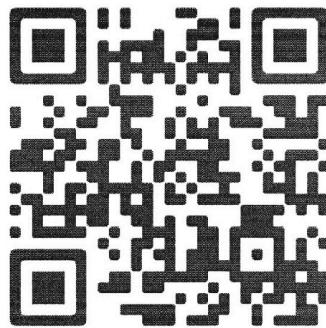


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(1) $A, B, C \in \mathbb{N}$ $A \cdot B \cdot C -$ квадрат \mathbb{N} числа, при этом $A = \overline{\underset{(x \in \mathbb{N}; x \leq 9)}{xxx}} = x \cdot 111 = x \cdot 11 \cdot 101$,

а C является двузначным числом

$$x \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = n^2 \Rightarrow B : 101, \text{ иначе } 101 \text{ входил в кв. степень}$$

трехзначное число

B $: 101$ и содержит в десятичной записи число $7 \Rightarrow$

\Rightarrow очевидно, что $B = 707$, но другому все три условия выполнены не могут

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = x \cdot \underbrace{11 \cdot 101 \cdot 7 \cdot 101 \cdot C}_{x \leq 9} = n^2 \Rightarrow 11 \text{ входило в кв. степень, } C : 11$$

$C : 11$, содержит 1 в арифметической записи $\Rightarrow C = 11$

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C = x \cdot 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 = n^2 \quad \text{т.е. } x \in \mathbb{N} \text{ и } x \leq 9, \text{ то}$$

здесь получился лишний квадрат $x=7$

$$\Rightarrow A = 7777$$

$$B = 707$$

$$C = 11$$

Ответ: $(7777; 707; 11)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(2) \quad x, y > 0 \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow x+4 \text{ no OA3}$$

$$\frac{-4}{x(x-4)} + \frac{4}{y(y+4)} + \frac{3(4x-4y-16)}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \quad | \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{-y^2-4y+x^2-4x+3x-3y-12}{xy(x-4)(y+4)} = 0 \Rightarrow \text{с учётом OA3:}$$

$$x^2 - y^2 - x^2 - 7y - 12 = 0$$

$$(x+y+3)(x-y-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = -x-3 \rightarrow \text{не yg. OA3, т.к. при } x>0 \\ y = x-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y > 0 \Rightarrow x-4 > 0 \Rightarrow x > 4$$

$$M = x^2 - y^2 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = (x-1)(x+4)(x^2 + x - 12) + (x-4)^2 = 12x(x-4) = 4(3x^2 - 12x + 16) - 12x^2 + 48x = 64$$

Ответ: 64

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$(3) \text{ a) } (x; y) \in \mathbb{R} \quad (\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\cos 2\pi y + \cos \pi(x-y) = 0$$

$$2 \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(3y-x)}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi(x+y)}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi(3y-x)}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\pi(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{\pi(3y-x)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m \quad (m \in \mathbb{Z}) \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 2k+1 \\ 3y-x = 2m+1 \end{cases}$$

при $k, m \in \mathbb{Z}$ $2k+1$ и $2m+1$ - любое чётное нечётное число

обозначим это как α

\Rightarrow решением ур-я будут являться пары чисел:

Общ: $(x; a-x)$ или $(x; \frac{a+x}{3})$, где x - любое нечетное число, a - любое чётное чётное число

$$5) (x; y) \in \mathbb{Z} \quad \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Одн. } \begin{cases} \frac{x}{7} \in [-1; 1] \\ \frac{y}{4} \in [-1; 1] \end{cases} \Rightarrow \text{при чётных } x \text{ и } y : \quad \begin{aligned} x &= \{-7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; \\ &\quad 2; 3; 4; 5; 6; 7\} \\ y &= \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\} \end{aligned}$$

$$\arcsin \frac{y}{4} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} + \frac{\pi}{2} = \arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{4} > 0$$

так как $\arccos a \in [0; \pi]$, то это первое равенство

составлено

$$\begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases} \quad (\arccos 1 = 0) \quad \Rightarrow \text{пара } (7; 4) \text{ не удовлетворяет первому}$$

решением ур-я из а) является система $\begin{cases} x+y=a \\ 3y-x=a \end{cases}$ пары, для решения

$$\begin{cases} x+y=a \\ 3y-x=a \end{cases} \quad (a \text{-число, кнр.})$$

решите систему

можно получить, только если x и y были разной четности. (3 на четность не делится \Rightarrow пара кнр. $(\text{нкнр.}; \text{кнр.})$ при данных

одн. будет 40 (исключая $(7; 4)$: 39), $(\text{кнр.}; \text{нкнр.})$: 28 \Rightarrow кнр. 67

Общ: 67 пар.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(4) Нүсөс 11-тиклассиков x , а билетов бүрчелено y \Rightarrow
 \Rightarrow һөргөлтөө тогто, то 2 конкретных 11-ки. номадут на концерт
вместе составляет $\frac{y}{x} \cdot \frac{y-1}{x-1}$
беролжного, то достань 1-рол, если первому достань
это билет достань
первый

\Rightarrow 1) если 1-рол месяца билетов (y) бүрчелено не байвши,
гэхм 11-ки. (x)
 $11 \cdot \frac{y \cdot 3}{x \cdot (x-1)} = \frac{y(y-1)}{x \cdot (x-1)}$ т.н. 11-ки ≥ 2 , делимит на
 $x(x-1)$

$\Rightarrow 11 \cdot 4 \cdot 3 = y^2 - y$
 $y^2 - y - 132 = 0 \Rightarrow y = \begin{cases} 12 \\ -11 \end{cases} \Rightarrow$ и үз. да.

2) если $y > x$: $11 \cdot \frac{y \cdot 3}{x \cdot (x-1)} = 1 \Rightarrow x(x-1) = 11 \cdot 4 \cdot 3$
 $\Rightarrow x = \begin{cases} 12 \\ -11 \end{cases} \Rightarrow$ и үз. да.

Одерт: если 11-ки. бүрчло 12, то билетов 1-рол месяца
бүрчелено ≥ 12
если 11-ки. бүрчло < 12 , то энэ салгачаа шийжүүлжнаа
если 11-ки. > 12 , то бүрчло бүрчелено 12 билетов



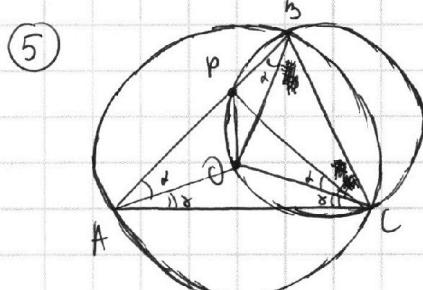
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



(5)

Дано: $\triangle ABC$ - остроугл.; $w_1(0; R)$ - описано около $\triangle ABC$; $w_2 \not\in$ окр. $\triangle ABC$; $w_2 \cap AB = \{P\}$
 $AP = 16$; $BP = 8$; $AC = 22$

Найти: S_{w_2}

Решение:

1) $AO = OB = OC = R$ (ч-ко окр-ти) \Rightarrow

$\Rightarrow \triangle OAB$ и $\triangle OAC$ - равнобедренные

\Rightarrow по ч-ко ртб $\angle BAO = \angle OAB$ $\angle OCA = \angle OAC$

~~∠OAB = ∠OCA~~

$\angle OAC = \angle OCA = \gamma$

2) 4-ын ВСОП - вписан в w_2 по усл. \Rightarrow по ч-ко вписанного

4-ын: $\angle PBO = \angle PCO = \alpha \Rightarrow \angle PCO = \angle PBO = \alpha$ (н. л.) $| \Rightarrow \angle PAC = \angle PCA = \alpha$

$\Rightarrow \triangle PAC$ - ртб (по улгл.) $\Rightarrow AP = PC = 16$

3) $\triangle APC$, т. cos: $PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos \angle BAC$ (н. 1-2)

$$16^2 = 16^2 + 22^2 - 2 \cdot 16 \cdot 22 \cdot \cos \angle BAC$$

$$2 \cdot 16 \cdot \cos \angle BAC = 22$$

$$\cos \angle BAC = \frac{11}{16} \Rightarrow \text{т.к. это острый угол по усл. } \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \frac{11^2}{16^2}} = \frac{3\sqrt{15}}{16}$$

$$4) S_{w_2} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot \overline{AB} \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 24 \cdot \frac{3\sqrt{15}}{16} = \frac{99\sqrt{15}}{2} \text{ см}^2$$

Ответ: $\frac{99\sqrt{15}}{2} \text{ см}^2$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

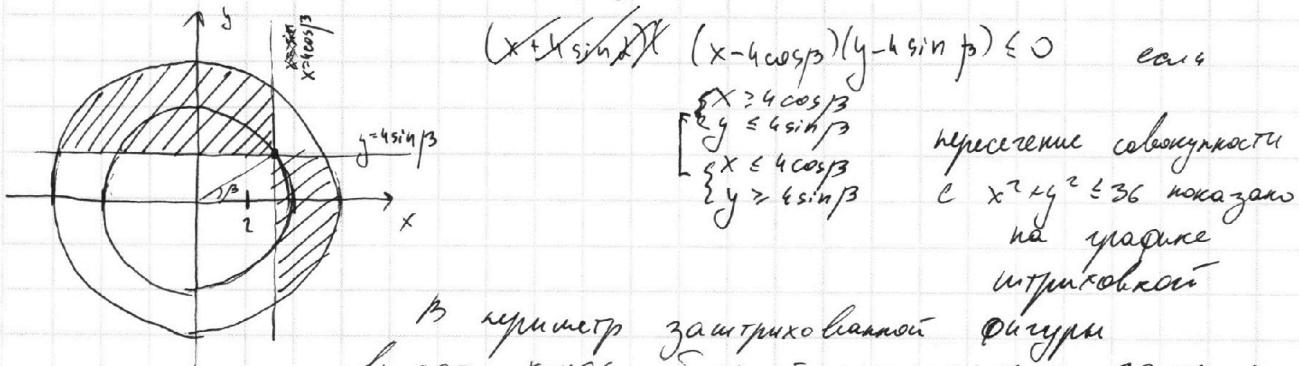
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \text{Задача } 6: \begin{cases} (x + 4 \sin \beta)(y - 4 \cos \beta) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases} \quad \text{т.ч. } \beta = \frac{3\pi}{2} + \alpha \Rightarrow \text{система равносильна} \\ & \begin{cases} (x + 4 \cos \beta)(y - 4 \sin \beta) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases} \quad \text{графиком это круг с центром } (0;0) \text{ и } R=6 \\ & \text{При данном } \beta \text{ т.к. } (4 \cos \beta; 4 \sin \beta) \text{ лежит на окружности с центром } (0;0) \text{ и } R=4, \text{ то сим. прямая } x = 4 \cos \beta \text{ и } y = 4 \sin \beta \text{ проходит через } A \text{ и } B \text{ по оси } x \text{ и } y. \end{aligned}$$

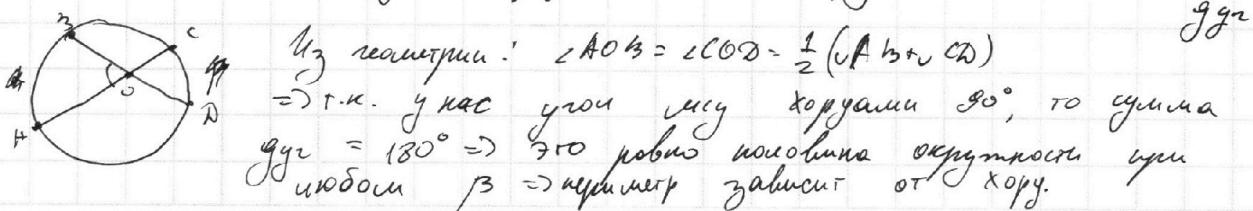
$$\begin{aligned} & \text{Задача } 6: \begin{cases} (x + 4 \sin \beta)(y - 4 \cos \beta) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases} \quad \text{т.ч. } \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha \Rightarrow \\ & \Rightarrow \text{система равносильна } \begin{cases} (x - 4 \cos \beta)(y - 4 \sin \beta) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases} \rightarrow \text{графиком это круг с центром } (0;0) \text{ и } R=6 \\ & (4 \cos \beta; 4 \sin \beta) \text{ соответствует точке на окружности с центром } (0;0) \text{ и } R=4, \text{ прямые } x = 4 \cos \beta \text{ и } y = 4 \sin \beta \text{ проходят через неё по осям координат} \end{aligned}$$



$$(x + 4 \sin \beta)(y - 4 \cos \beta) \leq 0 \quad \text{если}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \cos \beta \\ y \leq 4 \sin \beta \\ x \leq 4 \cos \beta \\ y \geq 4 \sin \beta \end{cases} \quad \text{пересечение симметрии с } x^2 + y^2 \leq 36 \text{ показано на графике штрихованной}$$

В периметр заштрихованной фигуры входят корды большей окружности и части её



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Diagram of a circle with center O and radius OA = 6. A point A is on the circle in the first quadrant. A line segment AB is drawn from A to the x-axis at point B. A second circle with center O' and radius OB is drawn such that it intersects the original circle at point C. The angle between the radii OB and OC is β . The distance between the centers O and O' is 4. The distance between points A and C is denoted as $f(\beta)$.

Сумма длии хорд равна $2(AB + CA)$, т.к.
как длина, 1-яная диагональ (осевы коорд.).
делилась или пополам

$$OA^2 = OC^2 = 36 \quad (\text{из ур-я окр-ти})$$

$$OA^2 = OB^2 + AB^2$$

$$OC^2 = OB^2 + OD^2 \quad (\text{ч. \pi ур})$$

$$OB^2 = (4 \cos \beta)^2; OD^2 = (4 \sin \beta)^2$$

$$\Rightarrow OB = \sqrt{36 - (4 \cos \beta)^2} = \sqrt{36 - 16 \cos^2 \beta} = 2\sqrt{9 - 4 \cos^2 \beta} = 2\sqrt{5 + 4 \sin^2 \beta}$$

$$OD = \sqrt{36 - (4 \sin \beta)^2} = \sqrt{36 - 16 \sin^2 \beta} = 2\sqrt{9 - 4 \sin^2 \beta} = 2\sqrt{5 + 4 \cos^2 \beta}$$

$$\Rightarrow f(\beta) = AB + CA = 2\sqrt{5 + 4 \sin^2 \beta} + 2\sqrt{5 + 4 \cos^2 \beta}$$

$$\Rightarrow f'(\beta) = \frac{2}{2\sqrt{5 + 4 \sin^2 \beta}} \cdot 8 \sin \beta \cdot \cos \beta - \frac{2}{2\sqrt{5 + 4 \cos^2 \beta}} \cdot 8 \cos \beta \cdot \sin \beta$$

$$= 4 \cdot \left(\frac{\sin 2\beta}{\sqrt{5 + 4 \sin^2 \beta}} - \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{5 + 4 \cos^2 \beta}} \right) = 0 \quad \begin{cases} 5 + 4 \sin^2 \beta > 0 \\ 5 + 4 \cos^2 \beta > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin 2\beta = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{5 + 4 \sin^2 \beta}} - \frac{1}{\sqrt{5 + 4 \cos^2 \beta}} = 0$$

$$1) \sin 2\beta = 0 \Rightarrow 2\beta = \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \beta = \frac{\pi k}{2}$$

$$2) \sqrt{5 + 4 \sin^2 \beta} = \sqrt{5 + 4 \cos^2 \beta}$$

$$4 \sin^2 \beta = 4 \cos^2 \beta \Rightarrow 4 \cos 2\beta = 0$$

$$2\beta = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$$

$f'(\beta)$:

$\Rightarrow \beta_{\max} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\sin(\beta_{\max}) \Rightarrow$ максимальная
длина хорды при $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5 + 4 \cdot \frac{1}{2}} = 4\sqrt{7} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(AB + CA) = 8\sqrt{7}$

(использован методом интегрирования)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$36 = (4 \cos \beta)^2 + ((\sin \beta + k)^2 -$$

$$36 = 16 + 8k \sin \beta + k^2$$

$$k^2 + 8k \sin \beta + 20 = 0$$

$$m^2 + 8m \cos \beta - 20 = 0$$

$$k + \sin \beta + m + 4 \cos \beta \text{ максимум}$$

$$f(\beta) = \sqrt{36 - 4 \cos^2 \beta} + \sqrt{36 - 4 \sin^2 \beta} \text{ для } \beta = 2\sqrt{g - \cos^2 \beta} + \sqrt{g - \sin^2 \beta}$$

$$f'(\beta) = \frac{8 \sin \beta}{\sqrt{8 + \sin^2 \beta}} + \frac{8 \cos \beta}{\sqrt{8 + \cos^2 \beta}} = 0$$

$$\sin \beta = -\cos \beta \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4}$$

и дальше решаем

$$\Rightarrow \text{Максимальный периметр } M = \text{хорда} + \frac{1}{2} \text{ окруж} =$$

$$= 8\sqrt{7} + \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 6 = 8\sqrt{7} + 6\pi$$

или получается при $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(k-1)$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

Ответ: $M = 8\sqrt{7} + 6\pi$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2} \quad (m \in \mathbb{Z})$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$0 \leq x, y, z, t \leq 9$
 ~~$\frac{10x}{7} = 1$~~

② A: \overline{xxxx}
 B: $\overline{y27} / \overline{y72} / \overline{7yz}$
 C: $\overline{f_1} / \overline{f_2} / \overline{f_3}$

$x \cdot 1111 = 11 \cdot x \cdot 101 \cdot 101 \cdot 7$ m
 $A \cdot B \cdot C = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7 \cdot x$
 $C : 11 \Rightarrow C = 11$
 $\Rightarrow x = 7$

(7777, 707; 11)

(2) $x, y > 0$
 ~~$x-y$~~
 ~~$y+4$~~
 $k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$
 $M = x^2 - y^2 - 12xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy$
 $\text{wurz } M = ?$

$\frac{-4}{x(x-4)} + \frac{1}{y(y+4)} + \frac{12(x-y)-48}{xy(x-4)(y+4)} = 0$
 $\frac{-1}{x(x-4)} + \frac{1}{y(y+4)} + \frac{3(x-y)-12}{xy(x-4)(y+4)} = 0$
 $x^2 - 4x - y^2 - 4y + 3x - 3y - 12 = 0$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$
 $\frac{-4}{x(x-4)} + \frac{1}{y(y+4)} + \frac{3(-x-y-12)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$
 $\frac{-1}{x(x-4)} + \frac{1}{y(y+4)} + \frac{3(x-y-4)}{xy(x-4)(y+4)} = 0$
 $x^2 - 4x - y^2 - 4y + 3x - 3y - 12 = 0$
 $x^2 - x - y^2 - 7y - 12 = 0$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$
 $x^2 - 4x - y^2 - 4y + 3x - 3y - 12 = 0$
 $x^2 - y^2 - x - 4y - 12 = 0$
 $(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - (\frac{y}{2} + \frac{3}{2})^2 + 12\frac{1}{4} - 12 = 0$
 $(x-\frac{1}{2})^2 - (\frac{y}{2} + \frac{3}{2})^2 = 42$
 $(x+y+\frac{1}{2})(x-y-\frac{3}{2}) = 10$
 $x^2 - 4x - 2x + 8y - y^2 - 2y + xy - 2 = 12$
 $(x+y+3)(x-y-4) = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} y = -x-3 \\ y = x-4 \end{cases} \rightarrow \text{keine gg. ggw. } x, y > 0$

$x^3 - (x-4)^3 - 12x(x-4) =$
 $= 4(x^2 + x(x-4) + (x-4)^2) - 12(x^2 - 4x)$
 $= 12x^2 - 48x + 64 - 12x^2 + 48x$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

(3)

$(x, y) \in \mathbb{R}$

$$(\sin \alpha y - \sin \alpha x) \sin \alpha y = (\cos \alpha y + \cos \alpha x) \cos \alpha y$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{\sqrt{1}}{6} + \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{\sqrt{1}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{1}}{6} - \frac{\sqrt{1}}{3} = -\frac{\sqrt{1}}{2}$$

$$\sin \frac{\sqrt{1}}{6} - \sin \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \cos \frac{\sqrt{1}}{4} \cdot \sin \frac{-\sqrt{1}}{12}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{1}}{2} \Rightarrow 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \cos \frac{\sqrt{1}}{3} \cdot \cos \frac{\sqrt{1}}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \sin \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \sin \pi y = x \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(y-x)}{2} \cdot \cos \pi y$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

~~cos alpha cos beta + sin alpha sin beta - cos alpha cos beta - sin alpha sin beta~~

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\alpha = \frac{\pi(y-x)}{2}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi(y-x) + \pi y}{2} = \frac{\pi y - \pi x + \pi y}{2} = \frac{2\pi y - \pi x}{2}$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} \left(\sin \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) \right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(3y-x)}{2} = 0$$

$$11 \cdot 12 = \\ = 132$$

$$\frac{\pi}{2}(x+y) = \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x+y = 2k$$

$$x=1, y=-1$$

$$0 = -1 \cdot (-1+1)$$

$$\frac{\pi}{2}(3y-x) = \pi k$$

$$3y-x = 2k$$

$$y=12$$

$$11 \cdot 12 = \frac{y(y-1)}{x}$$

(4) x одинак.
 y одинаков
 $y \leq x$



то есть C_x^y

C_{x-2}^{y-2}

$$\frac{C_{x-2}^{y-2}}{C_x^y} = \frac{(x-2)!}{(y-2)! \cdot (x-y)!} \cdot \frac{y! \cdot (x-y)!}{x!} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)}$$

$$\Rightarrow 11 \cdot \frac{4 \cdot 3}{x(x-1)} = \frac{y(y-1)}{x(x-1)} \Rightarrow y(y-1) = 11 \cdot 12 \Rightarrow (y=12) \text{ при } x \geq 12$$

* если бывает > ?

здесь $x \geq 12 \Rightarrow$ нет
 $x = 12 \Rightarrow y = 12$

$S_{ABC} = ?$

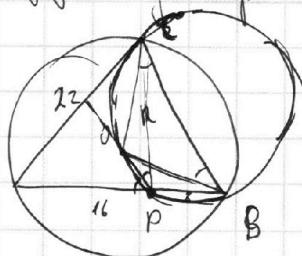
$$\begin{aligned} AP &= 16 \\ BP &= 8 \\ AC &= 22 \end{aligned} \quad) AB = 24$$

пункт симс
 $PQ = \text{бисект.}$

(5)



$$16 \cdot 8 = 128 \quad 22 \cdot (22+x)$$



I-

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(sin \alpha y - sin \alpha x) sin \alpha y = (cos \alpha y + cos \alpha x) \cdot cos \alpha y \\ sin^2 \alpha y - sin \alpha x \cdot sin \alpha y = cos^2 \alpha y + cos \alpha y \cdot cos \alpha x \\ sin^2 \alpha y - cos^2 \alpha y + 1 - \frac{1}{2} (cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)) = 0 \\ sin^2 \alpha y - cos^2 \alpha y - \frac{1}{2} (cos(\alpha - \beta) + cos(\alpha + \beta)) = 0$$

$$-cos 2\alpha y - \frac{1}{2} cos \alpha(x-y) = 0 \\ cos 2\alpha y + cos \alpha(x-y) = 0 \\ cos \frac{\alpha(x+y)}{2} \cdot cos \frac{\alpha(3y-x)}{2} = 0$$

$$\frac{\alpha(x+y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \alpha k \quad \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$\begin{cases} x+y = 1+2k \\ 3y-x = 1+2k \end{cases} \rightarrow \text{нр. реш} \\ \cos \beta = -\sin \alpha \\ \sin \beta = \cos \alpha$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{7} > -\frac{\pi}{2}$$

arccos

$$\arccos \frac{x}{7} + \arccos \frac{y}{7} > 0 \quad (x - k \cos \beta)(y - k \sin \beta)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \frac{y}{7} \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 7 \end{cases}$$

х и y разные коэффициенты

$$3 \cdot 2 - 2$$

$$3 \cdot 3 - 3$$

$$\frac{1}{2} - 2 + r$$

$$\frac{x}{7} \in [-1; 1]$$

$$\frac{y}{7} \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow (8; 5) \Rightarrow 40 - 1 = 39$$

$$(\frac{8}{7}; \frac{5}{7}) \Rightarrow 28$$

$$3y + 28 = 5y + 8 = 67 //$$

$$3y - x = a \quad (x + k \cos \alpha)(y - k \sin \alpha) \leq 0$$

?

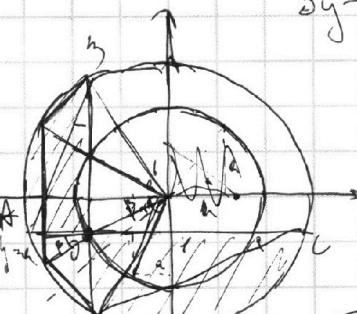
?

\Rightarrow образовалась прямолинейная фигура

две огибающие окружности

$$\frac{AO}{OD} = \frac{BO}{OC} \Rightarrow AO \cdot OC = BO \cdot OD$$

$$\Rightarrow AO + OC + BO + OD = (AO + BO)(OC + OD)$$



$$AC + BD \rightarrow \max \quad 2 \cdot \sqrt{5 + 4 \cdot \frac{1}{2}} = 2\sqrt{7} \Rightarrow 4\sqrt{7} \\ \sin \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{4} = \frac{1}{2}$$

$$MW = 4 \cdot \frac{8\pi}{3}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\textcircled{6} \quad \Phi(2) \quad \begin{cases} (x+4\sin 2)(y-4\cos 2) = 0 \\ x^2 + y^2 \leq 36 \end{cases}$

$x^2 + y^2 \leq 36$
 $x - 4\cos 2 + y\sin 2 = 0 \quad \left(\begin{matrix} 6\sin 2 - 4\cos 2 \in \mathbb{R} \end{matrix} \right)$

$\begin{cases} x+4\sin 2 \leq 0 \\ y-4\cos 2 \geq 0 \end{cases}$
 $x \geq 0 \quad y \leq 0$

$x \leq a \quad y \geq b$
 $(x - 4\cos 2)^2 + (y - 4\sin 2)^2 = 36$
 re exp. in $\sin \beta$ und $\cos \beta$
 $\sin(\beta + \alpha) = \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha$

$\frac{3\pi}{2} + 2$
 $\alpha = 45^\circ$



$$\frac{d+\beta}{2} = 80^\circ$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos\alpha$$

$$x = \frac{d+\beta}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \text{діагональ } y \text{ на } \alpha$$

$$\text{бічна висота} \Rightarrow \text{хорда } b \text{ або синус } \alpha$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x = 4 \cdot \cos\alpha \end{cases} \Rightarrow 16 \cdot \cos^2\alpha + y^2 = 36$$

$$y^2 = 36 - 16 \sin^2\alpha$$

$$y = \sqrt{36 - 16 \sin^2\alpha}$$

$$x = \sqrt{36 - 16 \cos^2\alpha}$$

$$1) \text{ len} = 2\pi r$$

$$\Rightarrow \text{новий кут } \alpha + 120^\circ$$