



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 1.

Пусть $A = \overline{xxxx}$, тогда $A = 1000x + 100x + 10x + x = 1111x$, $x \in \mathbb{N}, x \leq 9$.

$1111 = 11 \cdot 101$, числа 11 и 101 — простые.

$x \leq 9 \Rightarrow x \nmid 101, x \nmid 11$

~~Следовательно~~

$$A : 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101 \quad \left. \begin{array}{l} \\ A \cdot B \cdot C - \text{натур. квадр.} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow B : 101 \text{ или } C : 101, \text{ но } C \leq 99 \text{ м.к. око}$

двоичное, соответственно $C : 101 \Rightarrow$

$\Rightarrow B : 101$.

Пусть $B = 101 \cdot y \text{ дв., } y \in \mathbb{N}, y \leq 9 \Rightarrow B = \overline{y0y}$

B содержит хотя бы один цифру 1 $\Rightarrow y = 1$,

$B = 101$.

$$\text{Аналогично, } A : 11 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11 \quad \left. \begin{array}{l} \\ A \cdot B \cdot C - \text{натур. квадр.} \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 11^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow B : 11 \text{ или } C : 11, \text{ но } B = 101 : 11 \Rightarrow C : 11 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 55 \text{ м.к. око двоичн., содержит цифру 5.}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Имел: $\begin{cases} A = 11 \cdot 101 \cdot x \\ B = 101 \\ C = 55 = 11 \cdot 5 \end{cases}$

$A \cdot B \cdot C - \text{неч. квадр} \Rightarrow x = 5. \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 5555.$

Ответ: $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 2.

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$$

Запишем условие неизменности K при уменьшении x на 3 и увеличении y на 3 в виде ур-я:

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{(x-3)+(y+3)+1}{(x-3)(y+3)}, \quad x \neq 3, (y > 0 \text{ по усл.} \Rightarrow y+3 > 0).$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow xy = (x-3)(y+3) \Rightarrow xy = xy + 3x - 3y - 9 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = x - 3$$

$$\begin{aligned} \text{Найдём } M: M &= x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = \\ &= (x - (x-3))(x^2 + x(x-3) + (x-3)^2) - 9x(x-3) = \\ &= 3(x^2 + x^2 - 3x + x^2 - 6x + 9) - 9x^2 + 27x = \\ &= 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27x = 27 \end{aligned}$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + k_1 \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = \pi k_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{2} + k_1\right) - y}{2} = k_2 \Rightarrow y = \frac{1}{2} - 2k_2 + k_1$$

\Rightarrow Подходит $(x; y)$ вида $(\frac{1}{2} + k_1; \frac{1}{2} - 2k_2 + k_1)$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) = 0$, то $|\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)| = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cos \alpha = 0. \quad (4)$$

\Rightarrow Этот случай аналитически предвидимо.

Начнем, что при $\cos \alpha \neq 0, \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \neq 0$

$$(3) \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\alpha - \beta}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{2} - x = \frac{x - y}{2} + k \Rightarrow 1 - 2x = x - y + 2k \Rightarrow y = 3x - 1 + 2k \quad (5)$$

$$\begin{cases} y = 3x - 1 + 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha \neq 0 \quad \text{из } (4) \Rightarrow \text{если } \cos \alpha \neq 0, \text{ то } \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \neq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x - 1 + 2k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

\Rightarrow Подходит $(x; y)$ вида $(\frac{1}{2} + k_2, 3(\frac{1}{2} + k_2) - 1 + 2k_1)$,
 $\operatorname{tg} k_2 \in \mathbb{Z}$, x — любое действ. $\neq \frac{1}{2} + k_2, k_2 \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, если все под适合自己
 пары $(x; y)$:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Ответ для q):

1) $(d; 1+2k-d)$, где k - любое $\in \mathbb{Z}$, d - любое

2) $(\frac{1}{2} + k_1; \frac{1}{2} + 2k_2 + k_1)$, где k_1, k_2 - любые $\in \mathbb{Z}$ действит.

3) $(d; 3d - 1 + 2k_1)$, где d - любое действит.,
которое $\neq \frac{1}{2} + k_2$, $k_2 \in \mathbb{Z}$, k_1 - любое $\in \mathbb{Z}$.

5)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3.

$$a) (\sin(\pi x) - \sin(\pi y)) \sin(\pi x) = (\cos(\pi x) + \cos(\pi y)) \cos(\pi x)$$

Пусть $\alpha = \pi x$, $\beta = \pi y$, тогда

$$(\sin \alpha - \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

$$2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \sin \alpha = 2 \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos \alpha$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \left(\sin \alpha \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos \alpha \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0 \\ \sin \alpha \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos \alpha \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin \alpha \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos \alpha \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0 \end{array} \right. \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x+y = 1+2k$$

$$\underline{y = 1+2k-x}$$

\Rightarrow Подходит все $(x; y)$ вида $(x; 1+2k-x)$, где $k \in \mathbb{Z}$, x - любое действ. число.

$$(2) \Rightarrow \sin \alpha \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \cos \alpha \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad (3)$$

~~или~~ если $\cos \alpha = 0$, тогда $\sin \alpha = \pm 1$,

$$\sin \alpha \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k_1, k_1 \in \mathbb{Z} \\ \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{2} = \pi k_2, k_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 4.

Пусть билетов a ,

пусть в классе n человек,

в конце месяца стало $x+4$ билетов,

$$x \in \mathbb{N}.$$

В начале месяца как-то вариант способов выбрать ~~человека обладателя билетов~~ билетов:

$$C_n^4 = \frac{n!}{4! \cdot (n-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

Если 2 билета зафиксированы (для Пети и для Васи), то как-то способов

выбрать обладателей оставшихся $2-x$

$$\text{билетов можно: } C_{n-2}^2 = \frac{(n-2)!}{2! \cdot (n-4)!} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$$

Вероятность того, что Петя, и Вася попадут на концерт в начале месяца:

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Аналогично рассмотренной ситуации в конце месяца. Одного как-то варианта:

$$C_n^{4+x} = \frac{n!}{(4+x)! \cdot (n-x-4)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot (n-4)(n-5)\dots}{(4+x)!} \times \text{и т.д.}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Как-то „благодаря тому же“ вариантов:

осталось билетов для друзей

$$\binom{x+4-2}{n-2} = \binom{x+2}{n-2} = \frac{(n-2)!}{(x+2)! \cdot (n-2-x-2)!} = \frac{(n-2)!}{(x+2)! \cdot (n-4-x)!} =$$

$$= \frac{(n-2)(n-3) \cdot (n-4)(n-5) \dots}{(x+2)!} \quad \times \text{ множитель}$$

Вероятность в конце места:

$$P_2 = \frac{\binom{x+4-2}{n-2}}{\binom{n+x}{n}} = \frac{(4+x)!}{(2+x)! \cdot (n-1)n}$$

По условию: $P_1 \cdot 3,5 = P_2$

$$\frac{7}{2} \cdot \frac{12}{n(n-1)} = \frac{(4+x)!}{(2+x)! \cdot n(n-1)}$$

$$\frac{(4+x)!}{(2+x)!} = 42$$

$$(x+3)(x+4) = 42$$

$$x^2 + 7x - 30 = 0$$

$$D = 49 + 120 = 169 = 13^2$$

$$x_1 = \frac{-7 + 13}{2} = 3 \quad \text{подходит}$$

$$x_2 = \frac{-7 - 13}{2} = -10 < 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

Таким образом, в конце места было $4+x=7$ билетов.

Ответ: 7.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 4

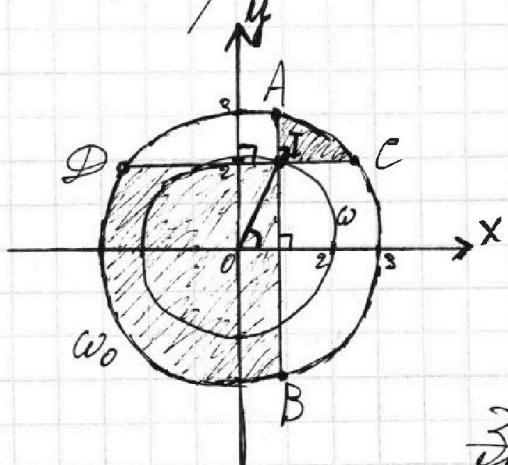
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 6.

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 4 \end{cases} \quad (1)$$

— круг с центром $(0;0)$ и радиусом 2 .
 $\Rightarrow \begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x < 2\cos\alpha \\ y < 2\sin\alpha \end{cases}$ назовём его ω_0

Постройте дополнительную окружность ω с центром $\Phi(0;0)$ и радиусом 2 .



Пусть $I(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$

Тогда $I \in \omega$ м.н.

$$(2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha)^2 = 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4 = 2^2$$

Заметим, что

Остальные обозначения см. на рис.

$(AB \perp OX, CD \perp OY, I \in AB, CD)$

Нетрудно заметить, что фигура Φ имеет вид заштрихованной области.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 9

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что граница Φ состоит из двух дуг ($\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{BD}$), а также двух отрезков (AB и CD).

Из геометрии $\Rightarrow \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = \angle AIC + \angle BID$
($\overset{\frown}{AC}, \overset{\frown}{BD}$ — величины соотв. дуг) по Th о

сумме вертикальных величин дуг, опирающихся на вертикальные углы.

Таким образом, $\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ при $\forall L$.

Найдём длины дуг $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{BD}$.

Пусть l_0 — сумма длин $\overset{\frown}{AC}$ и $\overset{\frown}{BD}$.

$$l_0 = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{2\pi} \cdot (2\pi \cdot 3) = 3\pi$$

длина границы ω_0

l_0 — инвариант (не зависит от L),
значит нам надо максимизировать
 $AB + CD$.

Пусть $AB = h$, $CD = d$,

$$2\cos L = a, 2\sin L = b$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
3 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Положа координаты I - $(a; b)$. \Rightarrow

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 4 \quad \text{м.н. } I \in \omega \Rightarrow b^2 = 4 - a^2 \quad (2)$$

Введём координаты точек: A($a; y_a$),

B($a; y_b$), C($x_c; b$), D($x_d; b$).

$$A \in \omega_0 \Rightarrow a^2 + y_a^2 = 9 \quad \boxed{\star: A \in \underline{\text{границе} \omega_0}}$$

$$\Leftrightarrow y_a = \sqrt{9 - a^2} \quad (y_a \geq 0 \text{ по обозна-} \\ \text{чению}).$$

Из симметрии $y_B = -y_a$.

$$\text{Положа } h = \sqrt{9 - a^2} \quad y_a - y_B = 2\sqrt{9 - a^2}$$

$$\text{Аналогично } d = \sqrt{9 - b^2} \quad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow d = \sqrt{5 + a^2}$$

$$\text{Пусть } f(a) = h + d = 2\sqrt{9 - a^2} + \sqrt{5 + a^2}$$

Найдём f_{\max} , $|a| \leq 2$ м.н. $|2\cos a| \leq 2$.

$$f'(a) = 2 \left(\frac{-2a}{2\sqrt{9-a^2}} + \frac{2a}{2\sqrt{5+a^2}} \right) = 2a \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+5}} - \frac{1}{\sqrt{9-a^2}} \right) = \\ = 2a \left(\frac{\sqrt{9-a^2} - \sqrt{a^2+5}}{\sqrt{a^2+5} \sqrt{9-a^2}} \right)$$

Определим, когда $\sqrt{9-a^2} - \sqrt{a^2+5} \geq 0$

$$\sqrt{9-a^2} \geq \sqrt{a^2+5}$$

$$9 - a^2 \geq a^2 + 5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

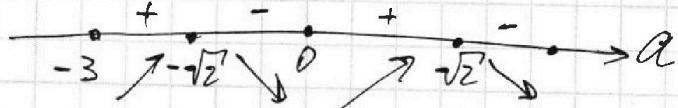
- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
4 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2a^2 \leq 4 \Rightarrow a^2 \leq 2 \Rightarrow |a| \leq \sqrt{2}$$

Таким образом, можем показать
области возрастания и убывания $f(a)$:



Кандидаты в максимумы: $a = \sqrt{2}; -\sqrt{2}$.

$$f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = 2(\sqrt{9-2} + \sqrt{5+2}) = 4\sqrt{7}$$

Найдём α , при котором

$$\alpha = \pm\sqrt{2}, \quad \alpha = 2\cos\alpha = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Получаем задачу нахождения, что такой α существует.

Максимальное значение функции:

$$M_{\max} = l_0 + f(\sqrt{2}) = 3\pi + 4\sqrt{7}$$

Отв: $M_{\max} = 3\pi + 4\sqrt{7}$,

$$\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

$$A = \overbrace{aaaa}^{\text{4x}} = 1111a$$

$$\frac{y_1 z}{5x} =$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{ctg} \alpha$$

$$A = 1111a \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$B = 100b + 10c + d$$

$$C = 50 + e \text{ или } 10e + 5$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \right)$$

$$= \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) -$$

$$1111 \mid 11 - \sin \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) +$$

$$101 \mid 101 + \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) =$$

$$1 = 2 \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right)$$

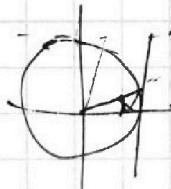
$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{xy}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy$$

$$\cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \sin \alpha = \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha-\beta}{2} \right) \cos \alpha$$

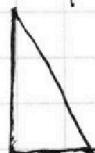
$$ABC : 101 \Rightarrow ABC : 101^2$$

$$B : 101$$



$$B = 101x$$

$$C : 11$$



$$C = 55 = 11 \cdot 5$$

$$5555$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{(x-3)+(x+3)+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{x-3}$$

$$OD^2 : x, y \neq 0, x \neq 3, y \neq -3,$$

~~$$xy = x^2 + y^2 + 3x - 3y - 9$$~~

$$x - y - 3 = 0 \quad y = x - 3$$

$$(x-x+3)(x^2 + x^2 - 3x + x^2 - 6x + 9) - 9x^2 + 27x$$

$$- 9x^2 - 27x + 27 - 9x^2 + 27 = 87(2-x)$$

$$(\sin \alpha x - \sin \alpha y) \sin \alpha x = (\cos \alpha x + \cos \alpha y) \cos \alpha x$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2} \right) + \cos \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2} \right) =$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

ЧЕРНОВИК

π B n

C_n^4

$$\frac{C_n^4}{C_{n+2}^4} \cdot \frac{7}{2} = \frac{C_n^{2+x}}{C_{n+2}^{4+x}} = 2x \left(\frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{5+x^2}} + \frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{9-x^2}} \right)$$

$$\frac{\frac{n!}{2 \cdot (n-2)!}}{(n-2)!}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(n-1) \cdot n}{\frac{1}{24}(n+2)(n+1)(n)(n-1)} = \frac{12}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{7}{2} = \frac{42}{(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}(n-1) \cdot n(n-1) \cdot (n-2) \dots}{(2+x)! \cdot (n+2)(n+1)n(n-1)(n-2) \dots} = \frac{(4+x)!}{(2+x)!} = \frac{42}{1}$$

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha) (y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$(x - 2t)(y \pm 2\sqrt{t-t^2}) \geq 0$$

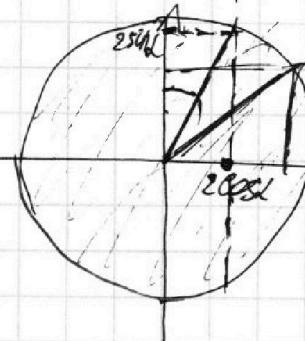
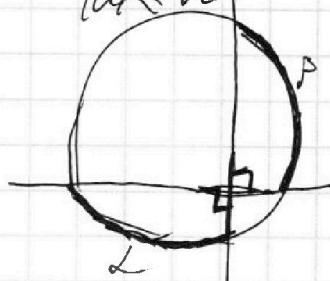
$$y = \sqrt{9-x^2}$$

$$\sqrt{9-x^2} \geq \sqrt{5+x^2}$$

$$9-x^2 \geq 5+x^2$$

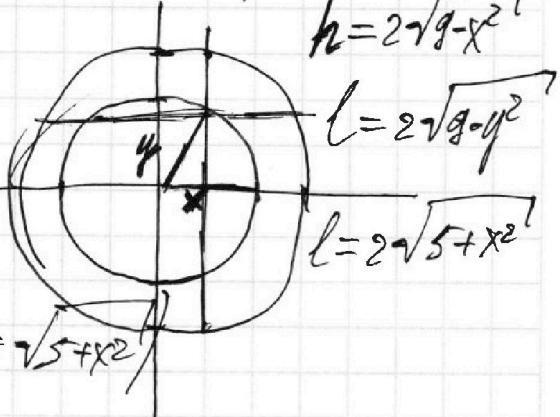
$$x^2 \leq 2$$

$$|x| \leq \sqrt{2}$$



$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \pi/2$$

$$\alpha + \beta = \pi$$



$$h = 2\sqrt{9-x^2}$$

$$y^2 = 9 - x^2$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$y^2 = \pm \sqrt{9-x^2}$$

$$l = 2\sqrt{9-y^2}$$

$$l = 2\sqrt{5+x^2}$$

$$h + l = 2\sqrt{9-x^2} + \sqrt{5+x^2}$$

