta} = \sqrt{5 + 4 \cos^2 \beta}$$

$$4 \sin^2 \beta = 4 \cos^2 \beta \Rightarrow 4 \cos^2 \beta = 0$$

$$2\beta = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$



$$\Rightarrow \beta_{\max} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\sin 2\beta = 0 \Rightarrow$ максимальная длина хорд при $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Решено методом интервалов

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5 + 4 \cdot \frac{1}{2}} = 4\sqrt{7} \Rightarrow 2(AB + AC) = 8\sqrt{7}$$

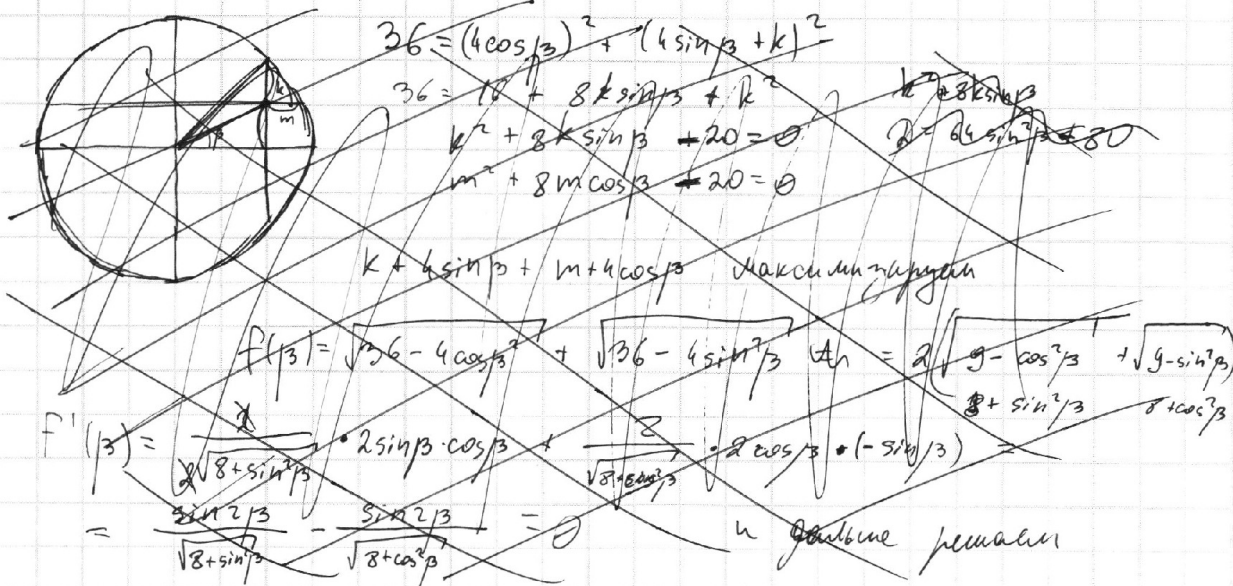


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Ответ: $M = 8\sqrt{7} + 6\pi$
 $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} \quad (m \in \mathbb{Z})$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



① A: $\overline{xxxx}$
 $b: \overline{777} / \overline{777} / \overline{777}$
 $c: \overline{77} / \overline{77} / \overline{77}$

$0 \leq x, y, z, t \leq 9$
 $= x \cdot 1111 = 11 \cdot x \cdot 101$
 $\Rightarrow$ должно быть 1 $b \Rightarrow b = \overline{707} \Rightarrow b = 707$

$A \cdot b = 11 \cdot x \cdot 101 \cdot 101 \cdot 7$
 $c: 11 \Rightarrow c = 11$

$A \cdot b \cdot c = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot x$
 $\Rightarrow x = 7$

$(7777, 707; 11)$

② $x, y > 0$ $k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$
 $M = x^2 - y^2 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy$
 $\text{знак } M = ?$

$\frac{-4}{x(x-4)} + \frac{4}{y(y+4)} + \frac{12(x-y)-48}{xy(x-4)(y+4)} = 0$

$\frac{-1}{x(x-4)} + \frac{1}{y(y+4)} + \frac{3(x-y)-12}{xy(x-4)(y+4)} = 0$

$\frac{x^2 - 4x - y^2 - 4y + 3x - 3y - 12}{xy(x-4)(y+4)} = 0$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\frac{-4}{x(x-4)} + \frac{4}{y(y+4)} + \frac{3(x-y-11)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$

$\frac{-1}{x(x-4)} + \frac{1}{y(y+4)} + \frac{3(x-y-4)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$

$x^2 - 4x - y^2 - 4y + 3x - 3y - 12 = 0$

$x^2 - x - y^2 - 7y - 12 = 0$

$(x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - (y + \frac{7}{2})^2 + 12\frac{1}{4} - 12 = 0$

$(x - \frac{1}{2})^2 - (y + \frac{7}{2})^2 = 4$

$(x + y + 1)(x - y - 2) = 10$

$x^2 - 4x - y^2 - 4y + 3x - 3y - 12 = 0$

$(x + y + 3)(x - y - 4) = 0$

$\Rightarrow x + y = -x - 3 \rightarrow x, y, ym. x, y > 0$
 $y = x - 4$

$x^2 - y^2 - 12xy = x(x^2 - 12y)$
 $x - y(y^2 + 6x)$

$x^2 - x - y^2 - 7y - 12 = 0$

$(x-4)(y+4) = xy + 4x - 4y - 16$

$x^2 - 4x - y^2 - 4y + 3x - 3y - 12 = 0$
 $= x^2 - y^2 - x - 7y - 12$

$7 = 2 \cdot \frac{7}{2} \quad (\frac{7}{2})^2 = \frac{49}{4} = 12\frac{1}{4}$

$z = 2 \cdot \frac{7}{2}$

$y = x - 4 \Rightarrow x > 4$

$x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) =$
 $= 4(x^2 + x(x-4) + (x-4)^2) - 12(x^2 - 4x) =$
 $= 12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + 48x = 64$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

③ $(x, y) \in \mathbb{R}$ $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$

$$\sin d - \sin p = 2 \cos \frac{d+p}{2} \cdot \sin \frac{d-p}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12}$$

$$\cos d + \cos p = 2 \cos \frac{d+p}{2} \cdot \cos \frac{d-p}{2}$$

$$\cos d + \cos p = 2 \cos \frac{d+p}{2} \cdot \cos \frac{d-p}{2}$$

$$\frac{\frac{\pi}{6}}{2} + \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$d = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$p = \frac{\pi}{6} \Rightarrow 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \pi y = x \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \pi y$$

$$\sin d \cdot \sin p = \frac{1}{2} (\cos(d-p) - \cos(d+p))$$

$$\cos d \cdot \cos p = \frac{1}{2} (\cos(d-p) + \cos(d+p))$$

$$d = \frac{\pi(y-x)}{2} \quad d+p = \frac{\pi(y-x)}{2} + \frac{\pi y^2}{2}$$

$$p = \pi y \quad = \frac{\pi y - \pi x + 2\pi y}{2} = \frac{\pi(3y-x)}{2}$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} (\sin \cos(d-p) - \cos(d+p) - \cos(d-p) - \cos(d+p)) = 0$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(3y-x)}{2} = 0$$

$$11 \cdot 12 = 132$$

$$\frac{\pi}{2}(x+y) = \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \left| \quad \frac{\pi}{2}(3y-x) = \pi k \right.$$

$$x+y = 2k \quad \left| \quad 3y-x = 2k \right.$$

$$x=1, y=-1 \quad 0 = -1 \cdot (-1+1)$$

$$y=12$$

$$11 \cdot \frac{4 \cdot 3}{x^2} = \frac{y(y-1)}{x^2}$$

и-то пошло не так...

④ x — очки, y — билетов, вероятность попасть на концерт 2-м олимпиадником:

$$\frac{C_{y-2}^{x-2}}{C_x^y} = \frac{(x-2)!}{(y-2)! \cdot (x-y)!} \cdot \frac{y! \cdot (x-y)!}{x!} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow 11 \cdot \frac{4 \cdot 3}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow y(y-1) = 11 \cdot 12 \Rightarrow y=12$$

$$y=12$$

$$x \geq 12$$

$$x \neq 12 \Rightarrow \text{нет}$$

$$x=12 \Rightarrow y=12$$

* если билетов > ?

тогда куп-ть 1

$$S_{ABC} = ?$$

$$AP = 16$$

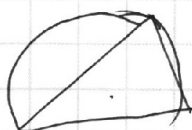
$$BP = 8$$

$$AC = 22$$

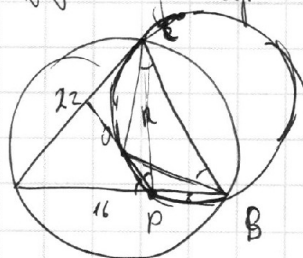
$$AB = 24$$

пути иная
 по-другому

⑤



$$16 \cdot 24 = 22 \cdot 22 \cdot (22+x)$$



#



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin^2 y - \sin^2 x) \sin^2 y = (\cos^2 y + \cos^2 x) \cdot \cos^2 y$$

$$\sin^2 y - \sin^2 x \cdot \sin^2 y = \cos^2 y + \cos^2 y \cdot \cos^2 x$$

$$\sin^2 y - \cos^2 y + \frac{1}{2} (\cos(2y) - \cos(2x)) = \frac{1}{2} (\cos(2y) + \cos(2x)) + \cos(2y) + \cos(2x) = 0$$

$$\sin^2 y - \cos^2 y - \frac{1}{2} (\cos(2y) - \cos(2x)) = 0$$

$$-\cos(2y) - \cos(2x) = 0$$

$$\cos(2y) + \cos(2x) = 0$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(3y-x)}{2} = 0$$

$$\frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \beta = \frac{\pi}{2} + d$$

$$\begin{cases} x+y = 1+2k \\ 3y-x = 1+2k \end{cases} \rightarrow \text{кр. число}$$

$$(x,y) \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \beta = -\sin d$$

$$\sin \beta = \cos d$$

$$\arccos \frac{y}{7} - \arcsin \frac{y}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

арккос

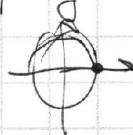
$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0 \quad (x-4\cos \beta)(y-4\sin \beta)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{7} \neq 1$$

$$\frac{y}{4} \neq 1$$

$$\begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

$$\arccos d = 0$$



х и у разное и т.д.

$$3 \cdot 2 - 2$$

$$3 \cdot 3 - 3$$

$$\frac{1}{2} - 2 + \pi$$

$$3y - x = a$$

$$(x + 4\sin d)(y - 4\cos d) \leq 0$$

ограничения и уравнения

два уравнения

$$\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OC} \Rightarrow \frac{AO \cdot k}{OD} = \frac{BO \cdot k}{OC}$$

$$\Rightarrow AO + OC + BO + OD = (AO + BO)(k+1)$$

$$BO + AC \rightarrow \max$$

$$2 \cdot \sqrt{5 + 4 \cdot \frac{1}{2}} = 2\sqrt{7} \Rightarrow 4\sqrt{7}$$

$$m = 4 \cdot \sin \beta$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\cos d \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(d-\beta) + \cos(d+\beta))$$

$$\sin d \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(d-\beta) - \cos(d+\beta))$$

$$\cos d + \cos \beta = 2 \cos \frac{d+\beta}{2} \cdot \cos \frac{d-\beta}{2}$$

$$\frac{2\pi y + \pi(x-y)}{2} = \frac{\pi(x+y)}{2}$$

$$\frac{2\pi y - \pi(x-y)}{2} = \frac{3\pi y - x}{2}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2} = -\sin \frac{\pi}{6}$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$(1; 0)$$

$$0 = (-1+1) \cdot 1 = 0$$

$$\arcsin \in (0; \pi)$$

$$\arcsin \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{x}{7} \in [-1; 1]$$

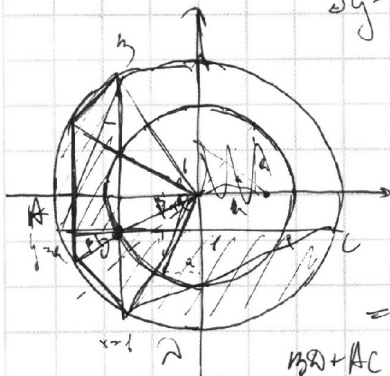
$$\frac{y}{4} \in [-1; 1]$$

$$\begin{matrix} -2, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7 \\ -4, -2, 0, 2, 4 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (8; 5) \Rightarrow 40 - 1 = 39$$

$$(7; 4) \Rightarrow 28$$

$$3y + 28 = 5y + 8 = 67 //$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$f(x+y) = \frac{1}{\sqrt{20+4\sin^2\beta}} \cdot 82\sin\beta \cdot \cos\beta$
 $\Rightarrow \frac{-32\sin\beta \cdot \cos\beta}{\sqrt{20+4\cos^2\beta}} = 0$
 $\Rightarrow \sin 2\beta = 0$
 $\Rightarrow 2\beta = \pi + 2k$
 $\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} + k$

$AP = 16$
 $16 \cdot 24 = 22 \cdot (22 - x)$
 $\Rightarrow x = \frac{256}{22} = \frac{128}{11}$

$BP = -8$
 $AP = PC$
 $\Rightarrow$ максимум $\angle A$ по т. кос

$AC = 22$
 $\Rightarrow$ максимум $\angle A$ по т. кос

$S_{ABC} = ?$

$16^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \alpha$
 $22 = 2 \cdot 16 \cdot \cos \alpha$
 $\cos \alpha = \frac{11}{16}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{256 - 121}}{16} = \frac{\sqrt{135}}{16}$
 $\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{33 \cdot \sqrt{135}}{2}$

$22 \cdot 24 = 2 \cdot 11 \cdot 8 \cdot 3 = 16 \cdot 11 \cdot 3$

$135 = 9 \cdot 15$

6) $\Phi(d) \begin{cases} (x+4\sin d)(y-4\cos d) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$

$xy - 4x\cos d + 4y\sin d - 16\sin d \cdot \cos d \leq 0$

$\begin{cases} x+4\sin d \leq 0 \\ y-4\cos d \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -4\sin d \\ y \geq 4\cos d \end{cases}$

$\begin{cases} x+4 \leq 0 \\ y-4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq -4 \\ y \geq 4 \end{cases}$

$A \cdot \cos^2 \beta + (4\sin \beta + k)^2 = 36$

$\sin(\frac{3\pi}{2} + d) = -\cos d$
 $\cos(\frac{3\pi}{2} + k) = \sin d$

$\Rightarrow$ хотим брать такие значения x и y

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x = 4 \cdot \cos \beta \\ y = \sqrt{20 + 16\sin^2 \beta} \end{cases}$