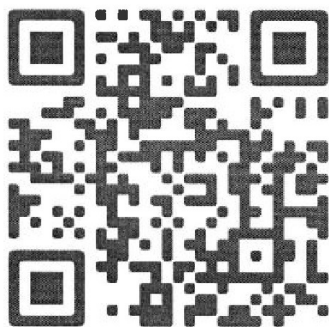




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Р1

Представим число A в виде $1111 \cdot n$, где $0 < n \leq 9$, т.к. по условию число A состоит из одних цифр. Разложим 1111 на множители (простые): $1111 = 101 \cdot 11$.

Но по усл. $A \cdot B \cdot C$ - квадрат натурального числа, а значит при разложении $A \cdot B \cdot C$ на простые множители должно еще как минимум один раз встретиться 101 . Но C - двузначное число. Значит $B = 101 \cdot b$, где

$0 < b \leq 9$. Но B содержит хотя бы одну цифру 2. Значит, $B = 202$. Других вариантов для b не может. Аналогично, 11 должно встретиться как минимум один раз $\Rightarrow$

$\Rightarrow C = 11 \cdot c$, где $0 < c \leq 9$. Но C содержит хотя бы одну цифру 3 $\Rightarrow C = 33$. Других вариантов для c не может. Имеем

$$A = 1111 \cdot n$$

$$B = 202 = 101 \cdot 2$$

$$C = 33 = 11 \cdot 3$$

Очевидно

(C - четырехзначное число)

$n = 2 \cdot 3$, тогда $A \cdot B \cdot C$ является полным квадратом

натурального числа. Имеем

$$A = 6666$$

$$B = 202$$

$$C = 33$$

$$\text{Тогда } \sqrt{ABC} = 101 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 2$$

Ответ: (6666; 202; 33).



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$R = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \quad \text{№2}$$

$$R = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} \quad \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-1)(y+1)}$$

Т.к. по условию $x, y > 0$, то:

$$\begin{aligned} xy &= xy + x - y - 1 \\ x &= y + 1 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$ (по $y > 0 \Rightarrow$ ограничение $x+1$ избыточно)

$$\begin{aligned} \text{Тогда } M &= x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1) \cdot y = \\ &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1 \end{aligned}$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Тогда нам подходит $5 \cdot 6 = 30$. Но нужно исключить
случай, когда $y = 4$ $\Rightarrow 30 - 1 = 29$ пар.
 $x = 5$

Тогда имеем $29 + 20 = 49$ пар. Ответ: 49 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

☐ 1

☐ 2

☒ 3

☐ 4

☐ 5

☐ 6

☐ 7

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow \\
 & \sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y \Leftrightarrow \\
 & (\sin \pi x - \cos \pi x)(\sin \pi x + \cos \pi x) + \frac{1}{2} \cdot (\cos(\pi x - \pi y) - \cos(\pi x + \pi y)) = \\
 & \quad = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\pi x - \pi y) + \cos(\pi x + \pi y)) \Leftrightarrow \\
 & \sqrt{2} \cdot \sin\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi x + \pi y) \Leftrightarrow \\
 & \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \left(\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{4} - \pi x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{4} + \pi x + \frac{\pi}{4}\right) \right) = \cos(\pi x + \pi y) \Leftrightarrow \\
 & -\cos 2\pi x = \cos(\pi x + \pi y) \Leftrightarrow \\
 & \begin{cases} 2\pi x = \pi x + \pi y + \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -\pi x - \pi y + \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \begin{cases} x = y + (2n+1), n \in \mathbb{Z} \\ 3x = -y + (2n+1), n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + (2n+1), n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{y}{3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n\right), n \in \mathbb{Z} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ответ:

Имеем: $(x; y)$ такие, что
$$\begin{cases} x = y + (2n+1), n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{y}{3} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}n\right), n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

где $x, y \in \mathbb{R}$

б) $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$

Рассмотрим области значений данных функций:

$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \arccos \frac{y}{4} \leq \pi$. Тогда



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arcsin \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Рассмотрим область определения функции:

$$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$-5 \leq x \leq 5.$$

$$-4 \leq y \leq 4.$$

По т.к. пер-во строгое нестрогим случаем

$$\begin{cases} x=5 \rightarrow \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \\ y=4 \rightarrow \arcsin \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Рассмотрим какие возможны x и y , исходя из мн-ва решений п.а).

$$\begin{cases} x = y + (2n+1), n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (-y+1+2n), n \in \mathbb{Z}$$

Чётных значений x , при $-5 \leq x \leq 5$: 5

н/ч значений x : 6.

Чётных значений y , при $-4 \leq y \leq 4$: 5

н/ч значений y : 4.

① При н/ч y подходит любой чётный x из первой серии корней. Из второй серии корней также видно, что при н/ч y выражение $(-y+1+2n)$ - чётно $\Rightarrow x$ также будет чётным. Тогда для каждого н/ч y подходит любой чётных $x \approx 4 \cdot 5 = 20$ пар

② При чётном y аналогично будет подходить любой н/ч x . (из первой серии и из второй).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть x билетов было продано в конце месяца,
также пусть $n = \text{const}$ - фикс. кол-во 11-классников.

Тогда вероятность в начале месяца: $\frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1}$

Вероятность в конце месяца: $\frac{4}{n} \cdot \frac{4-1}{n-1}$

Вставим уравнение: $\frac{4^2}{n} \cdot \frac{3}{n-1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{4}{n} \cdot \frac{4-1}{n-1} \Leftrightarrow$

$$y^2 - y - 30 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = -5 \\ y = 6 \end{cases}$$

Но $y > 0$ по логике

задачи. Тогда $y = 6$

Ответ: 6 билетов.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



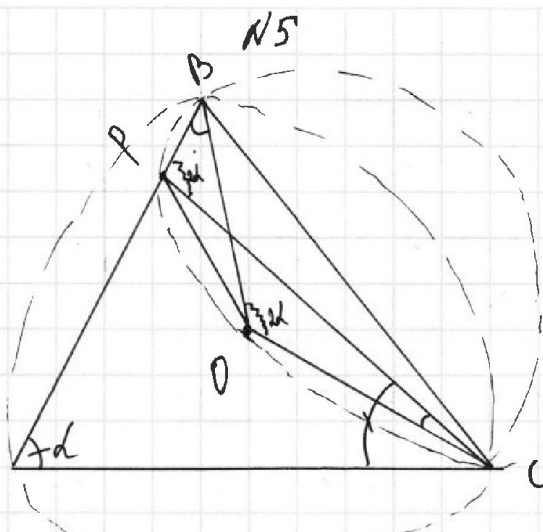
СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$AP = \frac{15}{2}, BP = 5, \\ AC = 9$$

$$S_{\triangle ABC} = ?$$



1. Т. $B, P, Q, C \in \omega_2 \Rightarrow \angle BPC = \angle BQC$ (как впис., опир. на $\widehat{BC}$). Пусть $\angle BPC = \angle BQC = \alpha$. Но тогда для ω_1 $\angle BPC$ — центральный $\Rightarrow \angle BAC = \frac{\angle BPC}{2} = \frac{\alpha}{2} = d$ (впис., опирающ. на $\widehat{BC}$ — ту же дугу $\widehat{BC}$, что и центральный).

2. $\angle APC = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - \alpha$, но тогда в $\triangle APC$: $\angle PCA = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - d = \alpha \Rightarrow \triangle APC$ — р/б по трем углам. ($\angle PAC = \angle PCA = d$), но тогда $AP = PC = \frac{15}{2}$.

3. По т. Косинусов для $\triangle APC$ $\cos \angle PAC = \frac{\frac{225}{4} + 81 - \frac{81}{4}}{2 \cdot \frac{15}{2} \cdot 9} = \frac{9 \cdot 9}{15 \cdot 9} = \frac{3}{5}$. Но тогда $\sin \angle PAC = \sin \angle BAC = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$. Заметим, что $\sin > 0$, т.к. $0 < d < \pi$. Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \left(\frac{15}{2} + 5 \right) \cdot 9 = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5 \right) \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = 45 \text{ кв. ед.}$$

Ответ: 45 кв. ед.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N/6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin d)(y - 3\sqrt{2} \cos d) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

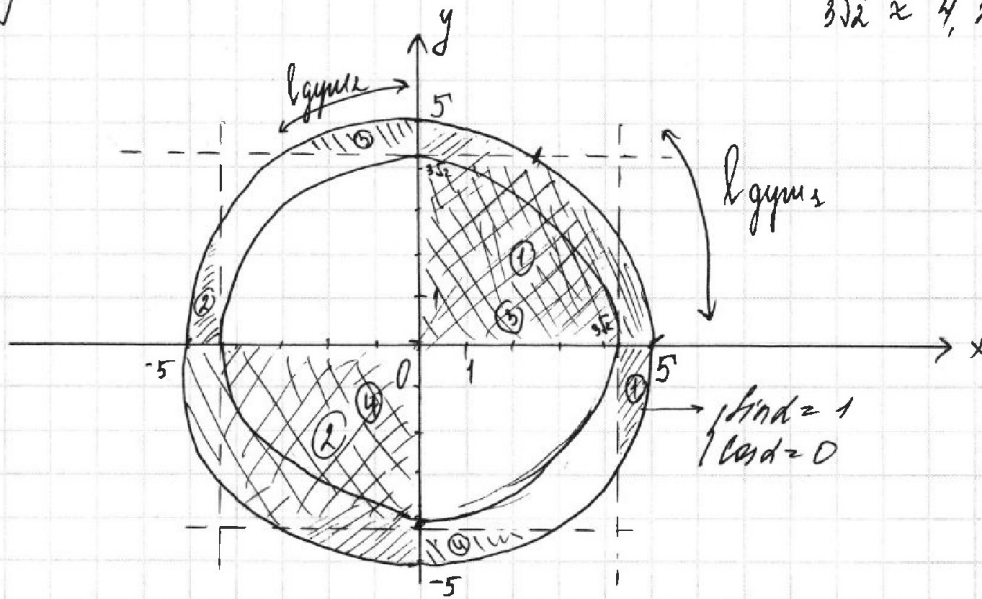
$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \sin d \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos d \\ x \leq 3\sqrt{2} \sin d \\ y \geq 3\sqrt{2} \cos d \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

Рассмотрим крайние положения, когда

$$\begin{aligned} \text{①} \quad & \begin{cases} \sin d = 1 \\ \cos d = 0 \end{cases} \\ \text{②} \quad & \begin{cases} \sin d = -1 \\ \cos d = 0 \end{cases} \\ \text{③} \quad & \begin{cases} \sin d = 0 \\ \cos d = 1 \end{cases} \\ \text{④} \quad & \begin{cases} \sin d = 0 \\ \cos d = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$3\sqrt{2} \sqrt{5} \Leftrightarrow 18 \sqrt{25}$$

$$3\sqrt{2} \approx 4,2$$



Во всех 4 случаях периметр фигуры $\varphi(d)$ - одинаков.
Покажем, что тогда M является максимальным.*
(В других случаях $M < M_{\text{крайние случаи}}$)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Заметим, что ~~при точном равенстве~~ при точном равенстве:
 $x^2 + y^2 = (3\sqrt{2} \cdot \sin \alpha)^2 + (3\sqrt{2} \cdot \cos \alpha)^2 = (3\sqrt{2})^2$ - окружность с центром в т. $(0; 0)$. $r = 3\sqrt{2}$.

* Найдём ℓ max (на примере ~~③~~ ③)

$$\begin{aligned} & 5 + 2 \cdot (5 - 3\sqrt{2}) + 2 \cdot \sqrt{25 - (5 - 3\sqrt{2})^2} + \ell_{\text{дуг}_1} + \ell_{\text{дуг}_2} = \\ & = 15 - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{30\sqrt{2} - 18} + 2 \cdot 5 \cdot \pi \cdot \frac{\arcsin\left(\frac{5 - 3\sqrt{2}}{5}\right)}{2\pi} + \\ & + 2 \cdot 5 \pi \cdot \frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{30\sqrt{2} - 18}}{5}\right)}{2\pi} = \end{aligned}$$

$$= 15 - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{30\sqrt{2} - 18} + 5 \cdot \left(\arcsin\left(\frac{5 - 3\sqrt{2}}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{\sqrt{30\sqrt{2} - 18}}{5}\right) \right)$$

Покажем, что данное ℓ - максимальное:

$$\frac{1 \cdot 12}{(y^2 - y) \cdot 1} = \frac{5}{2}$$

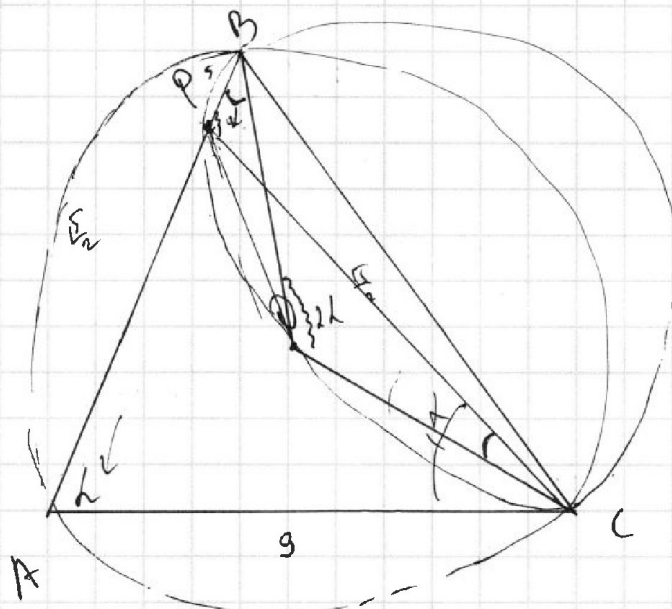


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$S_{ABC} = ?$$

$$120^\circ - 180^\circ \times \frac{1}{180} = -2$$

$$CP = \frac{15}{2}$$

$$4AP + 25$$

$$5y^2 - 5y - 24 = 0$$

$$D = 25 + 10 \cdot 24 = 241$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{225}{4} + 81 - \frac{225}{4}}{2 \cdot \frac{15}{2} \cdot 9} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \rightarrow \text{острогр.}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 9 \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) = \frac{\pi}{5} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} = 45$$

(> 0 ~~так как~~ $\sin \alpha < \pi$)

4 дименсия

x - классический

$$\frac{1}{24} = y^2 - y$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y-1}$$

Пусть y - кол-во дименсий нечети (y-н)

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{y-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{410}{125} = \frac{568}{500}$$

$$5y^2 - 5y = 24$$

$$5y^2 - 5y - 24 = 0$$

$$D = 25 + 10 \cdot 24 = 241$$

$$\frac{1}{12} = y^2 - y$$

$$y^2 - y - 12 = 0$$

$$y^2 - 3 = 0$$

$$y = 4$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(A; B; C) $\rightarrow$ $\frac{ds}{dt}$

↓

aaaa abe acb
bae cab cba

N1

1111
222
33
8

1111
x . 33
3333
x 3333
3'6663
x 20
0
19326
235260

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy = (x-1)(y+1)$$

$$xy = xy + x - y - 1$$

$$x = y + 1$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

N3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y =$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot (\cos \pi(x-y) - \cos \pi(x+y)) = \cos^2 \pi x + \frac{1}{2} \cdot (\cos \pi(x-y) + \cos \pi(x+y))$$

$$\sin^2 \pi x - \frac{1}{2} \cos \pi(x+y) = \cos^2 \pi x + \cos \pi(x+y) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 \pi x + \cos \pi(x+y) - \sin^2 \pi x = 0$$

$$(\cos \pi x - \sin \pi x) (\cos \pi x + \sin \pi x) + \cos \pi(x+y) = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \cos(\pi x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\pi x - \frac{\pi}{4}) + \cos \pi(x+y) = 0$$

cos α -sin

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2 \cdot \cos \pi \cdot (x - \frac{1}{4}) \cdot \cos \pi (x + \frac{1}{4}) + \cos \pi (x + y) = 0$$

$$\cos(\pi x - \frac{\pi}{4} - \pi x - \frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\pi x - \frac{\pi}{4} - \pi x + \frac{\pi}{4}) + \cos \pi (x + y) = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \pi (x + y) = 0$$

$$\pi (x + y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x + y = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-y + \frac{1}{2}) + k, k \in \mathbb{Z}$$

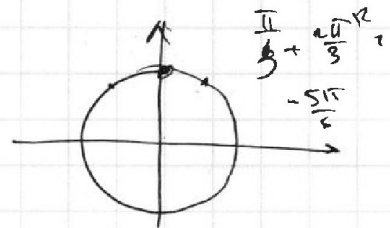
$$x \in \mathbb{R}, -y \in \mathbb{R}, x = (-y + \frac{1}{2}) + k, k \in \mathbb{Z} ?$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$x \in [-2.5\pi; 2.5\pi] \quad \frac{\pi}{2} + \pi < \frac{3\pi}{2} - \text{всегда}$$

$$y \in [0; 4\pi]$$

$$y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12$$



Р

7 - цел

6 - 1/2

↓

При $y=0$:

$$x = -7 \dots 7$$

(15)

$$\begin{array}{cccccccc} -7 & -6 & -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \end{array}$$

$$2 \cdot 8 + 6 \cdot 7 = x - 1 \text{ км/ч}$$

$$2 \cdot 7.14 = 9.8$$

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{3}$$

$$(x^2 \cdot x^2 \cdot 2.5 = (x^2 - x^2)$$

$$\left(\frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} \right) \cdot 2.5 = \frac{x!}{(y-2)! \cdot (x-y+2)! \cdot y! \cdot (x-y)!}$$

$$\frac{5!}{4 \cdot (x-2)!} =$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

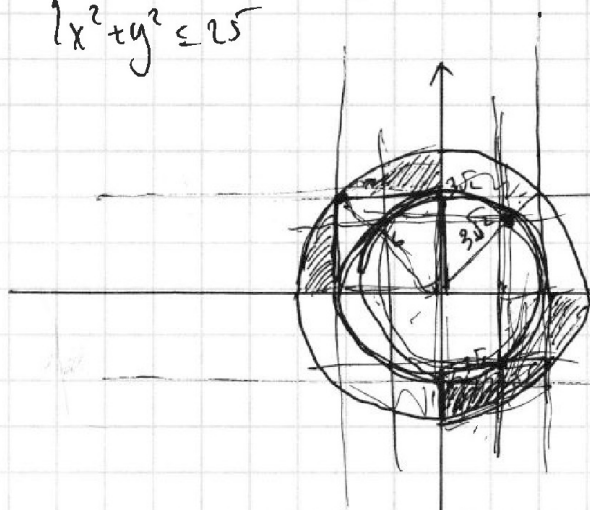
1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\varphi(\alpha),$
 $(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$
 $x^2 + y^2 \leq 25$

$x = 3\sqrt{2} \sin 2$



$3 \cdot 1,4$

$\frac{\pi \cdot 9}{2} + 2 \cdot (5 - 3\sqrt{2}) + 2\sqrt{2}$
 $\rightarrow \frac{\pi \cdot 5}{2} + 10 = \frac{20 + 5\pi}{2}$

Пусть $\sin \alpha = 1$: $(x - 3\sqrt{2}) \cdot y \leq 0$

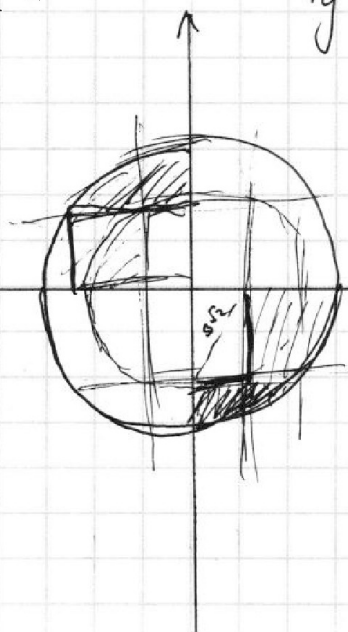
$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \\ y \leq 0 \end{cases}$
 $\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$

$d = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$

$\pi r = 25\pi + (x+y)^2$

$\cos \alpha = \frac{y}{3\sqrt{2}}$
 $\sin \alpha = \frac{x}{3\sqrt{2}}$
 $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$
 $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$
 $x^2 + y^2 = 18$
 $x^2 + y^2 = 25$
 $x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 11 = 0$
 $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 1$

$\sin \alpha = 0$
 $x \cdot (y - 3\sqrt{2}) \leq 0$
 $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 3\sqrt{2} \end{cases}$
 $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 3\sqrt{2} \end{cases}$



$x \geq 0$
 $y \leq 3\sqrt{2}$

$y \geq 3\sqrt{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$(\sin a + \sin b) \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a$$

$$\sin^2 a + \sin a \cdot \sin b = \cos^2 a + \cos b \cdot \cos a$$

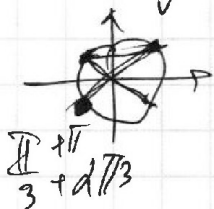
$$(\sin a - \cos a)(\sin a + \cos a) + \frac{1}{2} \cdot (\cos(a-b) - \cos(a+b)) - \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b)) = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin(a - \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(a + \frac{\pi}{4}) - \cos(a-b) = 0$$

$$2 \cdot \sin(a - \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(a + \frac{\pi}{4}) - \cos(a-b) = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (\cos(a - \frac{\pi}{4} - a - \frac{\pi}{4}) - \cos(a - \frac{\pi}{4} + a + \frac{\pi}{4})) - \cos(a-b) = 0$$

$$\cos \alpha = -\cos \beta$$



$$\cos \alpha + \cos(a+b) = 0$$

$$\alpha = a+b + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2\alpha = -a-b + \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = -\frac{a+b}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\alpha = -\frac{a+b}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = y + (1+2n), n \in \mathbb{Z}$$

$$x = y + (2n+1), n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{a}{3} + (\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}), n \in \mathbb{Z}$$

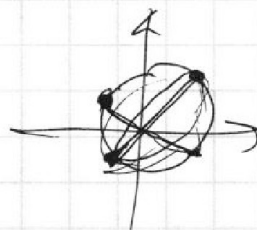
к.п.б)
никого
не пох.

$$\begin{cases} x = y + (1+2n), n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{a}{3} + (\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}), n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha = a+b + \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha = -a-b + \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$a = b + \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 2\alpha = -b + \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \alpha = -\frac{b}{2} + \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

$$x \rightarrow 2 \text{ цел.}$$

$$x-2 \rightarrow 2 \text{ цел.}$$

$$x \rightarrow 2 \text{ цел.}$$

$$x-2 \rightarrow y-2 \text{ цел.}$$

$$C_{x-2}^2 = C_{x-2}^{y-2}$$

$$\frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{x-3} \dots$$

$$\frac{1}{2!(x-4)!} = \frac{1}{(y-2)!(x-y-4)!}$$

$$(x-2) \text{ цел.} \rightarrow 2 \text{ цел.}$$

$$\frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{x-3} \dots$$

$$(x-2) \text{ цел.} \rightarrow y-2 \text{ цел.}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{x-4} \cdot \frac{1}{x-5} \dots$$

$$(x^2 - 9x + 20)5 = 2$$

$$5x^2 - 45x + 100 = 0$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot 2.5 = \frac{4}{x} \cdot \frac{y-1}{x-1}$$

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$30 = y^2 - y$$

$$y^2 - y - 30 = 0$$

$$y = 6$$

$$\frac{1}{2} \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta)$$

$$-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$(5 - 3\sqrt{2})^2 =$$

$$= 25 + 18 - 30\sqrt{2}$$

$$\sqrt{25 - 25 - 18\sqrt{2}} = \sqrt{30\sqrt{2} - 18}$$

