МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x =$ $= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} \left(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha\right)\left(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 25. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Т.к. A – четырехзначное число из одинаковых цифр, $A \vdots 1111$. $1111 = 11 \cdot 101$, значит $A \vdots 11$ и $A \vdots 101$.
Тогда т.к. $A \cdot B \cdot C$ является квадратом натурального числа, а 101 – простое, то $A \cdot B \cdot C \vdots 101^2$, ~~зна~~ а т.к. A четырехзначное, оно не делится на 101^2, значит либо B, либо $C \vdots 101$, ~~на~~ но т.к. C – двузначное, то $C \not\vdots 101$, значит $B \vdots 101$. Трехзначные числа, $\vdots 101$ это 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909. Из них только в одном числе есть цифра 2, значит это и есть наше число B, то есть 202. 11 тоже простое число, значит $A \cdot B \cdot C \vdots 11^2$, причем $B \not\vdots 11$, так как ~~оно~~ мы его определ~~ено~~ или однозначно и $202 \not\vdots 11$. Значит либо $A \vdots 11^2$, либо $C \vdots 11$. Но если $A \vdots 11^2$ и $A \vdots 1111$, то $A \vdots 12221$, тогда оно уже не будет четырехзначным. Значит $C \vdots 11$, а т.к. C – двузначное и должно содержать цифру 3, $C = 33$. Пусть $A = 1111 \cdot x$, где $1 \le x \le 9$. Тогда $A \cdot B \cdot C = x \cdot 1111 \cdot 202 \cdot 33 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x$ и это является квадратом натурального числа. Значит $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$ является квадратом, значит $x \vdots 6$, но ~~т.к.~~ $1 \le x \le 9$, значит $x = 6$. Тогда существует лишь одна тройка таких чисел A, B и C: $A = 6666$, $B = 202$, $C = 33$.

Ответ: существует одна тройка чисел A, B, C: $A = 6666$, $B = 202$, $C = 33$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{xy}=\frac{x+y+2}{xy}$$

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{(x-1)(y+1)}=\frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}=\frac{x+y+2}{xy+x-y-1}$$

Т.к. $\frac{x+y+2}{xy}=\frac{x+y+2}{xy+x-y-1}$ и у этих дробей одинаковые числители, то либо числитель $=0$, либо знаменатели равны. В первом случае $x+y+2=0 \Leftrightarrow x+y=-2$, но x и y положительные, значит $x+y \geq 0$, значит $x+y \neq -2$. Тогда остается второй вариант: $xy=xy+x-y-1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=y+1$ Подставим в M: $M=x^3-y^3-3xy=$

$$=(y+1)^3-y^3-3(y+1)y=y^3+3y^2+3y+1-y^3-3y^2-3y=1$$

Ответ. $M=1$ – единственное возможное значение M.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

а) Пусть $\alpha = \pi x,\ \beta = \pi y$

Перепишем уравнение: $(\sin\alpha + \sin\beta)\sin\alpha = (\cos\alpha + \cos\beta)\cos\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = \cos^2\alpha - \cancel{\cos^2}\sin^2\alpha \Leftrightarrow -\cos(\alpha+\beta) = \cos 2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2\alpha + \cos(\alpha+\beta) = 0 \Leftrightarrow 2\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\alpha+\beta = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \alpha-\beta = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Обратная замена

$$\left[\begin{array}{l} 3\pi x + \pi y = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ \pi x - \pi y = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -3x + 1 + 2n,\ n \in \mathbb{Z} \\ y = x - 1 - 2k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $y = -3x + 1 + 2n,\ n \in \mathbb{Z};\ y = x - 1 - 2k,\ k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть ~~одиннадцатиклассников~~ всего n.

Будем считать вероятность как количество благоприятных событий деленное на количество событий всего. Общее кол-во вариантов раздать 4 билета n одиннадцатиклассникам $= C_n^4$, а ~~то что~~ в вариантах, где и Петя, и Вася идут на концерт, мы им обязательно даем билеты и нужно оставшиеся 2 дать кому-то из $n-2$ оставшихся одиннадцатиклассников, это C_{n-2}^2, тогда вероятность, что Петя и Вася пойдут на концерт (в начале месяца) $= \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!\,4!(n-4)!}{2!(n-4)!\,n!} = \frac{4\cdot 3}{n(n-1)}$. Теперь пусть в конце месяца билетов k. Аналогично будем считать вероятность: кол-во событий всего C_n^k, кол-во событий, когда Петя и Вася идут: C_{n-2}^{k-2}.

Тогда вероятность в конце месяца $= \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!\,k!\,(n-k)!}{(k-2)!\,(n-k)!\,n!} =$

$= \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$ ~~$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 2{,}5 \cdot$~~ По условию вероятность в конце месяца в 2,5 раза больше, чем в начале, $\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 2{,}5 \cdot \frac{4\cdot 3}{n(n-1)}$

$k(k-1) = 5\cdot 2\cdot 3 \Leftrightarrow k^2 - k - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=6 \\ k=-5 \text{ не соотв. усл.} \end{array}\right.$

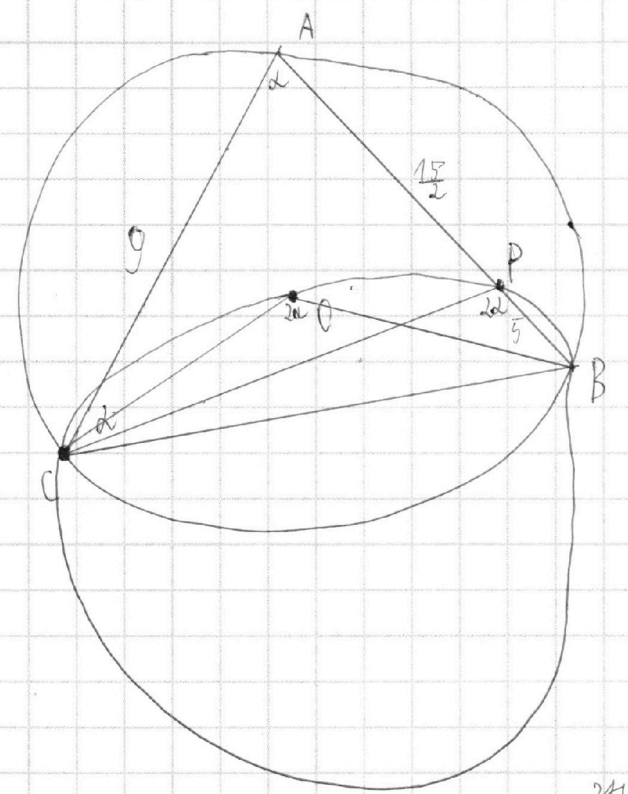
Ответ: на концерт в конце месяца было выделено 6 билетов.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$AP=\frac{15}{2}$

$BP=5$

$AC=9$

Пусть $\angle CAB=\alpha$, тогда $\angle COB=2\alpha$ как центральный. $COPB$ – вписанный, значит $\angle CPB=\angle COB=2\alpha$

$\angle CPB$ – внешний для $\triangle ACP$, значит $\angle ACP=\angle CPB-\angle CAB=2\alpha-\alpha=\alpha$, $\Rightarrow \triangle APC$ – р/б по призн.

$CP=\frac{15}{2}$

Т. косинусов для $\triangle ACP$

$$CP^2=AC^2+AP^2-2\,AC\cdot AP\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{225}{4}=81+\frac{225}{4}-2\cdot\frac{81\cdot 15}{2}\cos\alpha \Leftrightarrow 81\cdot 15\cos\alpha=81 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{15}$. Т.к. $\triangle$ остроугольный, то $\angle\alpha$ лежит в I четверти, $\sin\alpha,\ \cos\alpha>0$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha=\frac{224}{225} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\alpha=\frac{4\sqrt{14}}{15}\\ \sin\alpha=-\frac{4\sqrt{14}}{15}\ \text{не удовл. усл.}\end{array}\right.$$

$$S_\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot AB\cdot\sin\alpha=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot 9\cdot\frac{25}{\cancel{2}}\cdot\frac{4\sqrt{14}}{15}=15\sqrt{14}$$

Ответ: $S_\triangle ABC=15\sqrt{14}$

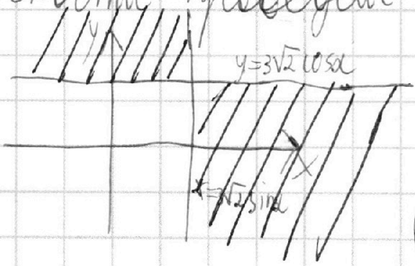
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Множество точек, удовл. усл. $x^2+y^2 \le 25$ это круг с радиусом 5. ~~Также посмотрим на множество точек таких, что $(x-3\sqrt{2}\sin\alpha)\cdot(y-3\sqrt{2}\cos\alpha)=0$. Это такие точки, у которых координата по x $3\sqrt{2}\sin\alpha$, а по~~ Посмотрим на второе неравенство. На коорд. плоскости проведем 2 прямые: $x=3\sqrt{2}\sin\alpha$ и $y=3\sqrt{2}\cos\alpha$:



Они делят плоскость на 4 части и тогда решением неравенства $(x-3\sqrt{2}\sin\alpha)(y-3\sqrt{2}\cos\alpha) \le 0$ будут все точки на этих прямых и все точки в закрашенных частях плоскости (см. рисунок)

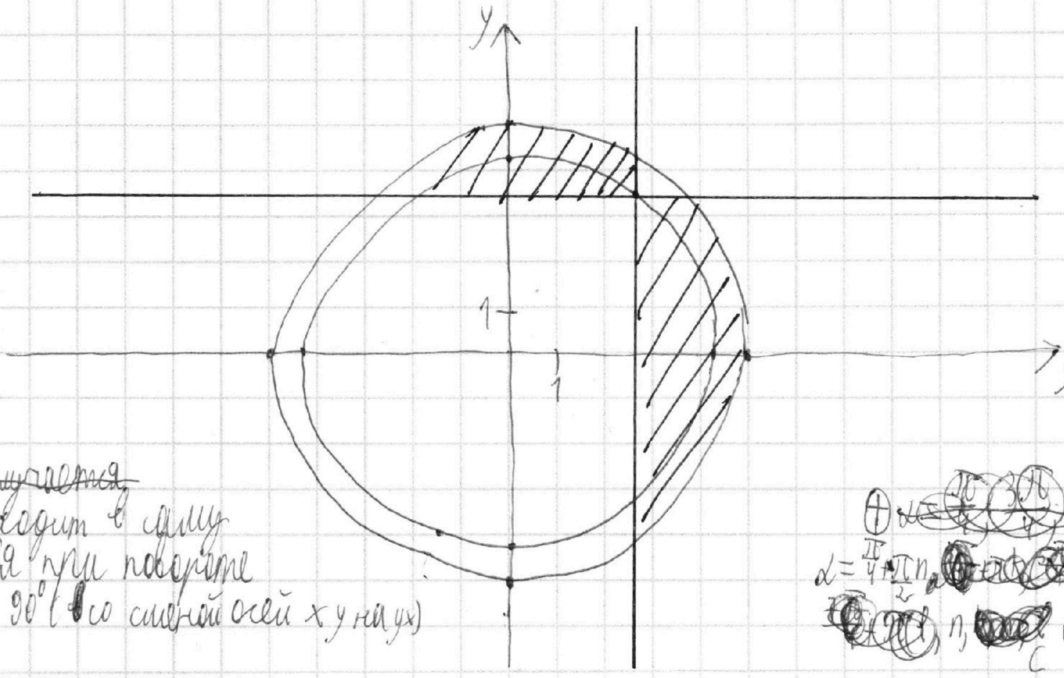
Точку пересечения прямых $x=3\sqrt{2}\sin\alpha$ и $y=3\sqrt{2}\cos\alpha$ назовем центром, заметим, что все такие центры лежат на одной окружности (т.к. расстояние от начала координат равно $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3\sqrt{2}\sin\alpha)^2+(3\sqrt{2}\cos\alpha)^2} = \sqrt{18\sin^2\alpha+18\sin^2\alpha} = \sqrt{18}$)

Тогда нарисуем на коорд. плоскости окр. с радиусом 5, ограничивающую точки, подходящие под второе неравенство и окружность центров. Отметим произвольный центр, тогда фигура $\Phi(\alpha)$ ~~будет состоять из 2~~ является заштрихованной на рисунке. Ее периметр равен сумме $\overset{\text{длин}}{}$ 2 дуг + сумме 2 хорд. Докажем, что сумма $\overset{\text{длин}}{}$ 2 дуг постоянна и равна половине

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

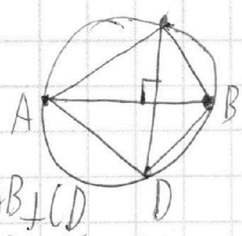
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$\otimes$ ~~получается~~ переходит в саму себя при повороте на $90°$ (со сменой осей x у на yx)

$\oplus$ ~~$\alpha = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$~~

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n$, $n \in \mathbb{Z}$



длины окружности с радиусом 5:

Тогда их длина всегда будет равна $\frac{2\pi R}{2} = \pi R = 5\pi$.

Значит нам просто нужно выбрать угол α, когда сумма хорд большей окр. будет максимальна.

Дано: $AB \perp CD$

AB и CD – хорды

Тогда ~~градусная мера дуги $AD = 2\angle ACD$~~

$\smile AD = 2\angle ACD$

$\smile CB = 2\angle CAB$

$\angle CAB + \angle AD = 90° \Rightarrow \smile AD + \smile CB = 180°$

Тогда $\smile AC + \smile BD$ тоже $= 180°$, т.к. градусная мера всей окр. $360°$.

~~Обозначим за β угол, на данный нам~~

~~Найдем α Данные хорды. Хорды~~ Прямые, которым принадлежат хорды, заданы уравнениями $x = 3\sqrt{2}\sin\alpha$ и $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$. Тогда найдем координаты концов хорд: $x_1^2 + (3\sqrt{2}\cos\alpha)^2 = 25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1^2 = \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} = \sqrt{7\sin^2\alpha} = \left[\begin{array}{l}\sqrt{7}\,|\sin\alpha| \\ -\sqrt{7}\,|\sin\alpha|\end{array}\right.$

Тогда длина хорды, принадлежащей прямой $y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$ $= 2\sqrt{7}|\sin\alpha|$ и т.к. наша картинка симметрична относительно поворота вокруг начала координат на $90°$ $\otimes$, без огр. общности $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$, тогда $2\sqrt{7}|\sin\alpha| = 2\sqrt{7}\sin\alpha$

Аналогично длина второй хорды $2\sqrt{7}\cos\alpha$ тогда их сумма$_{\text{длин}}$ $=$ $2\sqrt{7}\sin\alpha + 2\sqrt{7}\cos\alpha = 2\sqrt{14}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ При $\alpha \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ~~max~~ $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ достигает своего максимума при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ $= 1$, тогда $2\sqrt{14}\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{14}$

Тогда максимальный периметр $= 5\pi + 2\sqrt{14}$ и достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ а т.к. картинка симметрична относ. поворота, то также при $\alpha = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$. Ответ: $M = 5\pi + 2\sqrt{14}$ при $\oplus$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~1~~ ~~2~~ 3 ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ 7

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{xy}=\frac{x+2+y}{xy}$

$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{(x-1)(y+1)}=\frac{x+y+2}{xy-y+x-1}$

224 | 2
112 | 2
56 | 2
28 | 2
14 | 2
7

$16\cdot 14$

32×7

X

$\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4}$

$\frac{\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}\,4\cdot 3\cdot \cancel{2}}{\cancel{2}(n-1)\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}}$

$xy=xy-y+x-1$

$x-y-1=0$

$x=y+1$

$k(k-1)=2{,}5\cdot 4\cdot 3=$

$=5\cdot 6$

$K=6$

$\frac{4\cdot 3}{n(n-1)}$

$(y+1)^3-y^3-3(y+1)y=$

$=y^3+3y^2+3y+1-y^3-3y^2-3y=1$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$(\sin\alpha+\sin\beta)\sin\alpha=$

$=(\cos\alpha+\cos\beta)\cos\alpha$

$\sin^2\alpha+\sin\alpha\sin\beta=\cos^2\alpha+\cos\alpha\cos\beta$

$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$

$\frac{(n-2)!}{\frac{n!}{k!(n-k)!}}\cdot(k-2)!\cdot\cancel{(n-k)}!$

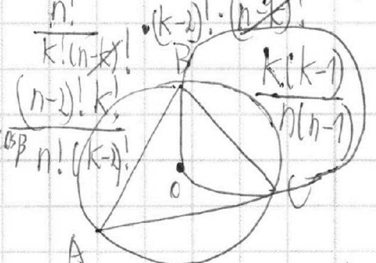
$\frac{(n-2)!\,k!}{n!\,(k-2)!}$

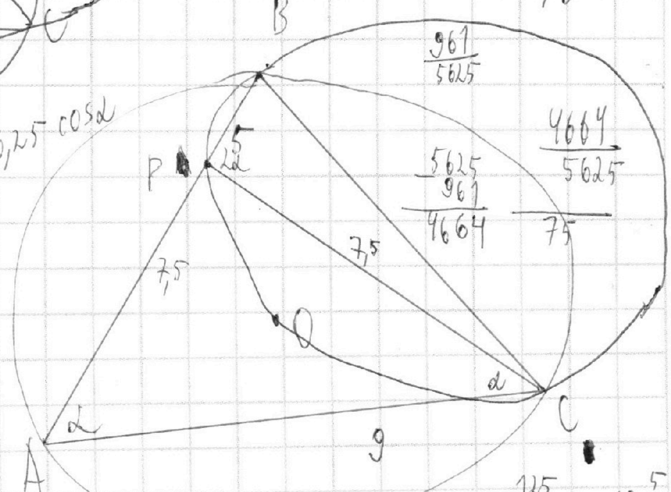
$\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$

4664 | 4
1166 | 11
106 | 2
53 |

$\frac{15^2}{2}\cos\alpha=\frac{63}{2}$

$\cos\alpha=\frac{63\ 31}{\cancel{150}\ 75}$





$81=56{,}25+56{,}25-2\cdot\cancel{56{,}25}\,56{,}25\cos\alpha$

$\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$-\cos(\alpha+\beta)=\cos 2\alpha$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$

$2\cdot 56{,}25\cos\alpha$

$\frac{961}{5625}$

$\frac{4664}{5625}$

$-\frac{5625}{961}$
4664

75

$112{,}5-81$

$111{,}5-80$

$101{,}5-70$

$31{,}5$

$10^2-2{,}5^2$

$100-6{,}25$

$93{,}75$

$\frac{125}{12}=10\frac{5}{12}$

$7{,}5\cdot 12{,}5=\frac{15}{2}\cdot\frac{25}{2}=(9-x)\cdot 9$

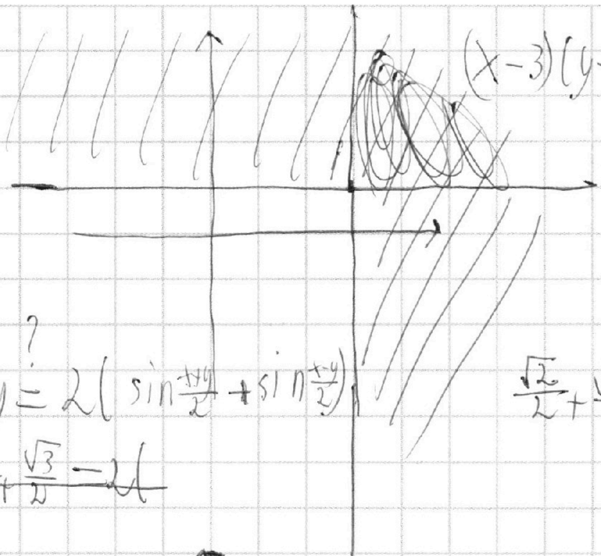
$\frac{12{,}5\cdot 3}{4}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$(x-3)(y-1)\le 0$

$\sqrt{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+0$

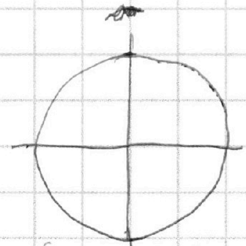
$\cancel{\cos x + c}$

?

$\sin x+\sin y = 2\left(\sin\frac{x+y}{2}+\sin\frac{x-y}{2}\right)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2} = 2($

$\cancel{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2} = 2(}$



$\sqrt{2}\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\sin\alpha+\cos\alpha$

$\cos x = -\cos y$

$(\sin\alpha+\sin\beta)\sin\alpha = (\cos\alpha+\cos\beta)\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = -\cos(\alpha+\beta)$

120 60

$\cos x+\cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos 120+\cos 60 =$

$\cos x+\cos y$

$= 0$

$\cos 45+\cos 45 = 2(\cos 45\cdot\sin 0)$

$2\left(\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right)$

$2\left(\cos\frac{x+y}{2}-\sin\frac{x-y}{2}\right)$

$2\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\left(\cos\frac{120+60}{2}-\sin\frac{120-60}{2}\right)=$

$= 2(\cos 90-\sin 30$

$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{3\alpha+\beta}{2}=0\\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0\end{array}\right.$

$\frac{3\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$3\alpha+\beta = \pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

$3\pi x+\pi y$

$\cancel{\alpha-\beta=}$

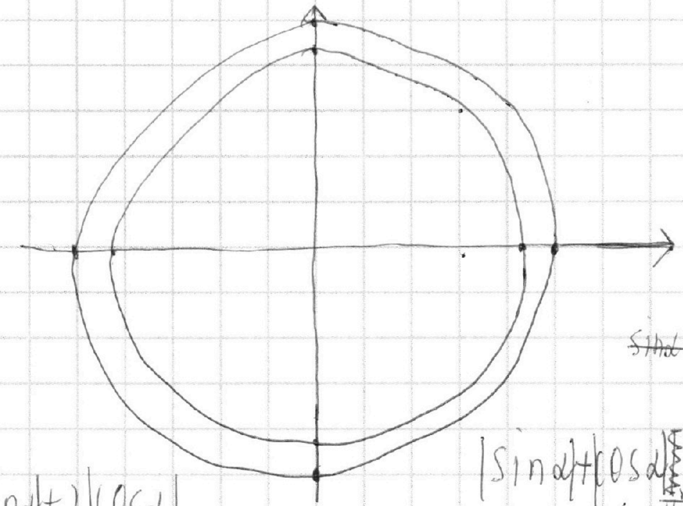
$x-y = 1+2n, n\in\mathbb{Z}$ $3x+y = 1+2n, n\in\mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

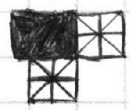
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$3 \cdot 1{,}4 = 4{,}2$



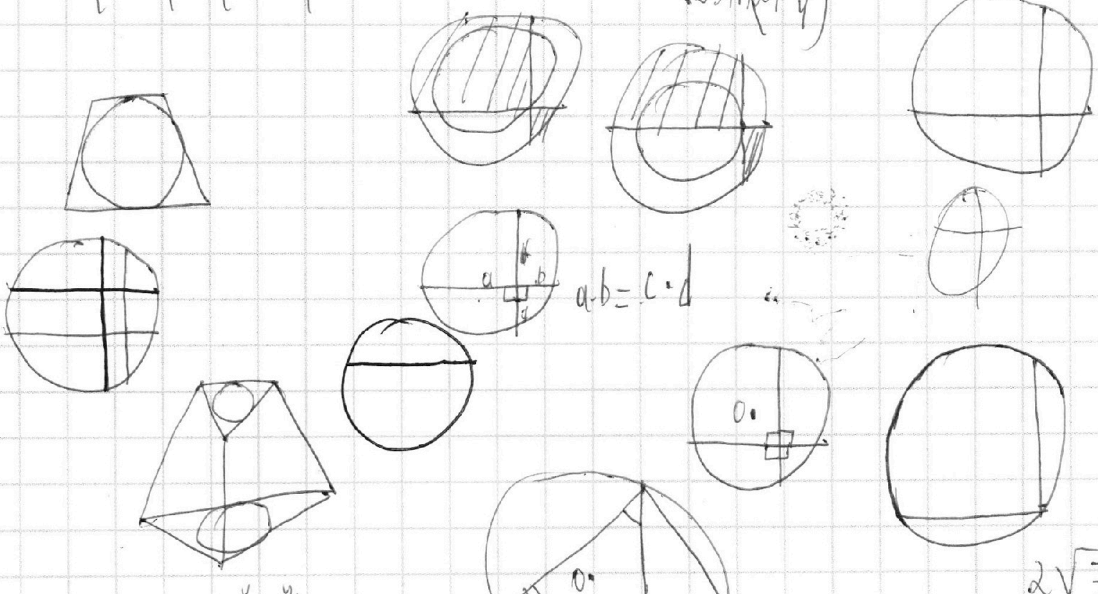
~~$\sin\alpha = \cos\alpha$~~

$\sin\alpha + \cos\alpha$

$|\sin\alpha| + |\cos\alpha|$

$\sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

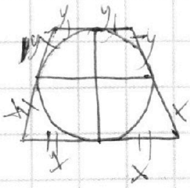
$2|\sin\alpha| + 2|\cos\alpha|$



$a \cdot b = c \cdot d$

$2\sqrt{7}\sin\alpha$

$2\sqrt{7}\cos\alpha$



$x^2 - 2xy - y^2 + ?^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$4xy$

$2\sqrt{xy}(x+y)$

$y = 3\sqrt{2}\cos\alpha$

$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{xy} \cdot (2x+2y)\ 2\sqrt{xy}$

$\sqrt{7\sin^2\alpha}$

$\sqrt{7}\sin\alpha$

~~$3\sqrt{2}\cos\alpha$~~

$18\cos^2\alpha + ?^2 = 25$

$? = \sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}$