



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A = 111k$, $k \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$, т.к. A — 4-значное с одинаковыми цифрами.

$$1111 = \underbrace{11}_{\text{простое}} \cdot \underbrace{101}_{\text{простое}}.$$

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101k \cdot B \cdot C = n^2$$

$$0 < k < 11, \quad 0 < k < 101 \Rightarrow k \not\equiv 11 \text{ и } k \not\equiv 101.$$

Но т.к. $11 \cdot 101k \cdot B \cdot C$ — точный квадрат, то $B \cdot C : 11$ и $B \cdot C : 101 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} B : 11 \\ C : 11 (*) \end{cases} \\ \begin{cases} B : 101 \\ C : 101 \end{cases} \end{cases} \text{ Заметим при этом, что } 0 < B < 1111 = 101 \cdot 11 \Rightarrow B \text{ не может делиться и на } 101, \text{ и на } 11; (1)$$

т.к. B — трёхзначное

$$0 < C < 101 \Rightarrow C \not\equiv 101 (2)$$

т.к. C — двузначное

Из (1), (2) и (*) получаем, что $B : 101$, $C : 11$ (т.к. $C \not\equiv 101$ и B делится или на 11, или на 101, но не на оба сразу, и $BC : (11 \cdot 101)$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Итак, $C:11$ - двузначное, содержащее 3 $\Rightarrow C=33$ (других нет);
11, 22, 44, 55, 66, 77, 88, 99 не подходят.

$B:101$ - трехзначное, содержащее 6 $\Rightarrow B=606$

101, 202, 303, 404, 505, 707, 808, 909

не подходят.

$$\begin{aligned} A \cdot B \cdot C &= 1111 \cdot k \cdot 33 \cdot 606 = \\ &= 11 \cdot 101 k \cdot 3 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 2 = \\ &= 101^2 \cdot 11^2 \cdot 3^2 \cdot 2k = n^2 \Rightarrow 2k - \\ &\text{точный квадрат;} \end{aligned}$$

$$k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

$k=1, 3, 5, 4, 6, 7, 9$ не подходят.

$k=2$: $2k=4$ - квадрат;

$k=8$: $2k=16$ - квадрат.

В ответе - тройки $(A; B; C)$

Ответ: $(2222; 606; 33)$

$(8888; 606; 33)$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)} \quad | : (y+x+5) > 0$$

т.к. $x, y > 0$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow xy = (x-2)(y+2)$$

$$xy = xy - 2y + 2x - 4$$

$$4 = 2x - 2y \Rightarrow x - y = 2.$$

Преобразуем М:

$$x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy$$
$$\stackrel{x-y=2}{=} 2(x^2 + xy + y^2) - 6xy = 2x^2 - 4xy + 2y^2$$
$$= 2(x-y)^2 = 2 \cdot 4 = 8$$

Ответ: 8.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

Воспользуемся формулами:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \pi x = -2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \times \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$(1) \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \quad \text{или} \quad (2) 2 \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = -2 \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x + y = 2k, k \in \mathbb{Z}}$$

$$(2) \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = -\sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

1°. Если $\cos \pi x = 0$:

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x = 0 \quad | : \sin \pi x \neq 0 \text{ из осн. прин. тождества}$$

$$\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$$

Получаем: $\begin{cases} \cos \pi x = 0 \\ \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{2} + \pi n_1 \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + n_1 \\ x - y = 1 + 2n_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + n_1 \\ \frac{x - y}{2} = \frac{1}{2} + n_2, n_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + n_1, n_1 \in \mathbb{Z} \\ \frac{x - y}{2} = \frac{1}{2} + n_2, n_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
2 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + n_1, n_1 \in \mathbb{Z} \\ x - y = 1 + 2n_2, n_2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow y = x - 1 - 2n_2, n_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{2} + n_1 - 1 - 2n_2 = -\frac{1}{2} + n_1 - 2n_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

$n = n_1 - 2n_2$ - так можно получить любое $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \\ y = -\frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2°. $\cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$ - случай, аналогичный 1°.

3°. $\cos \frac{\pi x - \pi y}{2}, \cos \pi x \neq 0$. Поделим (2) на

них:

$$\operatorname{tg} \pi x = -\operatorname{tg} \frac{\pi x - \pi y}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n_1 \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \neq \frac{1}{2} + n_1, n_1 \in \mathbb{Z} \\ y \neq -\frac{1}{2} + n_2, n_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$n = n_1 - 2n_2$

$$\operatorname{tg} \pi x = \operatorname{tg} \frac{\pi y - \pi x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi x = \frac{\pi y - \pi x}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{y - x}{2} + l, l \in \mathbb{Z}$$

$$3x - y = 2l, l \in \mathbb{Z}$$

крае: $\begin{cases} y \neq -\frac{1}{2} + n, -2n_2 \\ x = \frac{1}{2} + n_1 \end{cases}$

3 ~~$x + y =$~~

a) Ответ: 1) $x + y = 2k, k \in \mathbb{Z}$

2) $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + n_1, n_1 \in \mathbb{Z} \\ y = -\frac{1}{2} + n_2, n_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$n = n_1 - 2n_2, n_2 \in \mathbb{Z}$

3) $3x - y = 2l, l \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3x - y = 2l, l \in \mathbb{Z}.$$

Проверим: если $\begin{cases} y = -\frac{1}{2} + n_1 - 2n_2 \\ x = \frac{1}{2} + n_1 \end{cases} \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, то

$$3x - y = \frac{3}{2} + 3n_1 + \frac{1}{2} - n_1 + 2n_2 = 2 + 2n_1 + 2n_2 = 2l, \\ l = 1 + n_1 + n_2$$

т.е. подходят все случаи $3x - y = 2l, l \in \mathbb{Z}$,
кроме $\begin{cases} y = -\frac{1}{2} + n_1 - 2n_2 \\ x = \frac{1}{2} + n_1 \end{cases} \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ - с которыми про-
тиворечие 3°.

В ответе это исключение указывать не будем, т.к. из 1° ясно, что такие пары x и y подходят.

а) Ответ: (1) $x + y = 2k, k \in \mathbb{Z}$
(2) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$
(3) $3x - y = 2l, l \in \mathbb{Z}$, кроме опи-
санных в (2).

б) $\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$

Ограничения: $\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$

$x, y \in \mathbb{Z}$. Сделаем перебор по y .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
4 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$1^{\circ}. y = -2: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin(-1) < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} - \frac{\pi}{2} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \text{этому } n\text{-ву удов-}$$

летворяют все $x \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2;$

$3; 4; 5; 6\}$ Проверка.

$$2^{\circ}. y = -1$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \frac{5\pi}{6} - \text{аналогично } 1^{\circ}.$$

$$3^{\circ}. y = 0 \quad \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin 0 < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \pi - \text{аналогично } 1^{\circ}.$$

$$4^{\circ}. y = 1$$

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{1}{2} < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \frac{5\pi}{6} - \text{аналогично } 1^{\circ}.$$

$$5^{\circ}. y = 2: \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin 1 < \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{6} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arcsin \frac{x}{6} \neq \frac{\pi}{2}$$

$$(\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right])$$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{6} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{6} = 1 \Rightarrow x = 6$$

Здесь подошли все $x \in [-6; 6] \cap \mathbb{Z} \setminus \{6\}$

б) Ответ: 1) ~~$y \in [-2; 1] \cap \mathbb{Z}, x \in [-6; 6] \cap \mathbb{Z}$~~

2) ~~$y = 2, x \in [-6; 6] \cap \mathbb{Z} \setminus \{6\}$~~



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
5 ИЗ 5

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Сделаем проверку, соответствуют ли полученные значения ур-ю из п. а): 1) $x+y=2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x$ и y одной четности - подошли пары $(-6; -2); (-4; -2); (-2; -2); (0; -2); (2; -2); (4; -2); (6; -2); (-1; -1); (-5; -1); (-3; -1); (1; -1); (3; -1); (5; -1)$ + также, только с противоположным y , кроме пары $(6; 2); (-6; 0); (-4; 0); (-2; 0); (0; 0); (2; 0); (4; 0); (6; 0)$. Всего $13 \times 2 - 1 + 7 =$

$$2) \begin{cases} y = -\frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x, y \notin \mathbb{Z}$$

= 32 пары.

3) $3x-y=2l$ - аналогично x и y одной четности, тогда все пары, это и в (1)

Ответ: 32 пары.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть в конце месяца билетов было m , одноклассников было n . $m, n \in \mathbb{N}$

C_n^4 - число способов раздать 4 билета

C_n^m - m билетов.

C_{n-2}^2 - кол-во способов, при которых и Тетя, и Вася попали на концерт (они точно получили билеты, оставшиеся 2 билета надо распределить между остальными $n-2$ -мя)

C_{n-2}^{m-2} - то же, но при m билетах.

А - "Тетя и Вася попали на концерт"
 p_1 - в-сть А в начале месяца, p_2 - в конце.

$$6p_1 = p_2. \quad p_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}, \quad p_2 = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m}$$

$$\frac{6 C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m}$$

$$\frac{6 \cdot \frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!}}{\frac{n!}{4! \cdot (n-4)!}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(m-2)! \cdot (n-m)!}}{\frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{\frac{6}{2!}}{\frac{1}{4!}} = \frac{\frac{1}{(n-2)!}}{\frac{1}{n!}}$$

$$72 = n(n-1)$$

$$n^2 - n - 72 = 0$$

$$n_1 = 9, n_2 = -8 \notin \mathbb{N} \Rightarrow \text{не подходит}$$

Тогда $n = 9$.

Ответ: 9 чисел.

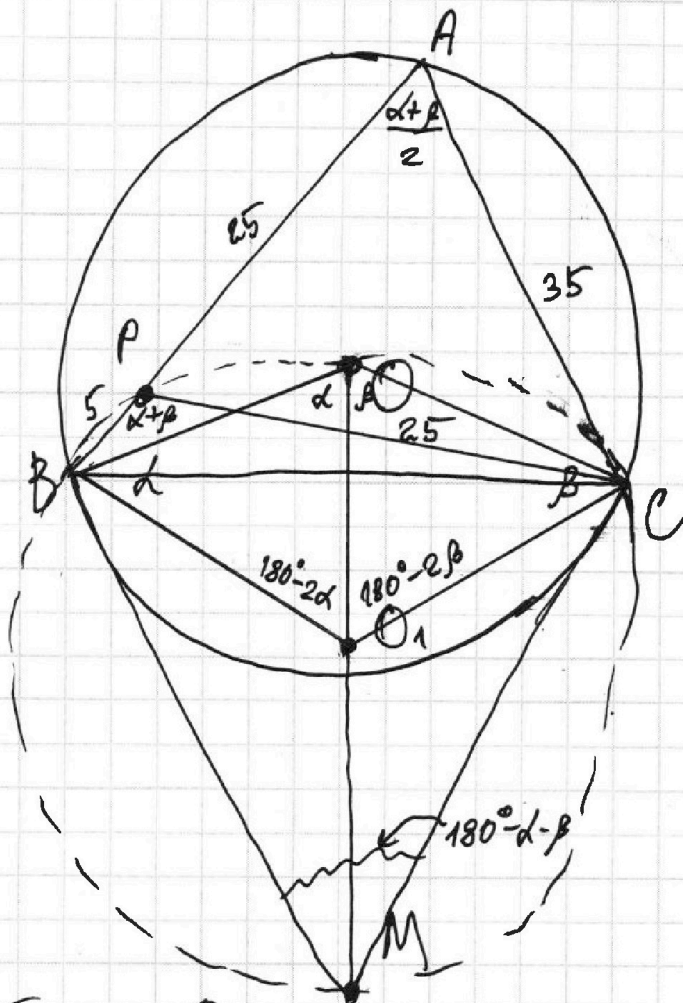


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1. Пусть O_1 - центр ω_2 . Тогда $O_1O = O_1C = O_1B$.
2. Обозначим $\angle BOO_1$ за α , $\angle COO_1$ за β .
 $OO_1 = BO_1 \Rightarrow \triangle BOO_1$ - равнобедренный $\Rightarrow \angle BOO_1 = \angle OBO_1 = \alpha$
Аналогично $\angle COO_1 = \angle OCO_1 = \beta$
3. $\angle A$ - вписанный при центральном $\angle BOC \Rightarrow 2\angle A = \angle BOC \Rightarrow \angle A = \frac{\angle BOC}{2} =$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{ACP} = \sqrt{\frac{85}{2} \left(\frac{85}{2} - 35 \right) \left(\frac{85}{2} - 25 \right) \left(\frac{85}{2} - 25 \right)} = \left(\frac{85}{2} - 25 \right) \cdot \sqrt{\frac{85}{2} \left(\frac{85}{2} - 35 \right)} = \frac{35}{2} \cdot \sqrt{\frac{85}{2} \cdot \frac{15}{2}} =$$
$$= \frac{35}{4} \cdot \sqrt{85 \cdot 15} = \frac{35}{4} \cdot 5 \sqrt{17 \cdot 3} = \frac{175\sqrt{51}}{4}$$

9. $\frac{S_{ABC}}{S_{ACP}} = \frac{AB}{AP}$ (Δ с общей высотой)

$$S_{ABC} = \frac{AB}{AP} S_{ACP} = \frac{25+5}{25} \cdot \frac{175\sqrt{51}}{4} =$$
$$= \frac{210\sqrt{51}}{4} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

Ответ: $\frac{210\sqrt{51}}{4} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

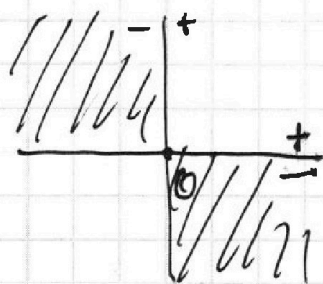
СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \text{ - окр. с центром } (0;0) \\ \text{и радиусом } 13, \text{ решение к-ва-} \\ (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) = 0 \text{ область внутри} \\ \text{кр. и она сама.} \end{cases}$$

$$x = -5\sqrt{2}\cos\alpha; y = -5\sqrt{2}\sin\alpha - 2$$

перпендикулярные прямые, паралл.
оси координат. Вершина: $O(-5\sqrt{2}\cos\alpha; -5\sqrt{2}\sin\alpha)$. Заметим: $x_0^2 + y_0^2 = 50 \Rightarrow$
 $y_0 \Rightarrow O$ лежит на окр. с
центром $(0;0)$ и радиусом $5\sqrt{2} =$
 $= \sqrt{50}$



Решение 1-го к-ва- заштри-
хованная обл. на рисунке
слева, зависит от поло-
жения вершины.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

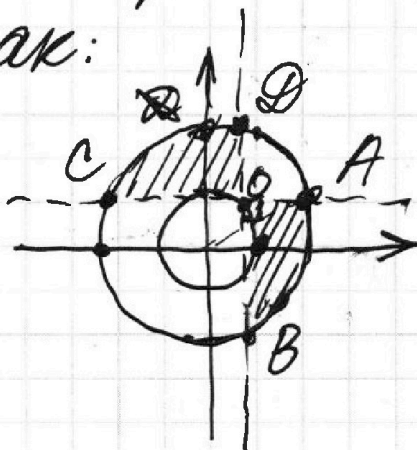
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

То есть ^{системы} мн-во решений будет выглядеть так:



т.е. 2 прямые перпендикулярны,
то: $\frac{\angle C D + \angle A B}{2} = 90^\circ \Rightarrow \angle C D + \angle A B =$
 $= \frac{\angle \omega}{2} = \pi \cdot 13 = \pi R$ (углы между пересек.

хордами равны попарно дуг).

Осталось найти максимальную
сумму $AC + BD$.

Заметим, что $AC \cdot AO = BD \cdot BO = \text{const}$
(см. далее)

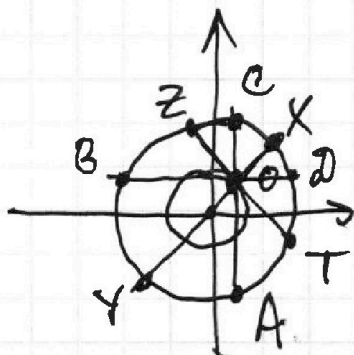


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC \cdot AO = YO \cdot XO = \\ = (R+r)(R-r) = R^2 - r^2$$

$$AC \cdot AO \cdot BO \cdot OD = (R^2 - r^2)^2 = \\ = (169 - 50)^2 = 149^2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☒

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Получаем картину:





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☒

4
☒

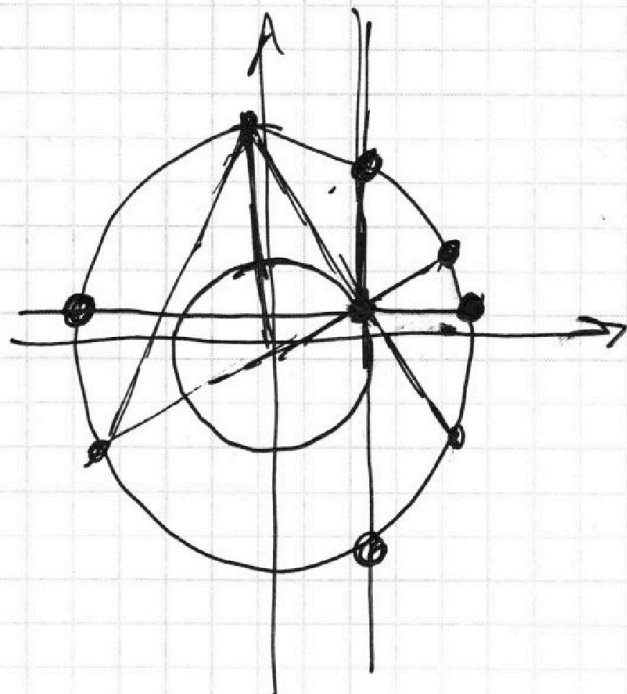
5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



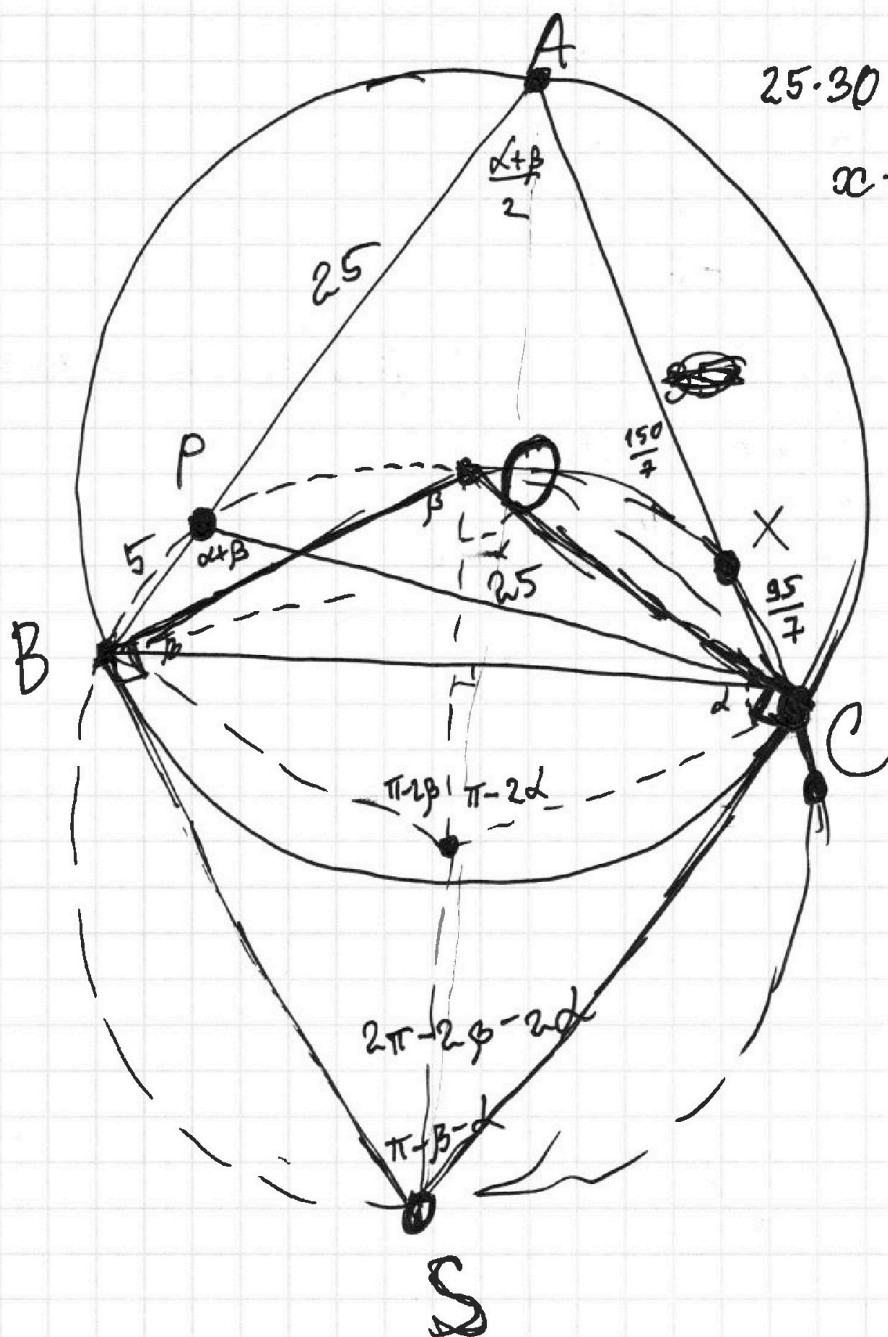


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned} 25 \cdot 30 &= 35x \\ x &= \frac{25 \cdot 30}{35} = \\ &= \frac{150}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 35 \\ \times 7 \\ \hline 245 \\ - 150 \\ \hline 95 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$= \frac{\angle BOO_1 + \angle COO_1}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

4. По сумме углов Δ для ΔBOO_1 :

$$\alpha + \alpha + \angle BO_1O = 180^\circ \Rightarrow \angle BO_1O = 180^\circ - 2\alpha$$

Аналогично $\angle CO_1O = 180^\circ - 2\beta$.

5. Пусть $OO_1 \cap \omega_2 = M$

$\angle BMC$ - вписанный в ω_2 при центральном $\angle BOC$ (оба опираются на BC) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BMC = \frac{\angle BOC}{2} = \frac{\angle BO_1O + \angle CO_1O}{2} = \frac{360^\circ - 2\alpha - 2\beta}{2} = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

6. $M \in BC$ - вписанный в $\omega_2 \Rightarrow \angle BPC + \angle BMC = 180^\circ$.

$$\angle BPC = 180^\circ - \angle BMC = 180^\circ - (180^\circ - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$$

7. $\angle BPC$ - внешний для $\Delta APC \Rightarrow \angle A + \angle ACP =$

$$= \angle BPC \Rightarrow \angle ACP = \angle BPC - \angle A = \alpha + \beta - \frac{\alpha + \beta}{2} =$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{2} = \angle A \Rightarrow \Delta APC - \text{равнобедренный},$$

$$AP = CP = 25.$$

8. По формуле Герона:

$$S_{APC} = \sqrt{p_1(p_1 - AC)(p_1 - AP)(p_1 - PC)}, \quad p_1 = \frac{AC + AP + PC}{2} =$$

$$= \frac{25 + 25 + 35}{2} = \frac{85}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$5\sqrt{2} > 13$$

$$\begin{cases} -5\sqrt{2} \cos \alpha \geq +13 \\ -5\sqrt{2} \sin \alpha \geq +13 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha \leq -\frac{13}{5\sqrt{2}} \\ \sin \alpha \leq -\frac{13}{5\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$2\pi R = 26\pi$$

$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$$

$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) = 0$$

$$x = -5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$\begin{cases} x \leq -\frac{13}{5\sqrt{2}} \\ y \leq -\frac{13}{5\sqrt{2}} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha \geq \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☒	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1°. ~~C=33~~ $k \neq 7$: $B:77$ - маленький
случай

2°. $C=39$

$$39 \cdot 1111k \cdot B = n^2$$

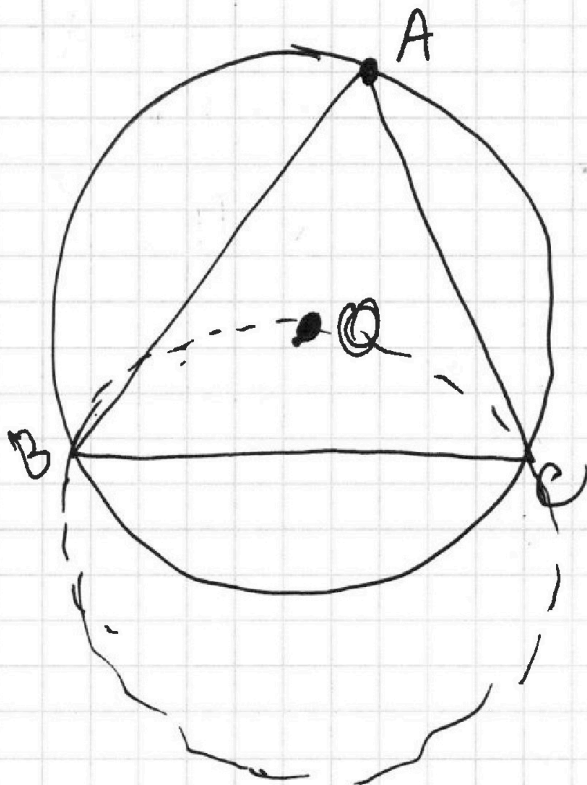
$$13^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11k \cdot B = n^2 \quad - \text{маленький}$$

случай, $B:77$ или $B:33$.

3°. $C=33$

$$11^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13k \cdot B = n^2$$

$$B:13 \cdot 7 \text{ или } B:13 \cdot 3$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☒7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \frac{\pi}{6} x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x =$$

$$= -2 \sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \sin \pi x =$$

$$= -\sin \frac{\pi x - \pi y}{2} \cos \pi x$$

$$\frac{\pi x + \pi y}{2} = \pi k$$

$$x + y = 2k \quad -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$-1 \leq \frac{y}{2} \leq 1$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

$$\operatorname{tg} \pi x = -\operatorname{tg} \frac{\pi x - \pi y}{2}$$

$$\operatorname{tg} \pi x = \operatorname{tg} \frac{\pi y - \pi x}{2}$$

$$\pi x = \frac{\pi y - \pi x}{2} + \pi k$$

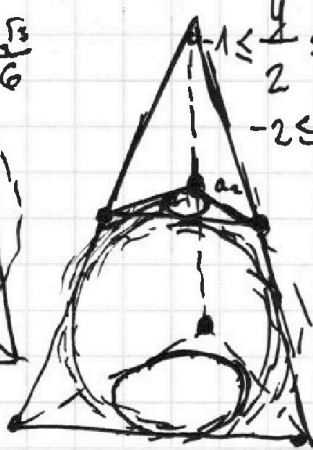
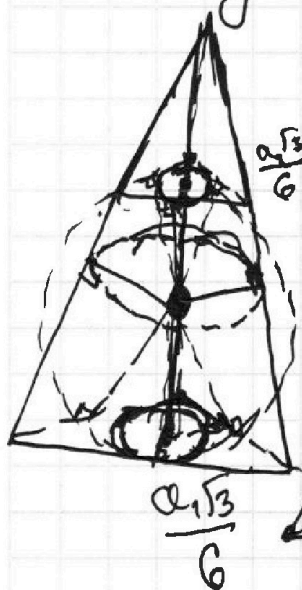
$$2x = y - x + 2k$$

$$3x - y = 2k$$

$$3 \cdot \frac{a_1 H}{2} = \frac{3}{2} a_1 h$$

$$3 \cdot \frac{a_2 h}{2} = \frac{3}{2} a_2 h$$

$$\frac{3 \cdot \frac{a_1 + a_2}{2} (H - h)}{4}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \infty \text{ ммк}$$

$$\text{ммк} \cdot B \cdot C = n^2$$

$$1181 = 11 \cdot 107$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = R^2$$

$$\frac{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}}{(r_1 + r_2)(a_1 + a_2)} =$$

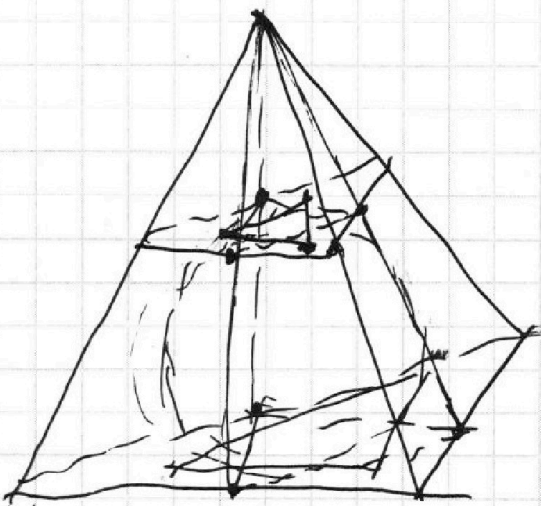
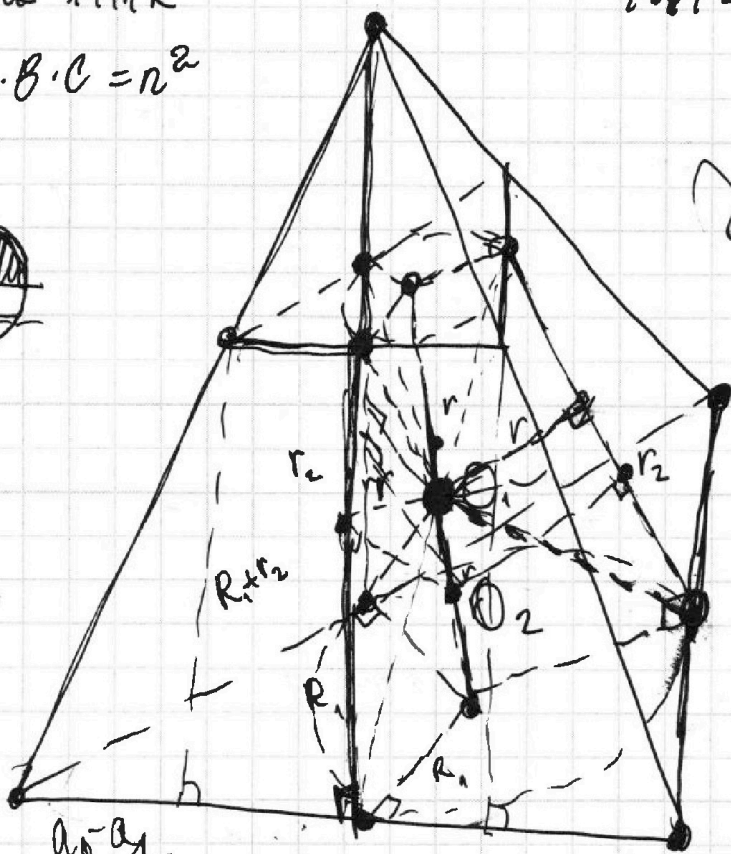
$$= \frac{a^2 \sqrt{3}}{2(r_1 + r_2)(a_1 + a_2)} =$$

$$= \frac{a^2 \sqrt{3}}{2\left(\frac{a_1 \sqrt{3}}{6} + \frac{a_2 \sqrt{3}}{6}\right)(a_1 + a_2)} =$$

$$= \frac{3a^2}{(a_1 + a_2)^2}$$

$$\frac{a_1}{a_1 + a_2}$$

$$\frac{a_1^2}{(a_1 + a_2)^2}$$



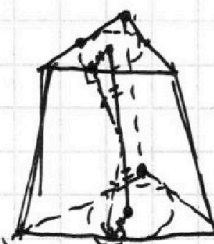
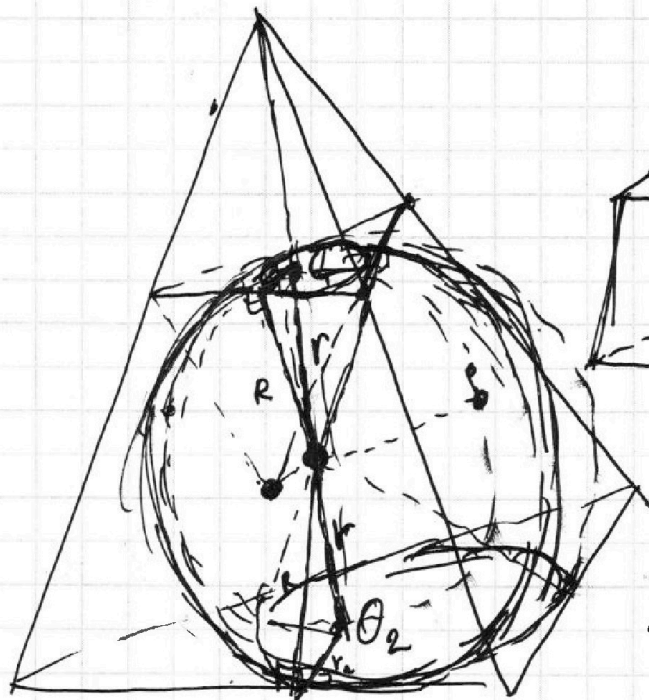
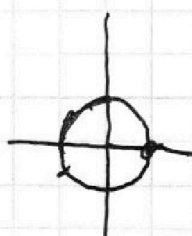


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

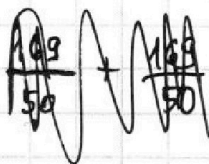
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

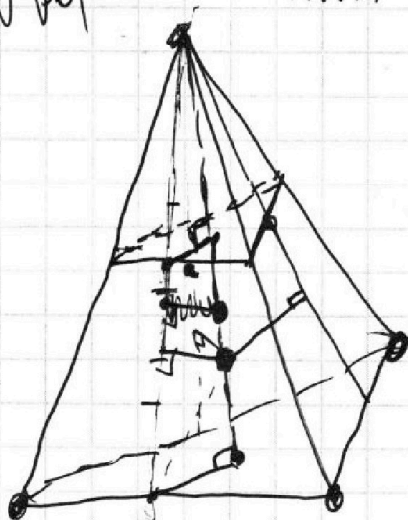


$$2r \frac{a_1}{a_1 + a_2} = 1 - \frac{a_2}{a_1 + a_2}$$
$$= 1 - \frac{2r}{H}$$

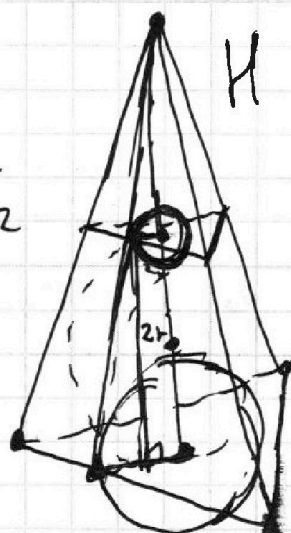


$$\sin k \cdot B \cdot C = r^2$$

$$\frac{a_2}{a_1 + a_2} = \frac{2r}{H}$$



$$\frac{a_1}{a_2}$$



$$2r = \frac{a_2}{a_1 + a_2} H$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☒

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \\ & x, y > 0 ; \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \\ & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{\cancel{xy-2y+2x-4}} \\ & \frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+x+5}{(x-2)(y+2)} \\ & xy = (x-2)(y+2) \\ & \sqrt{xy} = xy - 2y + 2x - 4 \\ & 2y - 2x = -4 \\ & y - x = -2 \Rightarrow x = y + 2 \\ & x^3 - y^3 - 6xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 6xy = \\ & = 2(x^2 + xy + y^2) - 6xy = \\ & = 2x^2 - 4xy + 2y^2 = 2(x-y)^2 = 8 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☒

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено болсе одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓1

$$A \cdot B \cdot C = n^2$$

$$A = \overline{aaaa} \Rightarrow A: 1111 \Rightarrow A: 11, A: 7, A: 13$$

$$10^3 \leq B < 10^4, \text{ одна цифра } 6$$

$$C: \overline{36} \text{ или } \overline{63}$$

$$A = 1111k, k \in \{1; 2; \dots; 9\} \Rightarrow A: 11, A: 13, \text{ но}$$

$$A: 121 = 11^2, A: 169 = 13^2$$

$$\text{Плюс } BC: 11, BC: 13 \Rightarrow BC: 143$$

$$B = \overline{x_1 x_2 6} \text{ или } B = \overline{x_1 6 x_3} \text{ или } B = \overline{8 x_2 x_3}$$

$$B: 13 \text{ или } C: 13 \quad B: 11 \text{ или } C: 11$$

$$\begin{array}{r} 117 \\ 130 \\ 143 \\ 156 \\ 286 \\ 416 \\ 546 \\ 676 \\ 806 \\ 936 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 39 \end{pmatrix}$$

$$\text{Иначе проверить } \overline{33} \quad B: 143$$

$$1^\circ C = 13, A = 1111k$$

$$13 \cdot 1111k \cdot B = n^2$$

$$13^2 \cdot 7 \cdot 11k \cdot B = n^2$$

$$k=7: 13^2 \cdot 7^2 \cdot 11B = n^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = 11a^2 - \text{малень}$$

$$100 \leq 11a^2 < 1000 \text{ кий случай}$$

$$\frac{100}{11} \leq a^2 < \frac{1000}{11}$$

$$10 \leq a \leq 30$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 13 \\ \times 8 \\ \hline 104 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 117 \\ 130 \\ 143 \\ 156 \\ 286 \\ + 130 \\ \hline 416 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1000 \overline{) 1180} \\ - 880 \\ \hline 300 \\ - 220 \\ \hline 80 \end{array}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

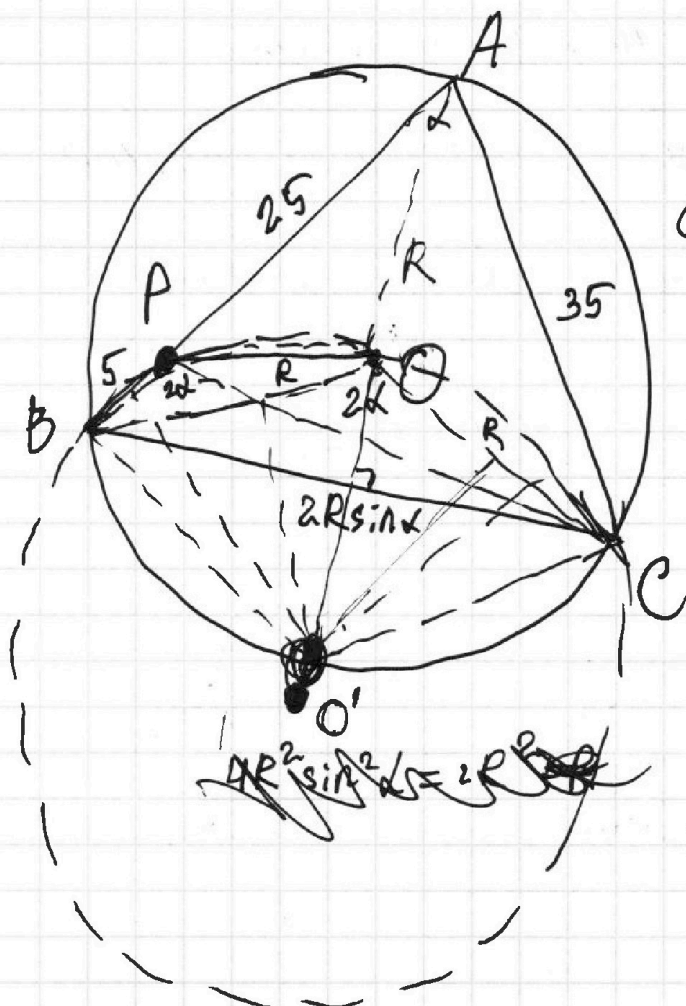
5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$CP^2 = 25^2 + 35^2 - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \cos \alpha$$

$S_{ABC} = ?$

$$R = \frac{abc}{4S}$$

$$S = \frac{abc}{4R} =$$

$$= \frac{abc}{4R}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☒

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

n одинадцати классников.

C_n^4 способов раздать 4 билета.

Именно этим двоим: закрепляем 2 билета за ними, C_{n-2}^2

C_n^m

$$6 \cdot \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{C_{n-2}^{m-2}}{C_n^m}$$

$$\frac{6 \cdot \cancel{(n-2)!}}{2! \cdot \cancel{(n-4)!} \cdot \frac{n!}{4! \cdot \cancel{(n-4)!}}} = \frac{\cancel{(n-2)!}}{(m-2)! \cdot \cancel{(n-m)!} \cdot \frac{n!}{m! \cdot \cancel{(n-m)!}}}$$

$$\frac{\frac{6}{2}}{\frac{1}{24}} = \frac{1}{\frac{(m-2)!}{m!}}$$

$$72 = m(m-1)$$

$$m=9$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒

2 ☒

3 ☒

4 ☐

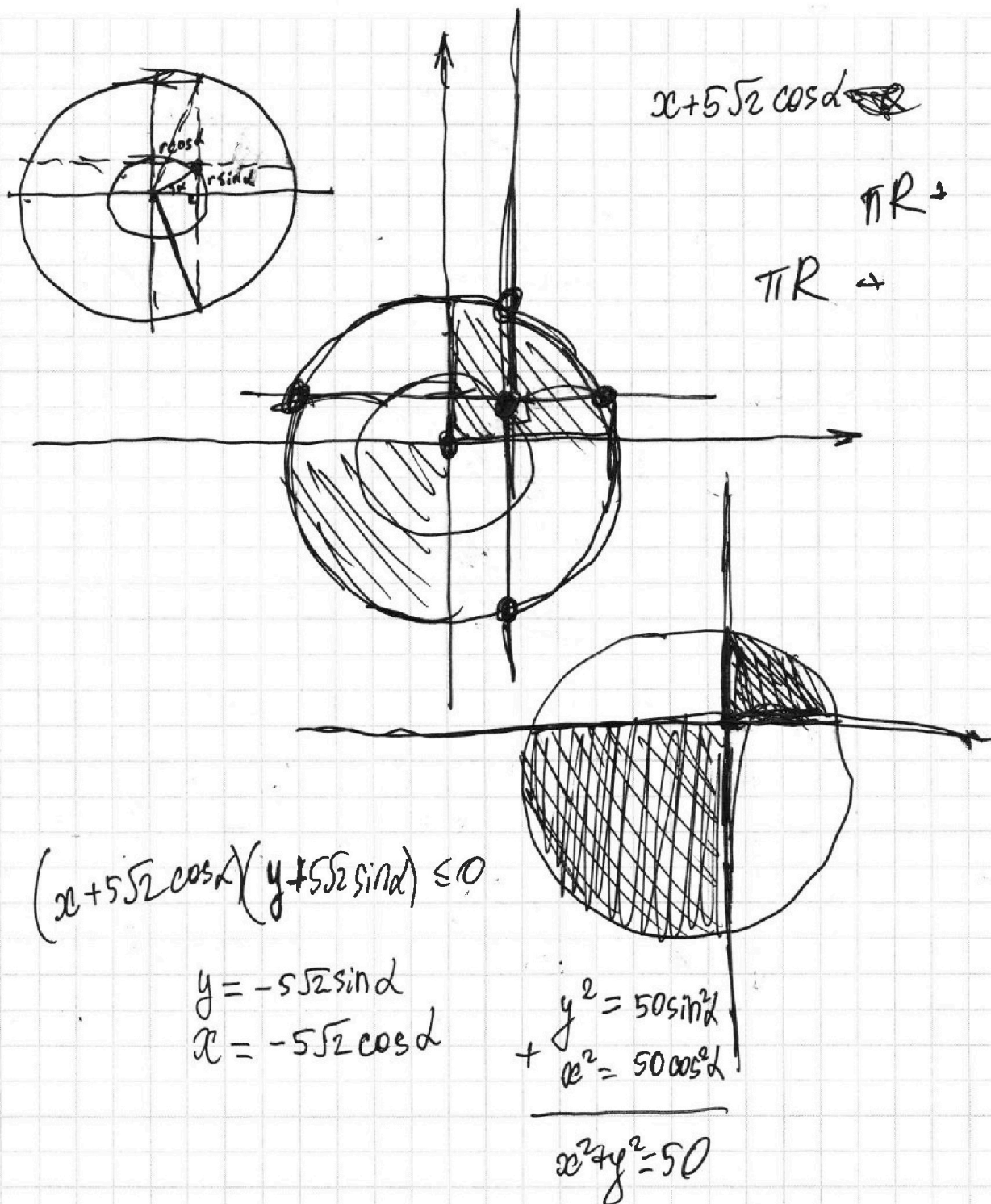
5 ☐

6 ☐

7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

