

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

Представим число A в виде $1111 \cdot n$, где $0 < n \leq 9$, т.к. по условию число A состоит из одиннадцати единиц. Разложим 1111 на множители (простые): $1111 = 101 \cdot 11$.

Но по усл. А·В·С - квадрат натурального числа, а значит при разложении А·В·С на простые множители должно быть как минимум один раз встречаться 101. Но С - двузначное число. Значит $B = 101 \cdot b$, где $0 < b \leq 9$.

Но В содержит хотя бы одну цифру 2. Значит, $B = 202$. Других вариантов нет же может. Аналогично,

11 должно встречаться как минимум один раз \Rightarrow

$C = 11 \cdot c$, где $0 < c \leq 9$. Но С содержит хотя бы одну цифру 3 $\Rightarrow C = 33$. Других вариантов нет же

может. Имеем $A = 1111 \cdot n$

$$B = 202 = 101 \cdot 2$$

$$C = 33 = 11 \cdot 3$$

Одевидно

(С - четырехзначное число)

$n = d \cdot 3$, т.к. А·В·С является полным квадратом натурального числа. Имеем

$$A = 6666$$

$$B = 202$$

$$C = 33$$

Тогда $\sqrt{ABC} = 101 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 2$

Макс: (6666; 202; 33).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

$$R = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$R = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} \Leftrightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-1)(y+1)}$$

Т.к. по условию $x, y > 0$, то:

$$\begin{cases} xy = xy + x - y - 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x = y+1) \text{ (но } y > 0 \Rightarrow \text{окончание } x+1 \text{ избыточно)}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } M &= x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1) \cdot y = \\ &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1 \end{aligned}$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда нам подходит $5 \cdot 6 = 30$. Но нужно исключить случай, когда $\begin{cases} y=4 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow 30 - 1 = 29$ пар.

Тогда имеем $29 + 20 = 49$ пар ответ: 49 пар.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\begin{aligned}
 a) \quad & (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \\
 & \sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y \Leftrightarrow \\
 & (\sin \pi x - \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi x) + \frac{1}{2} \cdot (\cos(\pi x - \pi y) - \cos(\pi x + \pi y)) = \\
 & = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\pi x - \pi y) + \cos(\pi x + \pi y)) \Leftrightarrow \\
 \sqrt{2} \cdot & \sin(\pi x - \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\pi x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\pi x + \pi y) \Leftrightarrow \\
 \frac{1}{2} \cdot & \alpha \cdot (\cos(\pi x - \frac{\pi}{4} - \pi x - \frac{\pi}{4}) - \cos(\pi x - \frac{\pi}{4} + \pi x + \frac{\pi}{4})) = \cos(\pi x + \pi y) \Leftrightarrow \\
 - \cos \alpha \pi x & = \cos(\pi x + \pi y) \Leftrightarrow \\
 \left[\begin{array}{l} \alpha \pi x = \pi x + \pi y + \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha \pi x = -\pi x - \pi y + \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right. & \Leftrightarrow \\
 \left[\begin{array}{l} x = y + (2n+1), n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{y}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right. & \Leftrightarrow
 \end{aligned}$$

Ответ:

Имеем: $(x; y)$ такие, что $\left[\begin{array}{l} x = y + (2n+1), n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{y}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$

т.е. $x, y \in \mathbb{R}$

$$\delta) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

Рассмотрим области значений данных функций:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \arccos \frac{y}{4} \leq \pi. \text{ Тогда}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2} . -$$

Рассмотрим область определения функций:

$$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \Leftrightarrow -4 \leq y \leq 4$$

Но т.к. первое ограничение исключает случаи

$$\begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases} \rightarrow \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \frac{y}{4} = \pi$$

Рассмотрим какие возможны x и y , исходя из множества решений п. а).

$$x = y + (dn+1), n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}n, n \in \mathbb{Z} = \frac{1}{3} \cdot (-y + 1 + 2n), n \in \mathbb{Z}$$

Чётных значений x , при $-5 \leq x \leq 5$: 5

нечётных значений x : 6.

Чётных значений y , при $-4 \leq y \leq 4$: 5

нечётных y : 4.

① При $n/2$ чётных y подходит любой чётный x из первой серии корней. Из второй серии корней также видно, что при чётных y выражение $(-y+1+dn)-\text{чётно} \Rightarrow x$ также будет чётным. Тогда для каждого чётного y подходит любой чётный $x = 4 \cdot 5 = 20$ пар

② При чётных y аналогично будет подходит любой $n/2$ чётных x . (из первой серии и из второй).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Число хбилов было выпущено в конце месяца, также число $n = \text{const}$ — число кол-во 11-классников.

Тогда вероятность в начале месяца: $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$

Вероятность в конце месяца: $\frac{4}{n} \cdot \frac{n-1}{n}$

получим уравнение: $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{5}{n} = \frac{4}{n} \cdot \frac{n-1}{n}$ \Leftrightarrow

$$y^2 - y - 30 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -6 \end{cases}$$

но $y > 0$ по логике

задачи. Тогда $y = 6$

Ответ: 6 билетов



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

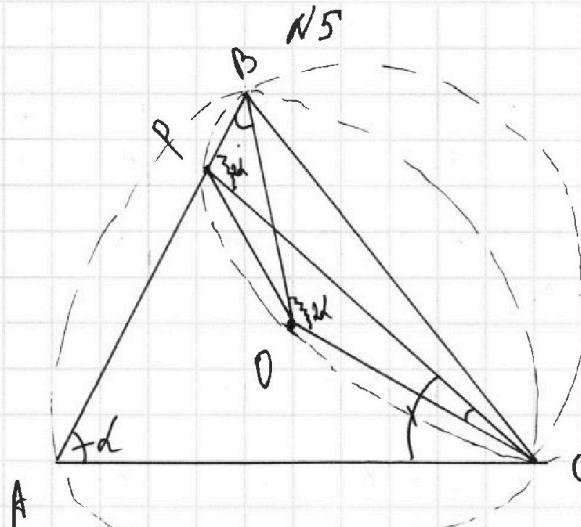
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AP = \frac{15}{2}, BP = 5, AC = 9$$

$$S_{\triangle ABC} = ?$$



1. Т. $B, P, O, C \in \omega_2 \Rightarrow \angle BOC = \angle BPC$ (как впис., опир. на $\angle BOC$). Пусть $\angle BPC = \angle BOC = d$. Но тогда для ω_1 $\angle BOC$ - центральный $\Rightarrow \angle BAC = \frac{\angle BOC}{2} = d$ (впис., опираюш. на ~~угол~~ $\angle BOC$ т.же дели BC , что и центральный).

2. $\angle APC = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - d$, но тогда $b \perp AP$:
 $\angle PCA = 180^\circ - (180^\circ - d) - d = d \Rightarrow \triangle APC - p/18$ не прям.
 $(\angle PAC = \angle PCA = d)$, но тогда $AP = PC = \frac{15}{2}$.

3. Пб т. Кошичев для $\triangle APC$ $\cos \angle PAC = \frac{\frac{d+5}{4} + 81 - \frac{225}{4}}{2 \cdot \frac{15}{2} \cdot 9} =$

$$= \frac{9 \cdot 39}{15 \cdot 9} = \frac{3}{5}. \text{ Но тогда } \sin \angle PAC = \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} =$$

$= \frac{4}{5}$. Заметим, что $\sin > 0$, т.к. $0 < d < \pi$. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \left(1\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5}^2$$

$$= 45 \text{ кв. ед.}$$

Ответ: 45 кв. ед.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \cos d)(y - 3\sqrt{2} \sin d) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \cos d \\ y \leq 3\sqrt{2} \sin d \\ x \leq 3\sqrt{2} \cos d \\ y \geq 3\sqrt{2} \sin d \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

Рассмотрим крайние положения, когда

$$\begin{cases} \cos d = 1 \\ \sin d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos d = -1 \\ \sin d = 0 \end{cases}$$

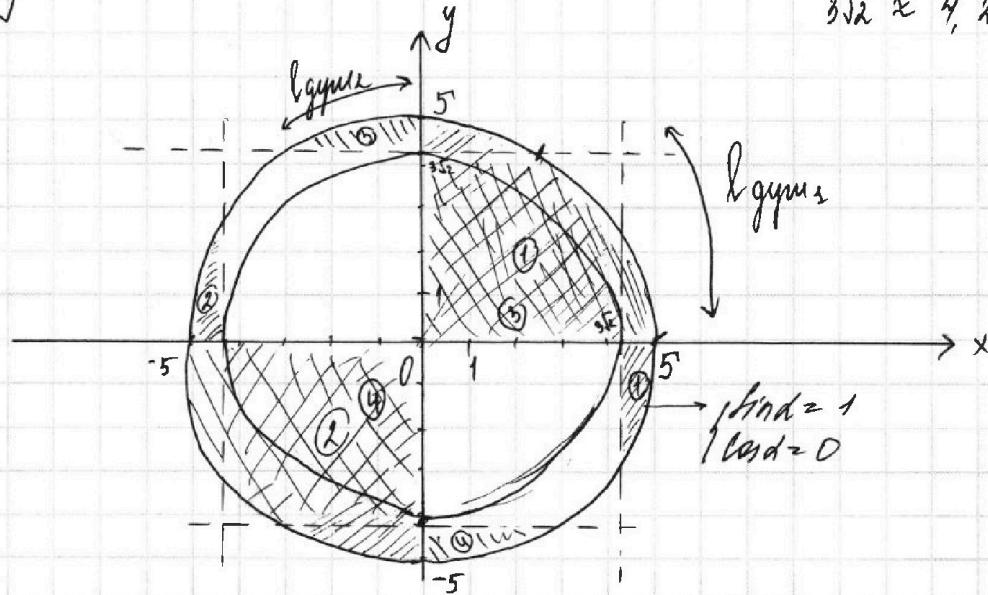
$$\begin{cases} \cos d = 0 \\ \sin d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos d = 0 \\ \sin d = -1 \end{cases}$$

$$3\sqrt{2} \leq \sqrt{5} \Leftrightarrow$$

$$18 \leq 25$$

$$3\sqrt{2} \approx 4,2$$



Во всех 4 случаях периметр фигура $\Phi(d)$ одинаковый.

Покажем, что тогда M является максимальной.*

(В других случаях $M <$ Максимальные случаи)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что ~~при~~ ~~точном~~ равенство при ~~точном~~ равенстве:

$x^2 + y^2 = (3\sqrt{2} \cdot \sin \alpha)^2 + (3\sqrt{2} \cdot \cos \alpha)^2 = (3\sqrt{2})^2$. — окружность с центром в $\mathbf{r} \cdot (0; 0)$. $r = 3\sqrt{2}$.

* Найдём M_{\max} (на примере ~~№ 3~~ (3))

$$5 + 2 \cdot (5 - 3\sqrt{2}) + 2 \cdot \sqrt{25 - (5 - 3\sqrt{2})^2} + \text{где-то} + \text{где-то} = \\ = 15 - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{30\sqrt{2} - 18} + d \cdot 5 \cdot \pi \cdot \frac{\arcsin\left(\frac{5-3\sqrt{2}}{5}\right)}{2\pi} +$$

$$+ d \cdot 5\pi \cdot \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{30\sqrt{2}-18}}{5}\right)}{2\pi} =$$

$$= 15 - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{30\sqrt{2} - 18} + 5 \cdot \left(\arcsin\left(\frac{5-3\sqrt{2}}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{\sqrt{30\sqrt{2}-18}}{5}\right) \right)$$

Доказано, что данное M - максимальное:



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N¹

$(d; B; c)$

$\downarrow \quad \downarrow$

$1111 \cdot n$

решение

$101 \cdot 11 = 1111$

$101 \cdot 11 \cdot a = 1111$

$B = 101 \cdot 6 = 603$

$C = 11 \cdot C = 3 = 33$

$A = 101 \cdot 11 \cdot a = 6666$

$B = 101 \cdot 6 = 603$

$C = 11 \cdot C = 3 = 33$

$101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 = 6666$

$101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 3 = 6666 \cdot 603 \cdot 33$

$101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 = 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3$

$101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 2 = 101 \cdot 11 \cdot 2 \cdot 3$

N⁴

Числата \Rightarrow X делюб

1-11 классиков

Пол , Вася : $\underbrace{C_x^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot C_{x-1}^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,5}_{2 \text{ м}} = C_x^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot C_{x-1}^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2,5$

~~$\frac{5!}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{4} \cdot y$~~

$\frac{24}{480}$

$y^2 - y - 12 = 0$

$y_1 = 4$
 $y_2 = -3$

~~8+~~

$60 = 4y^2 - 4y$
 $y^2 - y - 15 = 0$
 $y_1 = 5$
 $y_2 = -3$

$y^2 - y - 14 = 0$

$D = 25 + 4 \cdot 5 \cdot 24 = 25 + 20 \cdot 19 =$

$\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \frac{5}{12} = \frac{1}{504}$

$\frac{1 \cdot 12}{4(y^2 - y) \cdot 1} = \frac{5}{2}$
 $y^2 - y = 24$

$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{360}$

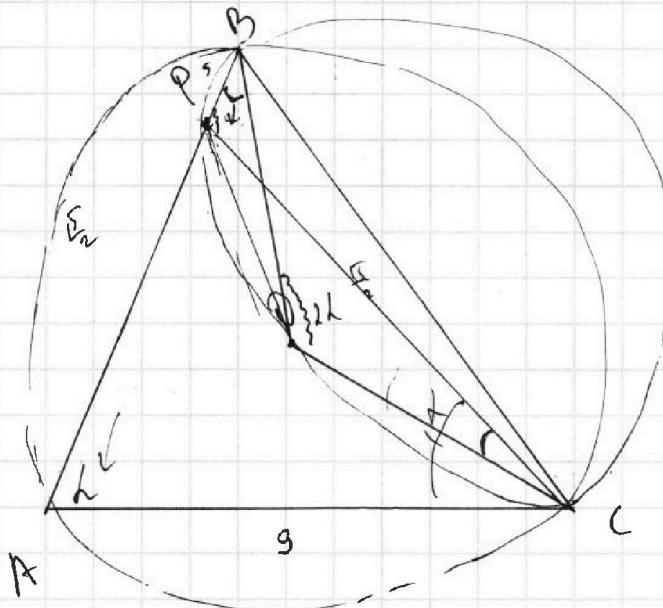


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = ?$$

$$(180^\circ - 180^\circ + 2k)^2$$

$$CR = \frac{15}{2}$$

Черновик

$$\begin{aligned} 5y^2 - 5y - 24 &= 0 \\ R &= 25 + 10 \cdot 24 = 1 \end{aligned}$$

$$\cos k = \frac{\frac{225}{4} + 81 - \frac{225}{4}}{2 \cdot \frac{15}{2} \cdot 9} = \frac{81}{15} = \frac{3}{5} \rightarrow \sin k = \frac{4}{5}$$

(\rightarrow ~~запись~~ $\sin k = \sqrt{1 - \cos^2 k}$)

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 9 \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right)^2 = \frac{2}{5} \cdot 9 \cdot \frac{225}{2} = 45$$

$\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{24} = \frac{1}{y^2 - y}$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} =$$

4 балла

$x - 1$ классиков

* Рассмотрим y -коэффициенты неравенства ($y \neq 0$)

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} = 25 = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y-1} \cdot \frac{1}{y-1} \cdot \frac{1}{y-1}$$

$$\frac{4}{y} \cdot \frac{1}{y-1} \cdot \frac{5}{y-2} \cdot \frac{1}{y-3}$$

$$\begin{aligned} 5y^2 - 5y &= 24 \\ 5y^2 - 5y - 24 &= 0 \\ R &= 25 + 24 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} &= \frac{1}{y^2 - y} \\ y^2 - y - 12 &= 0 \\ y^2 - y - 12 &= 0 \\ y^2 - 4y + 3 &= 0 \\ (y-1)(y-3) &= 0 \\ y_1 &= 1, y_2 = 3 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(A; B; C) \rightarrow \overline{AB}$$

\downarrow
 \overline{aaaa} \overline{abc}
 \overline{abc} \overline{cab}
 \overline{bca} \overline{cba}

N1

$$\begin{array}{r}
 1111 \\
 2222 \\
 3333 \\
 \hline
 6666
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 1111 \\
 \times 33 \\
 \hline
 3333
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 1111 \\
 \times 3333 \\
 \hline
 33333
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 1111 \\
 \times 33333 \\
 \hline
 333333
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 1111 \\
 \times 20 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 13326 \\
 \hline
 233260
 \end{array}$$

$$2 \cdot \cos(\pi x + \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\pi x - \frac{\pi}{4}) = \cos^2(\pi x)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1$$

$$x = y + 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y \quad \textcircled{1}$$

N3

$$(\sin \pi x + i \cos \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + i \sin \pi y) \cos \pi x$$

cos - sin

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y \quad \sin \alpha \cdot \sin \beta =$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\cos \alpha - \beta) - (\cos(\alpha + \beta))$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot (\cos \pi(x-y) - \cos \pi(x+y)) = \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} \cdot (\cos \pi(x-y) + \cos \pi(x+y))$$

$$\sin^2 \pi x - \frac{1}{2} \cos \pi(x+y) = \cos^2 \pi x + \cos \pi(x+y) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \pi x + \cos \pi(x+y) - \sin^2 \pi x = 0$$

$$(\cos \pi x - \sin \pi y)(\cos \pi x + \sin \pi x) + (\cos \pi(x+y)) = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos(\pi x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\pi x + \frac{\pi}{4}) + \cos \pi(x+y) = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cdot \cos \pi \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right) \cdot \cos \pi \left(x + \frac{1}{4}\right) + \cos \pi (x+y) = 0$$

$$\cos \left(\pi x - \frac{\pi}{4} - \pi x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos \left(\pi x - \frac{\pi}{4} + \pi x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos \pi (x+y) = 0$$

$$\cancel{\cos} \stackrel{\pi/2}{=} \cos \pi (x+y) = 0$$

$$\begin{matrix} x = & \dots \\ \vdots & \vdots \\ x_1 = & \dots \\ \vdots & \vdots \\ x_{10} = & \dots \\ \vdots & \vdots \\ x_n = & \dots \end{matrix}$$

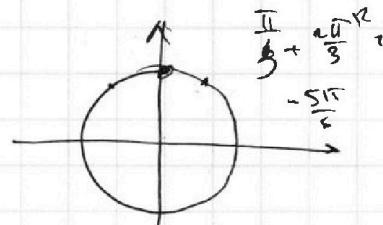
$$\pi (x+y) = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$x+y = \frac{1}{2} + n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-y + \frac{1}{2}) + n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x \in \mathbb{R}, x = (-y + \frac{1}{2}) + n, n \in \mathbb{Z} ?$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$



$$x \in [-2\pi; 2\pi] \quad \frac{\pi}{2} + \pi < \frac{3\pi}{2} - \text{беср}$$

$$y \in [0; 4\pi]$$

$$y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$

p

7 - верн
6 - вер

$$\text{Thru } y=0: \beta$$

$$7 \cdot 8 + 6 \cdot 7 \times -1 \text{ верн}$$

$$27 \cdot 14 = 98$$

4 верн

(15)

$$\begin{array}{r} 83,14 \\ \times 2,5 \\ \hline 15170 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ -7 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} \right)^2 \cdot 2,5 = \frac{x! \cdot x!}{(y-2)! \cdot (x-y+2)! \cdot y! \cdot (x-y)!}$$

$$\frac{85}{4 \cdot (x-1)!} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

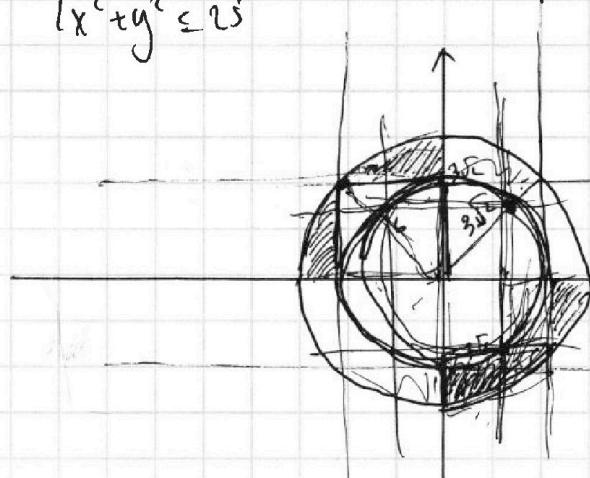
$\varphi(\lambda)$,

№6

$$(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25 \\ \dots \end{cases}$$

$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$



$$3 \cdot 1,4$$

$$\frac{\pi \cdot 5}{2} + 2 \cdot (5 - 3\sqrt{2}) + \frac{2 \cdot 5^2 \pi}{2} \\ \sim \frac{\pi \cdot 5}{2} + 10 = \frac{20\pi + 5\pi}{2}$$

$$\text{Число } \delta \sin \alpha = 1: (x - 3\sqrt{2}) \cdot y \leq 0$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 0 \\ x \cdot (y - 3\sqrt{2}) &\leq 0 \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 3\sqrt{2} \end{cases} \end{aligned}$$

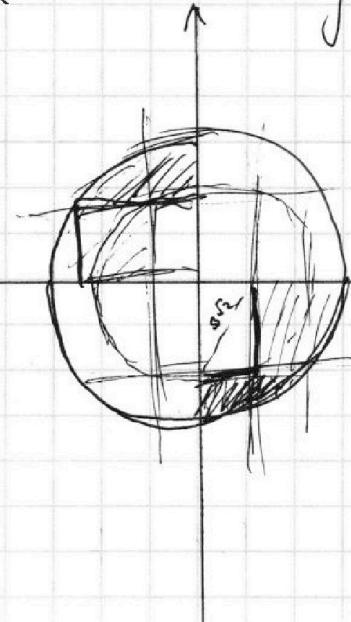
$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \\ y \leq 0 \\ x \leq 3\sqrt{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\pi r = 25\pi + (x+y)^2$$

$$\begin{aligned} \text{коэф. } & x + y + 1 \\ & x = 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ & y = 3\sqrt{2} \cos \alpha \quad | \rightarrow x^2 + y^2 = 25 \\ & x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 11 = 0 \end{aligned}$$

(1)



$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 3\sqrt{2} \end{cases}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N5

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) (\cos \pi x)$$

$$(\sin a + \sin b) \sin a - (\cos a + \cos b) (\cos a)$$

$$\sin^2 a + \sin a \cdot \sin b = \cos^2 a + \cos a \cdot \cos b$$

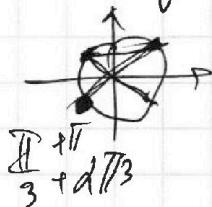
$$(\sin a - \cos a)(\sin a + \cos a) + \frac{1}{2} \cdot ((\cos(a-b) - \cos(a+b)) - \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))) = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(a+b) = 0$$

$$2 \cdot \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) - \cos(a+b) = 0$$

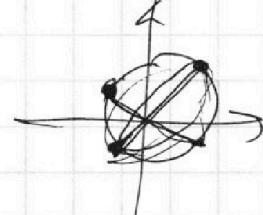
$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\cos\left(a - \frac{\pi}{4} - a - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(a - \frac{\pi}{4} + a + \frac{\pi}{4}\right)) - \cos(a+b) = 0$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta$$



$$\cos \alpha + \cos(a+b) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha = a + b + \frac{2k+1}{3}\pi h, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -a - b + \frac{2k+1}{3}\pi h, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\alpha = \beta + \frac{2k+1}{3}\pi h, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = -\frac{b}{3} + \frac{2k+1}{3}\pi h, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = y + (1+2n), n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = y + (1+2n), n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{4}{3} + \frac{2k+1}{3}\pi h, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha = a + b + \pi + 2\pi h, n \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha = -a - b + \pi + 2\pi h, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + (an+1), n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{4}{3} + (\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}), n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

к n.8)
номер
не ногт.

$$\alpha = \beta + \pi + d\pi h, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2\alpha = -b + \pi + 2\pi h, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\frac{b}{3} + \frac{\pi}{3} + \frac{2k+1}{3}\pi h, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решения которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N4

$$x \rightarrow 2 \text{ раз.}$$

$$x-2 \rightarrow 2 \text{ раз.}$$

$$x \rightarrow 1 \text{ раз.}$$

$$x-2 \rightarrow y-2 \text{ раз.}$$

$$\binom{x^2}{x-2} = \binom{y^2}{x-2}$$

$$\frac{1}{2!(x-4)!} = \frac{1}{(y-2)!(x-y-4)!}$$

~~$$\text{Числ. } (x-2) \text{ раз.} \rightarrow 2 \text{ раз.}$$~~

$$\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x-2} = \underbrace{\frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{x-3} \dots}_{y-2}$$

~~$$(x-2 \text{ раз.}) \rightarrow y-2 \text{ раз.}$$~~

$$\frac{1}{x-4} \cdot \frac{1}{x-5} \dots$$

$$(x^2 - 9x + 20)^5 = 2$$

~~$$5x^2 - 45x + 920 = 0$$~~

~~$$\frac{4}{x} \cdot \frac{9}{x-1} \cdot \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x} \cdot \frac{9-1}{x-1}$$~~

$$30 = y^2 - y$$

$$y^2 - y - 30 = 0$$

~~$$\begin{cases} y = 5 \\ y = -6 \end{cases}$$~~

$$\frac{1}{2} \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$(5 - 3\sqrt{2})^2$$

$$\approx 25 + 18 = 30\sqrt{2}$$

$$\sqrt{25 - 25 + 18\sqrt{2}} = \sqrt{30\sqrt{2} - 18}$$

