



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A = 111k$, $k \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$, т.к. A — 4-значное с одинаковыми цифрами.

$$1111 = \underbrace{11}_{\text{простое}} \cdot \underbrace{101}_{\text{простое}}$$

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101k \cdot B \cdot C = n^2$$

$$0 < k < 11, \quad 0 < k < 101 \Rightarrow k \not\equiv 11 \text{ и } k \not\equiv 101$$

Но т.к. $11 \cdot 101k \cdot B \cdot C$ — точный квадрат, то $B \cdot C \div 11$ и $B \cdot C \div 101 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} [B \div 11 \\ C \div 11 (*). \text{ Заметим при этом, что} \\ [B \div 101 \\ C \div 101 \end{cases}$ $0 < B < 1111 = 101 \cdot 11 \Rightarrow B$ не может делиться и на 101 , и на 11 ; (1)
т.к. B — трёхзначное

$$0 < C < 101 \Rightarrow C \not\equiv 101 \text{ (2)}$$

т.к. C — двузначное

Из (1), (2) и (*) получаем, что $B \div 101$,
 $C \div 11$ (т.к. $C \not\equiv 101$ и B делится или на 11 , или на 101 , но не на оба сразу, и $B \cdot C \div (11 \cdot 101)$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак, $C:11$ - двузначное, содержащее 3 $\Rightarrow C = 33$ (других нет);
11, 22, 44, 55, 66, 77, 88, 99 не подходят.

$B:101$ - трехзначное, содержащее 6 $\Rightarrow B = 606$

101, 202, 303, 404, 505, 707, 808, 909

не подходят.

$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot C &= 111 \cdot k \cdot 33 \cdot 606 = \\ &= \underline{11} \cdot \underline{101} k \cdot 3 \cdot \underline{11} \cdot 3 \cdot \underline{101} \cdot 2 = \\ &= 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2k = n^2 \Rightarrow 2k - \\ &\text{точный квадрат;} \end{aligned}$$

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$k = 1, 3, 5, 4, 6, 7, 9$ не подходят.

$k = 2$: $2k = 4$ - квадрат;

$k = 8$: $2k = 16$ - квадрат.

В ответе - тройки $(A; B; C)$

Ответ: $(2222; 606; 33)$

$(8888; 606; 33)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)} \quad | : (y+x+5) > 0$$

т.к. $x, y > 0$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$4 = 2x - 2y \Rightarrow x - y = 2.$$

Преобразуем M: $x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy$

$$\stackrel{x-y=2}{=} 2(x^2 + xy + y^2) - 6xy = 2x^2 - 4xy + 2y^2$$
$$= 2(x-y)^2 = 2 \cdot 4 = 8$$

Ответ: 8.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

Воспользуемся формулами:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \pi x = -2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \times \\ \times \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$(1) \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \quad \text{или} \quad (2) 2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = -2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x + y = 2k, k \in \mathbb{Z}}$$

$$(2) \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = -\sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

1°. Если $\cos \pi x = 0$:

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = 0 \quad | : \sin \pi x \neq 0 \text{ из осн.} \\ \text{прин. множества}$$

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$$

Получаем: $\begin{cases} \cos \pi x = 0 \\ \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + n_1, n_1 \in \mathbb{Z} \\ \frac{x - y}{2} = \frac{1}{2} + n_2, n_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n_1 \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n_2 \\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + n_1, n_1 \in \mathbb{Z} \\ x - y = 1 + 2n_2, n_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = x - 1 - 2n_2, n_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2} + n_1 - 1 - 2n_2 = -\frac{1}{2} + n_1 - 2n_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

$n = n_1 - 2n_2$ - так можно получить любое $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \\ y = -\frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2°. $\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$ - случай, аналогичный 1°.

3°. $\cos \frac{\pi x - \pi y}{2}, \cos \pi x \neq 0$. Поделим (2) на

числ:

$$\operatorname{tg} \pi x = -\operatorname{tg} \frac{\pi x - \pi y}{2} \text{ орг.: } \begin{cases} \pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n_1 \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n_2 \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} + n_1, n_1 \in \mathbb{Z} \\ y \neq -\frac{1}{2} + n_2, n_2 \in \mathbb{Z}. \\ n = n_1 - 2n_2 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} \pi x = \operatorname{tg} \frac{\pi y - \pi x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi x = \frac{\pi y - \pi x}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{y - x}{2} + l, l \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{3x - y = 2l, l \in \mathbb{Z}}$$

крае: $\begin{cases} y \neq -\frac{1}{2} + n_1 - 2n_2 \\ x = \frac{1}{2} + n_1 \\ x + y = \end{cases}$

a) Ответ: 1) $x + y = 2k, k \in \mathbb{Z}$

2) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + n_1, n_1 \in \mathbb{Z} \\ y = -\frac{1}{2} + n_2, n_2 \in \mathbb{Z}, n = n_1 - 2n_2, n_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

3) $3x - y = 2l, l \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3x - y = 2l, l \in \mathbb{Z}.$$

Проверим: если $\begin{cases} y = -\frac{1}{2} + n_1 - 2n_2 \\ x = \frac{1}{2} + n_1 \end{cases}, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, то

$$3x - y = \frac{3}{2} + 3n_1 + \frac{1}{2} - n_1 + 2n_2 = 2 + 2n_1 + 2n_2 = 2l,$$

$$l = 1 + n_1 + n_2$$

т.е. подходит все случаи $3x - y = 2l, l \in \mathbb{Z}$,
кроме $\begin{cases} y = -\frac{1}{2} + n_1 - 2n_2 \\ x = \frac{1}{2} + n_1 \end{cases}, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ - с которыми противоречие 3° .

В ответе это исключение указывать не будем, т.к. из 1° ясно, что такие пары x и y подходят.

а) Ответ: (1) $x + y = 2k, k \in \mathbb{Z}$

$$(2) \begin{cases} y = -\frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

(3) $3x - y = 2l, l \in \mathbb{Z}$, кроме описанных в (2).

$$б) \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\text{Ограничения: } \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$x, y \in \mathbb{Z}$. Сделаем перебор по y .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1^\circ. y = -2: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin(-1) < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} - \frac{\pi}{2} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{этому н-ву удоб-}$$

створяют все $x \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2;$

$3; 4; 5; 6\}$ Проверка.

$$2^\circ. y = -1$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \frac{5\pi}{6} \text{ - аналогично } 1^\circ.$$

$$3^\circ. y = 0 \quad \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin 0 < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \pi \text{ - аналогично } 1^\circ.$$

$$4^\circ. y = 1$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{1}{2} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \frac{5\pi}{6} \text{ - аналогично } 1^\circ.$$

$$5^\circ. y = 2: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin 1 < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin \frac{x}{6} \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{6} = 1 \Rightarrow x = 6 \quad (\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right])$$

Здесь подошли все $x \in [-6; 6] \cap \mathbb{Z} \setminus \{6\}$

8) Ответ: 1) ~~все $y \in [-2; 1] \cap \mathbb{Z}$, $x \in [-6; 6] \cap \mathbb{Z}$~~

2) ~~$y = 2$, $x \in [-6; 6] \cap \mathbb{Z} \setminus \{6\}$.~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сделаем проверку, соответствуют ли полученные значения x, y из п. а): 1) $x + y = 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x$ и y одной четности - подошли пары $(-6; -2); (-4; -2); (-2; -2); (0; -2); (2; -2); (4; -2); (6; -2); (-1; -1); (-5; -1); (-3; -1); (1; -1); (3; -1); (5; -1)$ + также, только с противоположным y , кроме пары $(6; 2); (-6; 0); (-4; 0); (-2; 0); (0; 0); (2; 0); (4; 0); (6; 0)$. Всего $13 \times 2 - 1 + 7 =$

$$2) \begin{cases} y = -\frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x, y \notin \mathbb{Z}$$

$= 32$ пары.

3) $3x - y = 2l$ - аналогично x и y одной четности, тогда все пары, это и в (1)

Ответ: 32 пары.

32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в конце месяца билетов было m , одинацати классиков было n . $m, n \in \mathbb{N}$

C_n^4 - число способов раздать 4 билета

C_n^m - m билетов.

C_{n-2}^2 - кол-во способов, при которых и Тетя, и Вася попали на концерт (они точно получили билеты, оставшиеся 2 билета надо распределить между оставшимися $n-2$ -мя)

C_{n-2}^{m-2} - то же, но при m билетах.

A - "Тетя и Вася попали на концерт"

p_1 - в-сть A в начале месяца, p_2 - в конце.

$$p_1 = p_2. \quad p_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}, \quad p_2 = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m}$$

$$\frac{6 C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m}$$

$$\frac{6 \cdot \frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!}}{\frac{n!}{4! \cdot (n-4)!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(m-2)! \cdot (n-m)!}}{\frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\frac{6}{2!}}{\frac{1}{4!}} = \frac{\frac{1}{(m-2)!}}{\frac{1}{m!}}$$

$$72 = m(m-1)$$

$$m^2 - m - 72 = 0$$

$$m_1 = 9, m_2 = -8 \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{не подходит}$$

Тогда $m = 9$.

Ответ: 9 башетов.

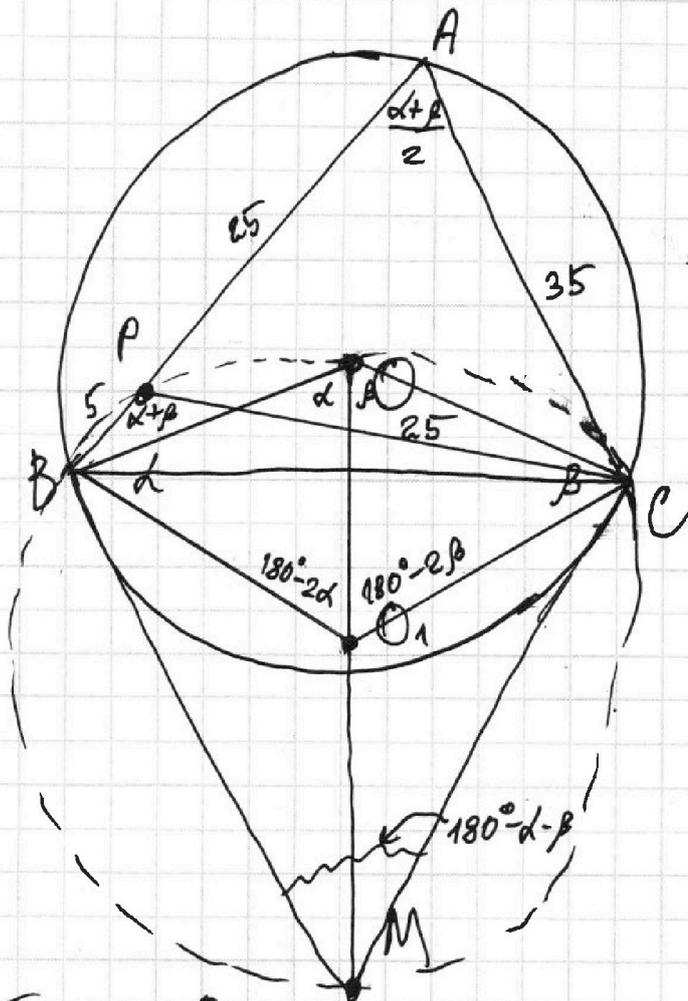


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1. Пусть O_1 - центр ω_2 . Тогда $O_1O = O_1C = O_1B$.
2. Обозначим $\angle BOO_1$ за α , $\angle COO_1$ за β .
 $OO_1 = BO_1 \Rightarrow \triangle BOO_1$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle BOO_1 = \angle OBO_1 = \alpha$
 Аналогично $\angle COO_1 = \angle OCO_1 = \beta$
3. $\angle A$ - вписанный при центральном $\angle BOC \Rightarrow 2\angle A = \angle BOC \Rightarrow \angle A = \frac{\angle BOC}{2} =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{ACP} = \sqrt{\frac{85}{2} \left(\frac{85}{2} - 35\right) \left(\frac{85}{2} - 25\right) \left(\frac{85}{2} - 25\right)} = \left(\frac{85}{2} - 25\right) \cdot \sqrt{\frac{85}{2} \left(\frac{85}{2} - 35\right)} = \frac{35}{2} \cdot \sqrt{\frac{85}{2} \cdot \frac{15}{2}} = \frac{35}{4} \cdot \sqrt{85 \cdot 15} = \frac{35}{4} \cdot 5 \sqrt{17 \cdot 3} = \frac{175\sqrt{51}}{4}$$

д. $\frac{S_{ABC}}{S_{ACP}} = \frac{AB}{AP}$ (Δ с общей высотой)

$$S_{ABC} = \frac{AB}{AP} S_{ACP} = \frac{25+5}{25} \cdot \frac{175\sqrt{51}}{4} = \frac{210\sqrt{51}}{4} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

Ответ: $\frac{210\sqrt{51}}{4} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

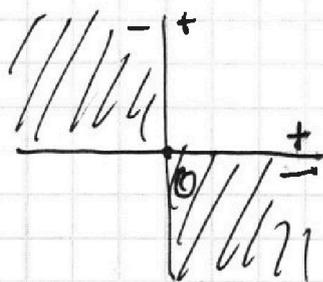
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \text{ - окр. с центром } (0;0) \\ \text{и радиусом } 13, \text{ решение к-ва-} \\ \text{область внутри} \\ (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) = 0 \text{ кр. и} \\ \text{ока сама.} \\ x = -5\sqrt{2}\cos\alpha; y = -5\sqrt{2}\sin\alpha - 2 \end{cases}$$

перпендикулярные прямые, паралл.
всех координат. Вершина: $O(-5\sqrt{2}\cos\alpha; -5\sqrt{2}\sin\alpha)$. Заметим: $x_0^2 + y_0^2 = 50 \Rightarrow$
 $y_0 \Rightarrow O$ лежит на окр. с
центром $(0;0)$ и радиусом $5\sqrt{2} =$
 $= \sqrt{50}$



Решение 1-го к-ва- заштри-
хованная обл. на рисунке
слева, зависит от поло-
жения вершины.



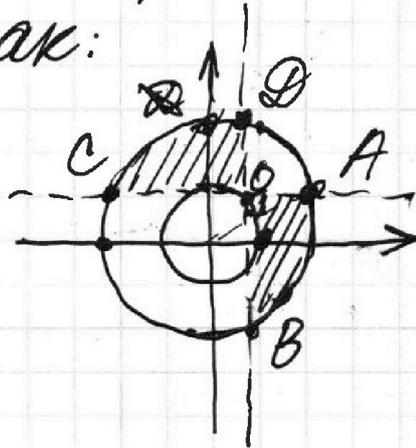
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

То есть ^{системы} мн-во решений будет выглядеть так:



т.е. 2 прямые перпендикулярны,
то: $\frac{\angle C\hat{O}D + \angle A\hat{O}B}{2} = 90^\circ \Rightarrow \angle C\hat{O}A + \angle B\hat{O}B =$
 $= \frac{L_{\omega}}{2} = \pi \cdot R = \text{const.}$ (углы между пересек.

хордами равны полусумме дуг).

Осталось найти максимальную сумму $AC + BD$.

Заметим, что $AC \cdot BD = \text{const}$
(см. ранее)

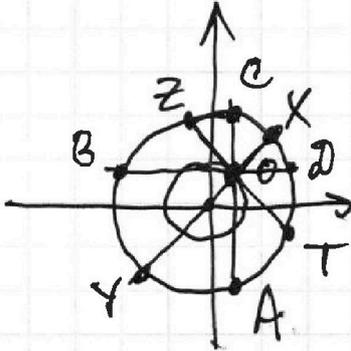


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC \cdot AO = YO \cdot XO = \\ = (R+r)(R-r) = R^2 - r^2$$

$$AC \cdot AO = BO \cdot OD = (R^2 - r^2)^2 = \\ = (109 - 50)^2 = 149^2$$



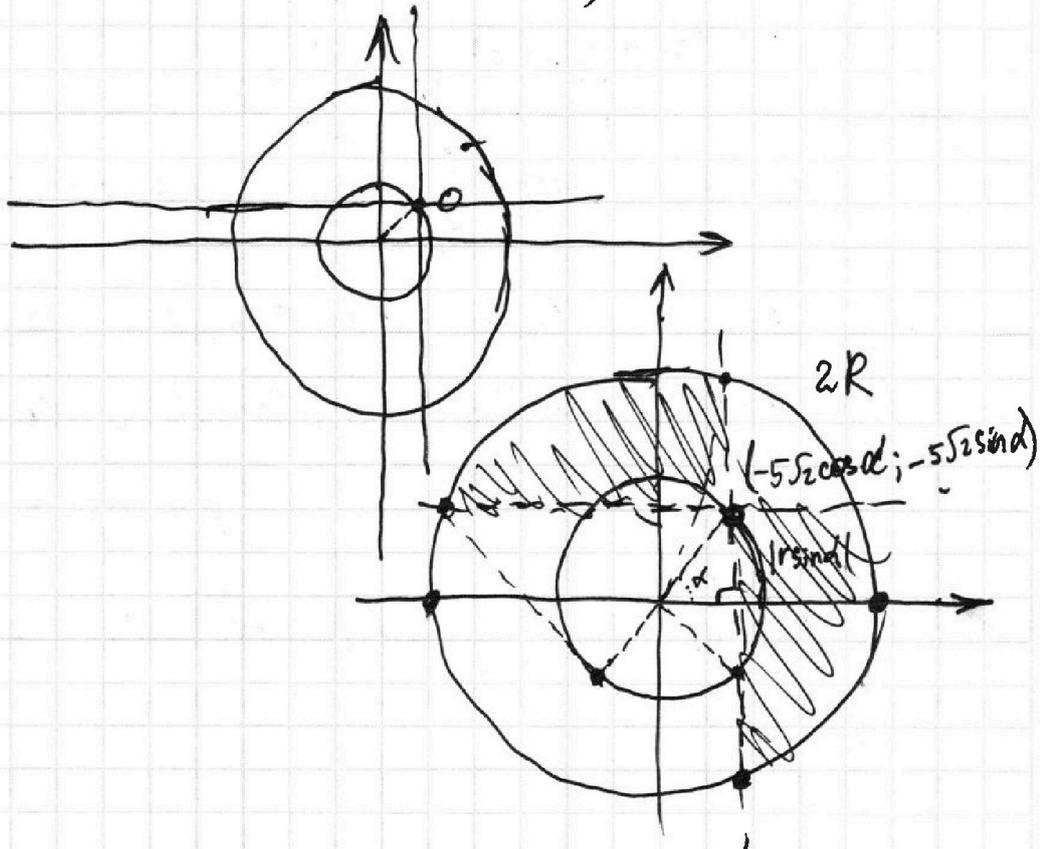
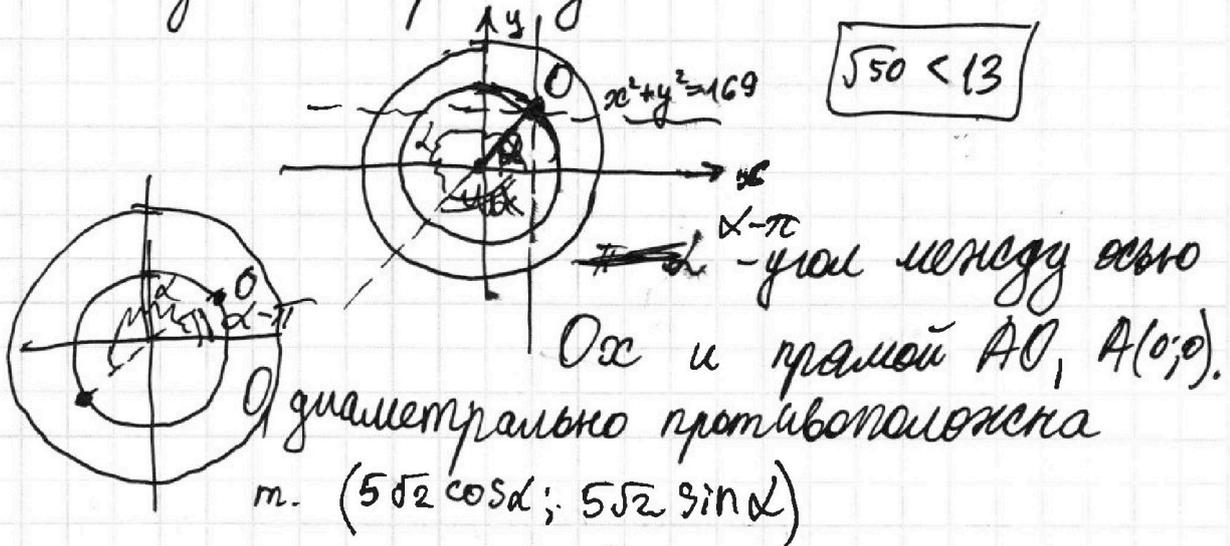
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем картинку:



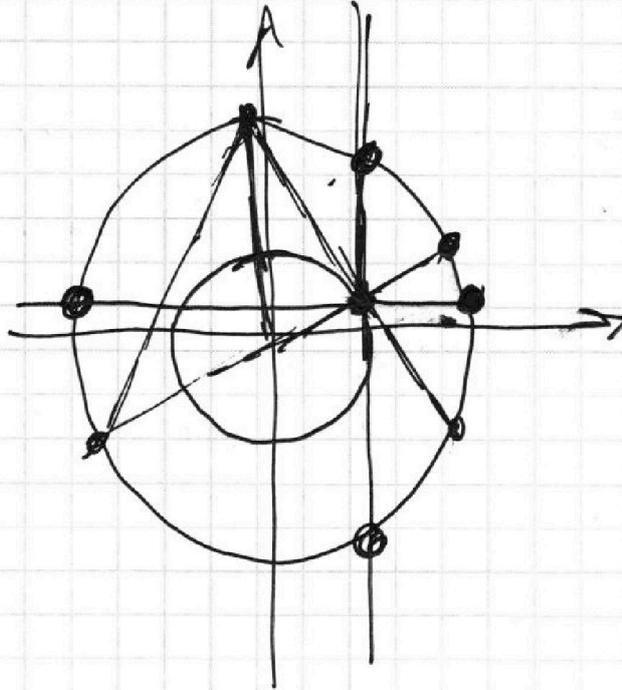


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



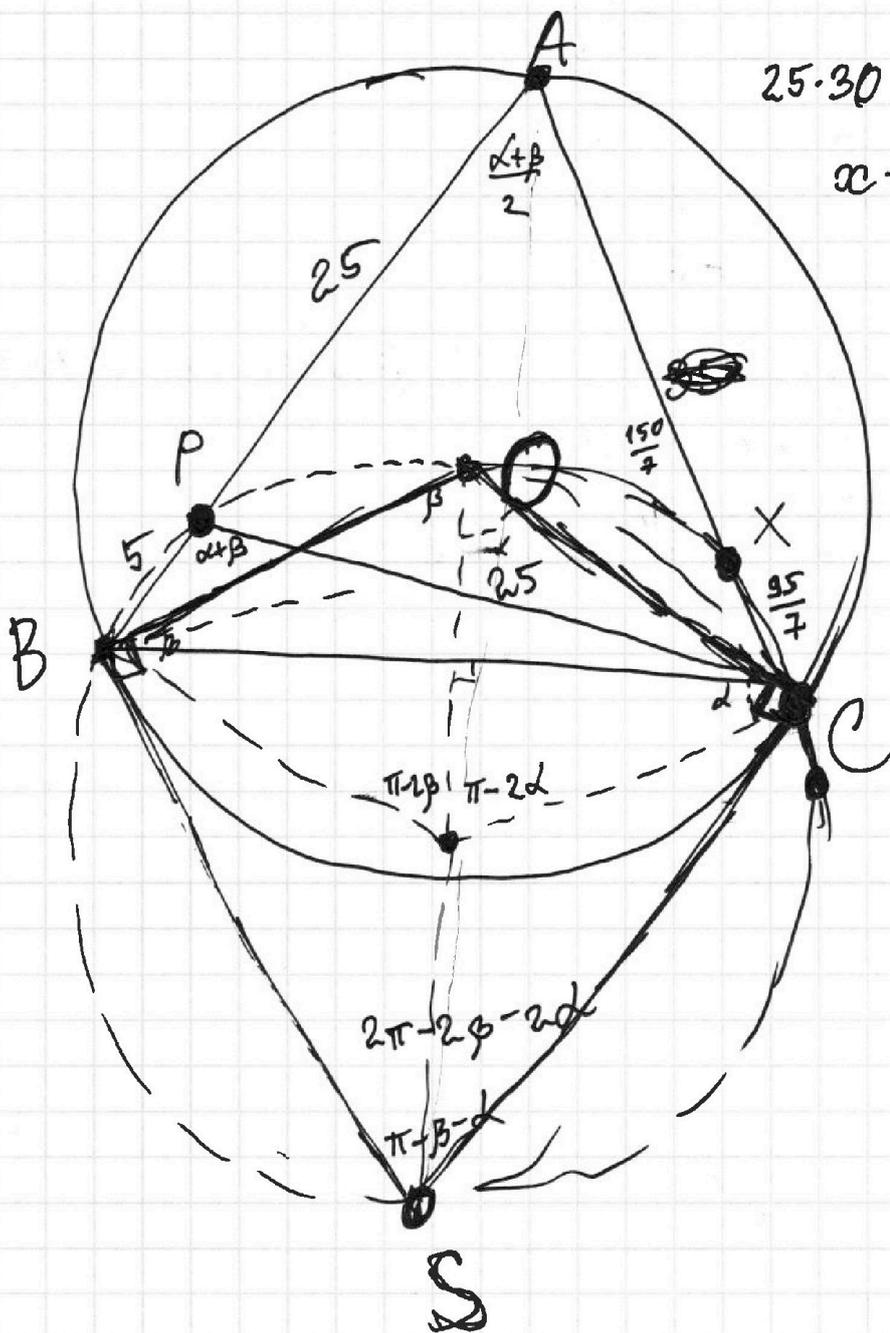


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$25 \cdot 30 = 35x$$

$$x = \frac{25 \cdot 30}{35} =$$

$$= \frac{150}{7}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 35 \\ \hline 245 \\ - 150 \\ \hline 95 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{\angle BO_1O + \angle CO_1O}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

4. По сумме углов Δ для ΔBO_1O :

$$\alpha + \alpha + \angle BO_1O = 180^\circ \Rightarrow \angle BO_1O = 180^\circ - 2\alpha$$

Аналогично $\angle CO_1O = 180^\circ - 2\beta$.

5. Пусть $OO_1 \cap \omega_2 = M$

$\angle BMC$ - вписанный в ω_2 при центральном $\angle BOC$ (оба опираются на BC) \Rightarrow

$$\Rightarrow \angle BMC = \frac{\angle BOC}{2} = \frac{\angle BO_1O + \angle CO_1O}{2} = \frac{360^\circ - 2\alpha - 2\beta}{2} = 180^\circ - \alpha - \beta$$

6. $\angle BPC$ - вписанный в $\omega_2 \Rightarrow \angle BPC + \angle BMC = 180^\circ$

$$\angle BPC = 180^\circ - \angle BMC = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$$

7. $\angle BPC$ - внешний для $\Delta APC \Rightarrow \angle A + \angle ACP =$

$$= \angle BPC \Rightarrow \angle ACP = \angle BPC - \angle A = \alpha + \beta - \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{2} = \angle A \Rightarrow \Delta APC - \text{равнобедренный,}$$

$$AP = CP = 25$$

8. По формуле Герона:

$$S_{ACP} = \sqrt{p_1(p_1 - AC)(p_1 - AP)(p_1 - PC)}, \quad p_1 = \frac{AC + AP + PC}{2} =$$
$$= \frac{25 + 25 + 35}{2} = \frac{85}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1^o. ~~C=33~~ $k \neq 7$: $B:77$ - маленький
случай

2^o. $C=39$

$$39 \cdot 1111k \cdot B = n^2$$

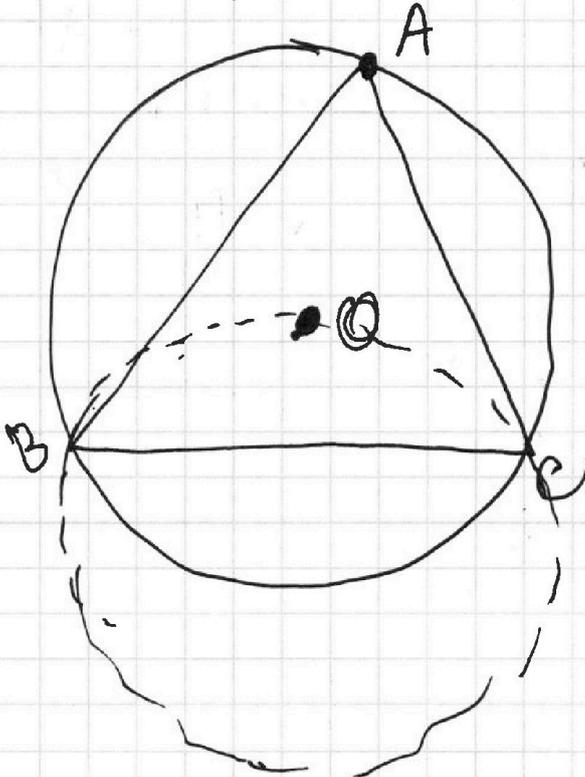
$$13^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11k \cdot B = n^2 \quad - \text{маленький}$$

случай, $B:77$ или $B:33$.

3^o. $C=33$

$$11^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13k \cdot B = n^2$$

$$B:13 \cdot 7 \text{ или } B:13 \cdot 3$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\sin \frac{\pi}{6} \pi x + \sin \pi y\right) \sin \pi x = \left(\cos \pi x - \cos \pi y\right) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x =$$

$$= -2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x =$$

$$= -\sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \pi k$$

$$x + y = 2k \quad -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$\operatorname{tg} \pi x = -\operatorname{tg} \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$\operatorname{tg} \pi x = \operatorname{tg} \frac{\pi y - \pi x}{2}$$

$$\pi x = \frac{\pi y - \pi x}{2} + \pi k$$

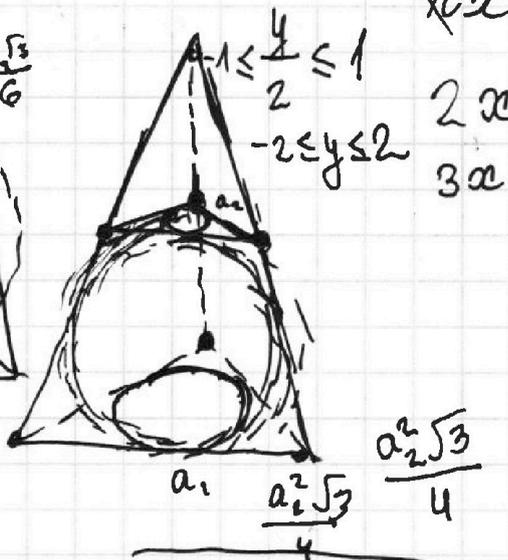
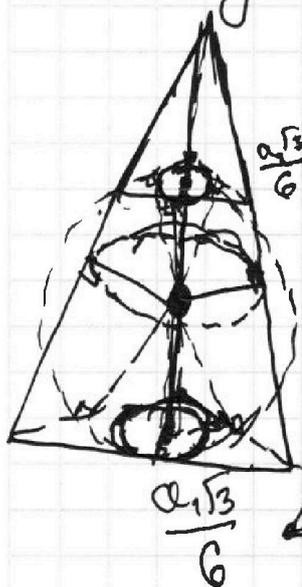
$$2x = y - x + 2k$$

$$3x - y = 2k$$

$$3 \cdot \frac{a_1 h}{2} = \frac{3}{2} a_1 h$$

$$3 \cdot \frac{a_2 h}{2} = \frac{3}{2} a_2 h$$

$$3 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} (H - h)$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

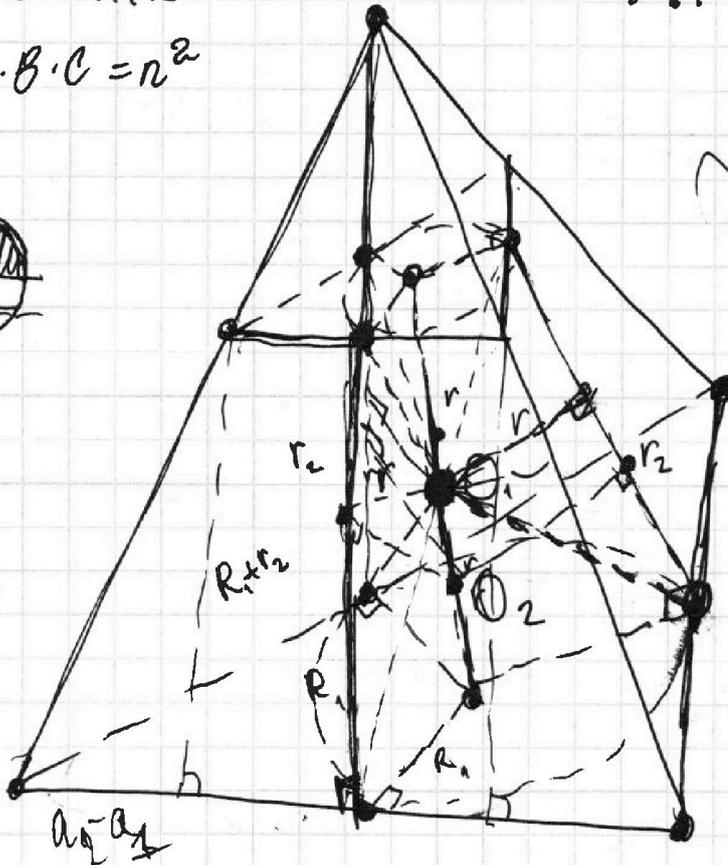
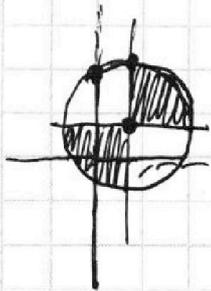
СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \dots 111k$$

$$111k \cdot B \cdot C = n^2$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$



~~$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2$$~~

$$\frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}}{(r_1 + r_2)(a_1 + a_2)} =$$

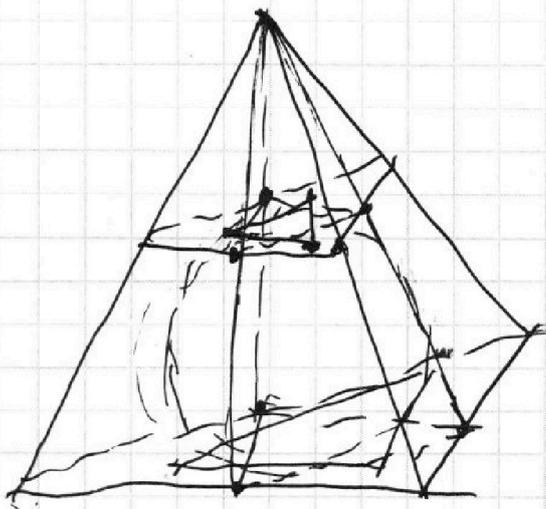
$$= \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{2(r_1 + r_2)(a_1 + a_2)} =$$

$$= \frac{a_1^2 \sqrt{3}}{2\left(\frac{a_1 \sqrt{3}}{6} + \frac{a_1 \sqrt{3}}{6}\right)(a_1 + a_2)} =$$

$$= \frac{3a_1^2}{(a_1 + a_2)^2}$$

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2}$$

$$\frac{a_1^2}{(a_1 + a_2)^2}$$



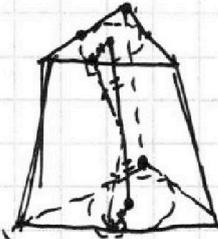
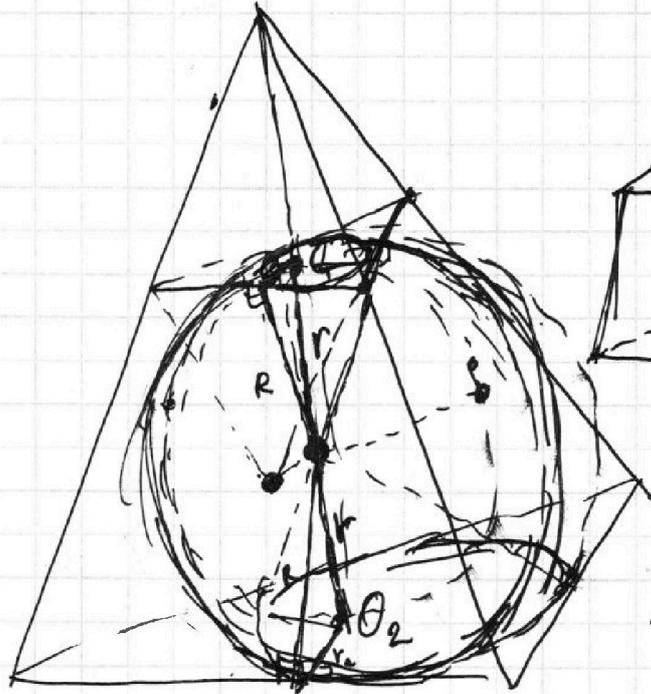
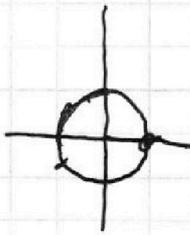


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



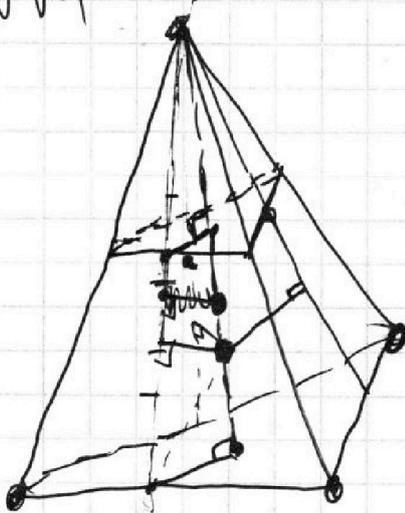
$$2r \frac{a_1}{a_1 + a_2} = 1 - \frac{a_2}{a_1 + a_2}$$

$$= 1 - \frac{2r}{H}$$

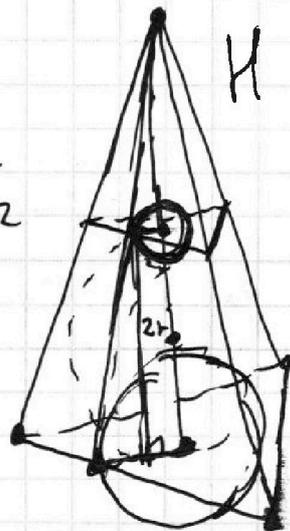
$$\frac{109}{50} + \frac{169}{50}$$

$$\sin k \cdot b \cdot c = r^2$$

$$\frac{a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2r}{H}$$



$$\frac{a_1}{a_2}$$



$$2r = \frac{a_2}{a_1 + a_2} H$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \\ x, y > 0 & ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} & = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{\cancel{xy-2y+2x-4}} \\ & \frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)} \end{aligned}$$

$$xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$2y - 2x = -4$$

$$y - x = -2 \Rightarrow x = y + 2$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 6xy & = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy = \\ & = 2(x^2 + xy + y^2) - 6xy = \\ & = 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x-y)^2 = 8 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено болсе одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$A = \overline{aaaa} \Rightarrow A: 1111 \Rightarrow A: 11, A: 7, A: 13$$

$$10^3 \leq B < 10^4, \text{ одна цифра } b$$

$$C: \overline{30} \text{ или } \overline{03}$$

$$A = 1111k, k \in \{1; 2; \dots; 9\} \Rightarrow A: 11, A: 13, 110$$

$$A: 121 = 11^2, A: 169 = 13^2$$

Плюс BC: 11, BC: 13 \Rightarrow BC: 143

$$B = \overline{x_1 x_2 b} \text{ или } B = \overline{x_1 b x_2} \text{ или } B = \overline{b x_2 x_3}$$

$$B: 13 \text{ или } C: 13$$

$$B: 11 \text{ или } C: 11$$

$$156$$

$$286$$

$$416$$

$$546$$

$$676$$

$$806$$

$$936$$

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Иначе проверить $\overline{33}$ $B: 143$

$$1^{\circ} C = 13, A = 1111k$$

$$13 \cdot 1111k \cdot B = n^2$$

$$13^2 \cdot 7 \cdot 11k \cdot B = n^2$$

$$k=7: 13^2 \cdot 7^2 \cdot 11B = n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 11a^2 - \text{малень}$$

$$100 \leq 11a^2 < 1000 \text{ кий случай}$$

$$\frac{100}{11} \leq a^2 < \frac{1000}{11}$$

$$10 \leq a \leq 90$$

$\begin{array}{r} 2 \\ 13 \\ \times 8 \\ \hline 104 \\ \\ 117 \\ 130 \\ 143 \\ 156 \\ 286 \\ + 130 \\ \hline 416 \end{array}$

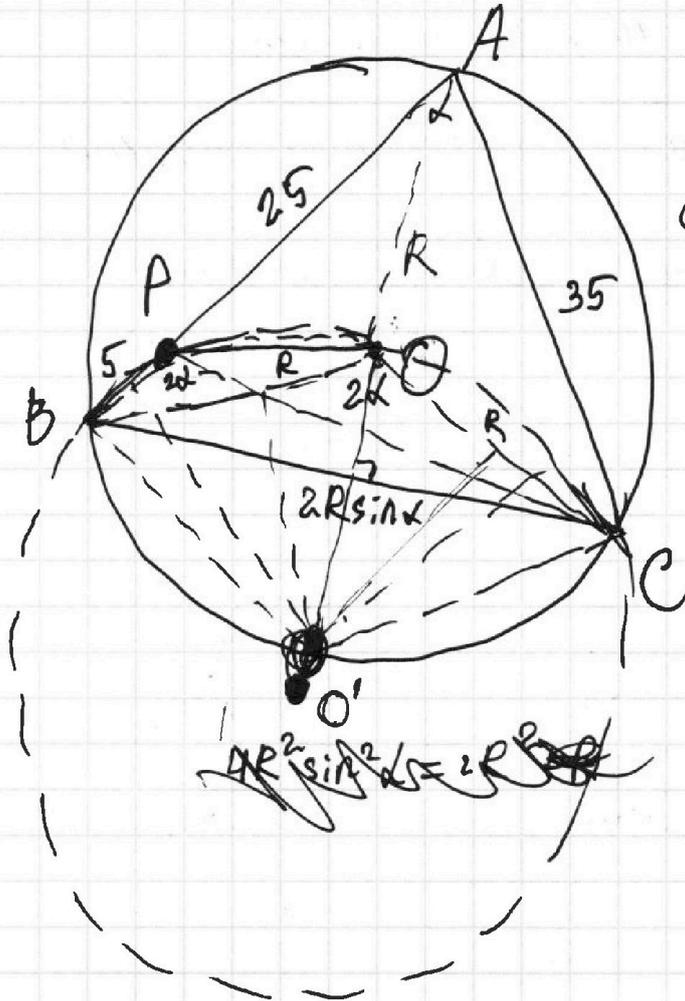


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$CP^2 = 25^2 + 35^2 - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \cos \alpha$$

$S_{ABC} = ?$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

$$S = \frac{abc}{4R} =$$

~~$abc = 2R^2$~~

~~$4R^2 \sin^2 \alpha = 2R^2$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n одинаковыми килосопками.

C_n^4 способов раздать 4 билета.

Именно этим двоим: закрепляем 2 билета за ними, C_{n-2}^2

C_n^m

$$6 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m}$$

$$\frac{6 \cdot \cancel{(n-2)!}}{2! \cdot \cancel{(n-4)!} \cdot \frac{n!}{4! \cdot \cancel{(n-4)!}}} = \frac{\cancel{(n-2)!}}{(m-2)! \cdot \cancel{(n-m)!} \cdot \frac{n!}{m! \cdot \cancel{(n-m)!}}}$$

$$\frac{\frac{6}{2}}{\frac{1}{24}} = \frac{1}{\frac{(m-2)!}{m!}}$$

$$72 = m(m-1)$$

$$m=9$$

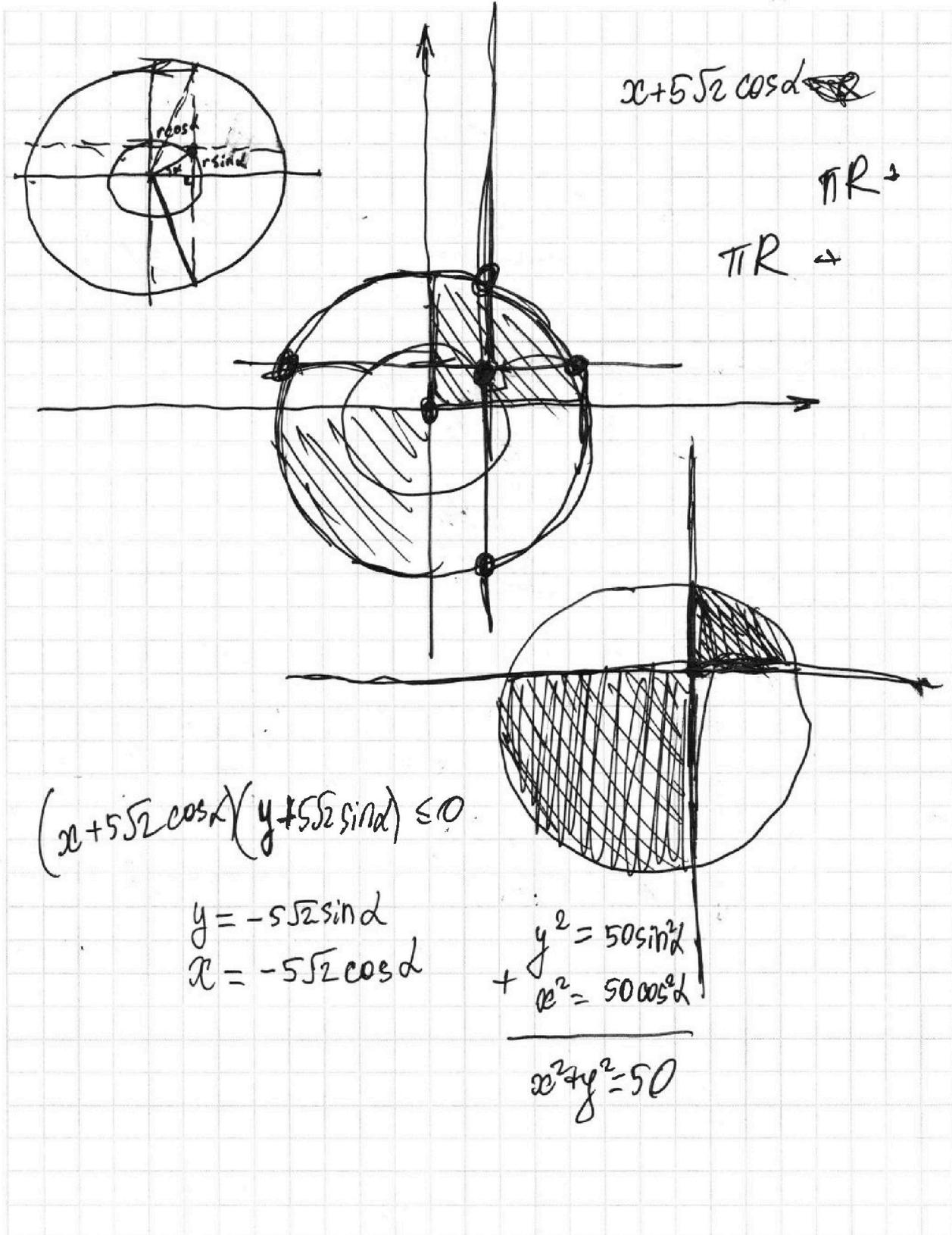


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

