



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha) (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

П.к. A - четырехзначное число из одинаковых цифр, $A: 1111$ $1111 = 11 \cdot 101$, значит $A: 11$ и $A: 101$

Тогда п.к. $A \cdot B \cdot C$ является квадратом натурального числа, а 101 - простое, то $A \cdot B \cdot C: 101^2$, значит п.к.

A четырехзначное, оно делится на 101^2 , значит либо B , либо $C: 101$, но п.к. C - двузначное, то $C: 101$, значит $B: 101$. Простые числа, $: 101$ это $101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909$. Из них только в одном числе есть цифра 2, значит это и есть наше число B , то есть 202 . 11 тоже простое число, значит $A \cdot B \cdot C: 11^2$, значит

$B: 11$, так как ~~мы~~ ^{мысли} ~~определили~~ ^{или} однозначно и $202: 11$. Значит либо $A: 11^2$, либо $C: 11$. Но если $A: 11^2$ и $A: 1111$, то $A: 12221$, тогда оно уже не будет четырехзначным. Значит $C: 11$,

и п.к. C - двузначное и делится содержит цифру 3,

$C: 33$. Пусть $A = 1111 \cdot x$, где $1 \leq x \leq 9$. Тогда $A \cdot B \cdot C =$

$= x \cdot 1111 \cdot 202 \cdot 33 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x$ и это является квадратом натурального числа. Значит $2 \cdot 3 \cdot x = 6x$ является квадратом, значит $x: 6$, но $1 \leq x \leq 9$, значит $x = 6$. Тогда существует лишь одна тройка таких чисел A, B и C : $A = 6666, B = 202, C = 33$.

Ответ: существует одна тройка чисел A, B, C : $A = 6666, B = 202, C = 33$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{xy+x-y-1}$$

П.к. $\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy+x-y-1}$ и у этих дробей одинаковые

числители, то либо числитель $= 0$, либо знаменатели равны. В первом случае $x+y+2=0 \Leftrightarrow x+y=-2$, но x и y положительные, значит $x+y \geq 0$, значит $x+y \neq -2$.

Тогда остается второй вариант: $xy = xy+x-y-1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=y+1 \text{ Подставим в } M: M = x^3 - y^3 - 3xy =$$

$$= (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Ответ. $M=1$ — единственное возможное значение M .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

а) Пусть $\alpha = \pi x, \beta = \pi y$

Перепишем уравнение: $(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow -\cos(\alpha + \beta) = \cos 2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2\alpha + \cos(\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos \frac{3\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha - \beta = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Обратная замена

$\begin{cases} 3\pi x + \pi y = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \pi x - \pi y = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 1 + 2n, n \in \mathbb{Z} \\ y = x - 1 - 2k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Ответ: $y = -3x + 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}; y = x - 1 - 2k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☒

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть ~~единица~~ количество билетов всего n .

Будем считать вероятность как отношение благоприятных событий деленное на количество событий всего. Общее кол-во вариантов раздать 4 билета n единица билетикам $= C_n^4$, а ~~тогда~~ в вариантах, где и Петя, и Вова идут на концерт, или обязательно даем билеты и нулю оставшихся 2 ~~идут~~ ^{идут} кому-то из $n-2$ оставшихся единица билетиков, это C_{n-2}^2 , тогда вероятность, что Петя и Вова пойдут на концерт $= \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)! \cdot 4!}{2! \cdot (n-4)! \cdot n!} = \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$. Теперь

пусть в конце месяца билетов k . Аналогично будем считать вероятность: кол-во событий всего C_n^k , кол-во событий, когда Петя и Вова идут: C_{n-2}^{k-2}

Тогда вероятность в конце месяца $= \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot (n-k)! \cdot n!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$

По условию вероятность в конце месяца в 2,5 раза больше, чем в начале, $\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 2,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$

$k(k-1) = 5 \cdot 2 \cdot 3 \Leftrightarrow k^2 - k - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k=6 \\ k=-5 \text{ не соотв. усл.} \end{cases}$

Ответ: на концерт в конце месяца было выделено 6 билетов.



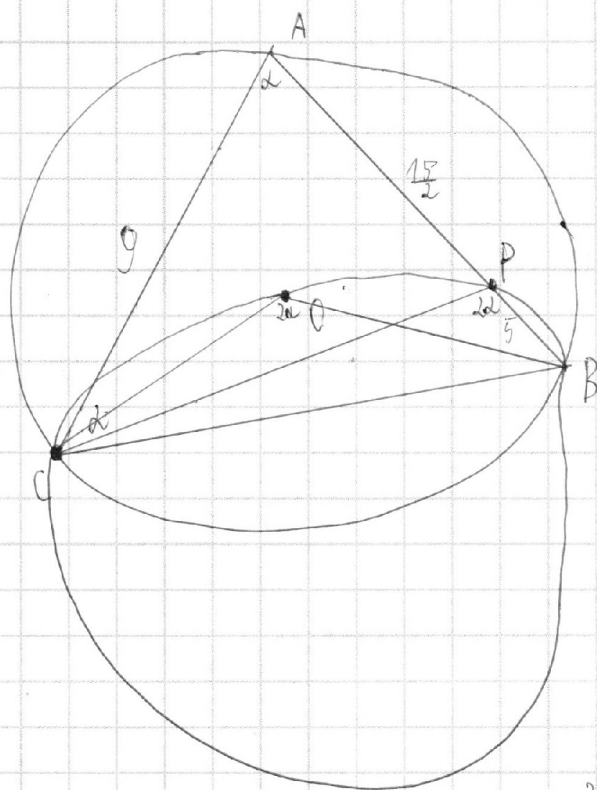
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{15}{2}$$

$$BP = 5$$

$$AC = 9$$

Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда
 $\angle CDB = 2\alpha$ как центральный.

$COPB$ — вписанный,

значит $\angle CPB = \angle CDB = 2\alpha$

$\angle CPB$ — внешний для $\triangle ACP$,

значит $\angle ACP = \angle CPB - \angle CAB = 2\alpha - \alpha = \alpha$,
 $\Rightarrow \triangle APC$ — р/б по углу.
 $CP = \frac{15}{2}$

П. косинусов для $\triangle ACP$

$$CP^2 = AC^2 + AP^2 - 2 \cdot AC \cdot AP \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{225}{4} = 81 + \frac{225}{4} - 2 \cdot \frac{81 \cdot 15}{2} \cos \alpha \Leftrightarrow \cos \alpha = 81 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{15}. \text{ П.к. } \triangle \text{ остроугольный, то } \angle \alpha \text{ лежит}$$

в I четверти, $\sin \alpha, \cos \alpha > 0$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{224}{225} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{4\sqrt{14}}{15} \\ \sin \alpha = -\frac{4\sqrt{14}}{15} \end{cases} \text{ не подходит.}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{4\sqrt{14}}{15} = 15\sqrt{14}$$

$$\text{Ответ: } S_{\triangle ABC} = 15\sqrt{14}$$

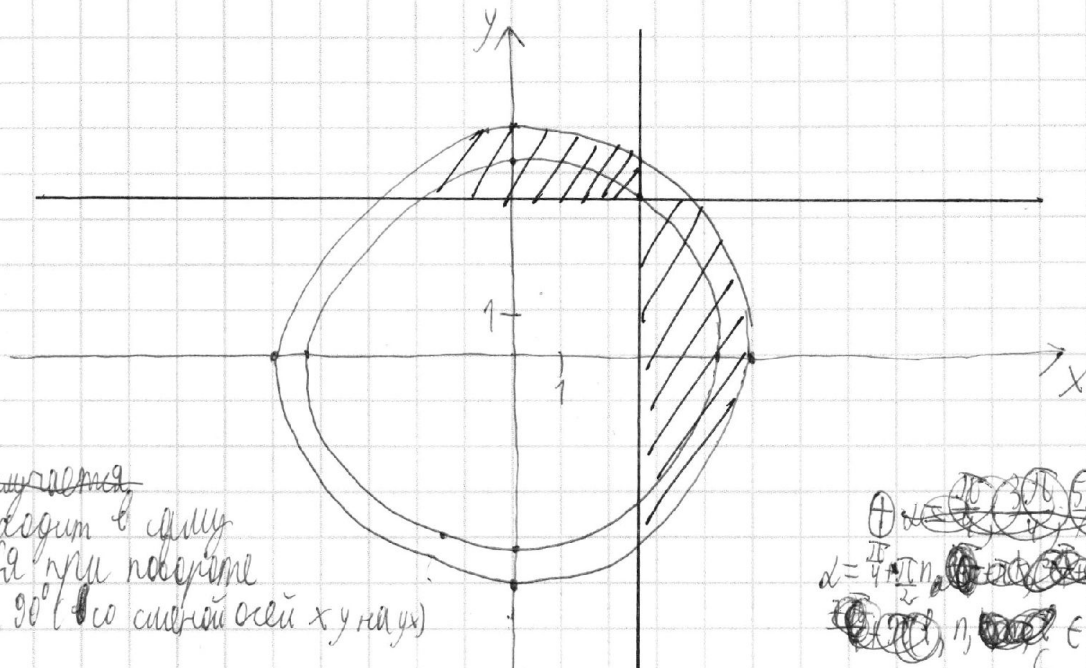


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

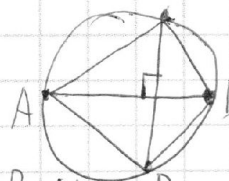
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



⊗ ~~показывается~~
пересечением
себя при повороте
на 90° со своей осью x и y

⊕ ~~$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$~~
 ~~$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$~~
 ~~$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$~~
 ~~$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$~~
 $\alpha \in \mathbb{Z}$

длины окружности радиусом 5:
Полоди ~~и~~ длина всегда будет равна $2\pi R = 10\pi$.
Значит нам просто нужно выбрать
угол α , когда длина хорды внешней окр.
будет максимальной.

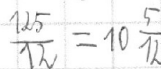


Дано: $AB \perp CD$
 AB и CD - хорды
Тогда радиусы делят
углы $AD = 2 \cdot \angle ACD$
 $\angle AD = 2 \cdot \angle ACD$
 $\angle CB = 2 \cdot \angle CAB$
 $\angle CAB + \angle AD = 90^\circ \Rightarrow \angle AD + \angle CB = 180^\circ$

Найдем α для хорды. Хорда, которая принадлежит хорде, задана уравнением
 $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$ и $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$. Тогда найдем
координаты концов хорды: $x_1^2 + (3\sqrt{2} \cos \alpha)^2 = 25 \Leftrightarrow$

Тогда $\angle AC + \angle BD$ тоже
 $= 180^\circ$, т.к. угловой
мера всей окр. 360°

$\Leftrightarrow x_1^2 = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} = \sqrt{7} \sin \alpha = \sqrt{7} \sin \alpha$
Тогда длина хорды, принадлежащей прямой
 $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha = 2\sqrt{7} \sin \alpha$ и т.к. длина хорды
симметрична относительно оси y и
начинает координат на 90° и без окр. сдвинуто $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, тогда
аналогично длина второй хорды $2\sqrt{7} \cos \alpha$ тогда $l_{\text{хорд}}$
длина $2\sqrt{7} \sin \alpha + 2\sqrt{7} \cos \alpha = 2\sqrt{14} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ При $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4})$ макс.
есть своего максимума при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, тогда $2\sqrt{14} \sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{14}$
Тогда максимум периметра $= 10\pi + 2\sqrt{14}$ и достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и т.к.
картинка симметрична относительно оси y , то максим при $\alpha = \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$ $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \sin(\pi) = 0$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$(x-3)(y-1) \leq 0$

$\sqrt{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$

$\cos x + \sin y = 2 \left(\sin \frac{x+y}{2} + \sin \frac{x-y}{2} \right)$

$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$

$\sqrt{2} \left(\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right)$

$\sin \alpha + \cos \alpha$

$\cos x = -\cos y$

$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$

$\cos 2\alpha = -\cos(\alpha + \beta)$

$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

$\cos 120 + \cos 60 =$

$\cos 45 + \cos 45 = 2(\cos 45 \cdot \sin 0)$

$2 \left(\cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right)$

$2 \cos \frac{3\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

$2 \left(\cos \frac{x+y}{2} - \sin \frac{x-y}{2} \right)$

$2 \left(\cos \frac{120+60}{2} - \sin \frac{120-60}{2} \right) =$

$= 2(\cos 90 - \sin 30)$

$\begin{cases} \cos \frac{3\alpha + \beta}{2} = 0 \\ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \end{cases}$

$\frac{3\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$3\alpha + \beta = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$3\pi x + \pi y$

$x - y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$

$3x + y = 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$

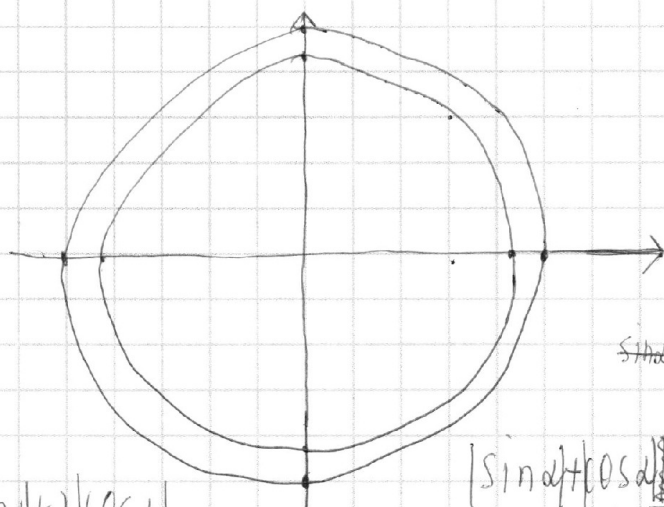


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



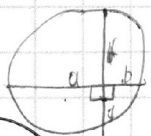
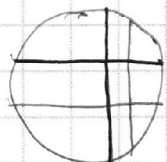
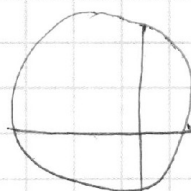
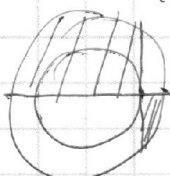
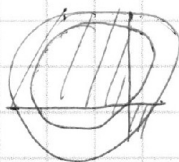
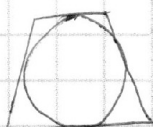
$$3 \cdot 1,4 = 4,2$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

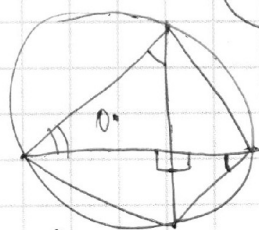
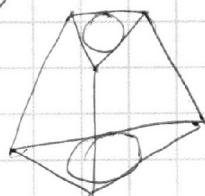
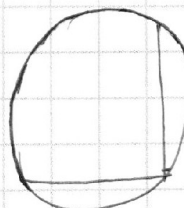
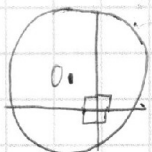
$$\sin \alpha + \cos \alpha$$

$$2|\sin \alpha| + 2|\cos \alpha|$$

$$|\sin \alpha| + |\cos \alpha| = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$$

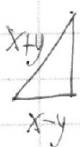
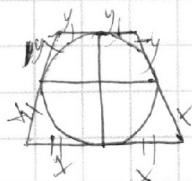


$$a \cdot b = c \cdot d$$



$$2\sqrt{7} \sin \alpha$$

$$2\sqrt{7} \cos \alpha$$



$$x^2 - 2xy - y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$2\sqrt{xy}(x+y)$$

$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{xy} \cdot (2x+2y) = 2\sqrt{xy}$$

$$\sqrt{7} \sin^2 \alpha$$

$$\sqrt{7} \sin \alpha$$

$$3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$18 \cos^2 \alpha + ? = 25$$

$$? = 25 - 18 \cos^2 \alpha$$