



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$
- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

1) Пусть x - цифра числа A ($x \in [1; 9]$) \Rightarrow

$$\Rightarrow A = 1000x + 100x + 10x + x = 1111x$$

Заметим, что $1111 = 11 \cdot 101$, где 11 и 101 -
- простые числа

2) Тогда $A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot x \cdot B \cdot C = m^2$, где $m \in N$
 $m^2 : 11 \quad ?$ $m^2 : 11^2$
 $m^2 : 101 \quad ?$ $m^2 : 101^2 \Rightarrow B \cdot C : 11 \cdot 101 = 1111$

3) Рассмотрим следующие случаи:

1. $B : 1111$ - невозможно, т.к. B - трёхзначное
 $C \dots$ число

2. $B \dots$ - невозможно, т.к. C - двузначное
 $C : 1111$ - число

3. $B : 11$ - невозможно, т.к. C - двузначное
 $C : 101$ - число

4. $B : 101 \quad ?$ - единственно возможный \checkmark единственный
 $C : 11$ - случай, иначе нет

4) Т.к. одна из цифр числа $B = 6$, то $B = 101 \cdot 6 = 606$

т.к. одна из цифр числа $C = 3$, то $C = 11 \cdot 3 = 33$

5) $B \cdot C \cdot A = \underbrace{11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2}_{\text{три парные}} \cdot 2x : m^2 \quad ?$ $\left. \begin{array}{l} \text{единственный} \\ \text{возможный} \\ \text{случай} \end{array} \right\}$
 $\text{квадрат натурального} \quad 2x - \text{парный} \quad \Leftrightarrow \text{случай}$
 числа

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x &= 2 \Rightarrow 2x = 2^2 \Rightarrow A_1 = 2222 \\ x &= 8 \Rightarrow 2x = 4^2 \Rightarrow A_2 = 8888 \end{aligned}$$

Ответ: $(2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№2

1) Из условия получаем, что: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$

Преобразуя его, получаем: $\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (y+x+5) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-2)(y+2)} \right) = 0$$

2) Т.к. $x > 0; y > 0$, то $y+x+5 > 5 \Rightarrow y+x+5 \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-2)(y+2)} = 0 \Rightarrow \frac{xy - 2y + 2x - 4 - xy}{xy(x-2)(y+2)} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \frac{x-y-2}{xy(x-2)(y+2)} = 0$ Т.к. из условия задачи мы можем считать, что выражение $x-y-2$ существует, то $x=y+2$ - ед. условие

3) Получаем, что $y = x-2$, тогда:

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) =$$

$$= x^3 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 6x^2 + 12x =$$

$$= x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = 8 - \text{единственное возможное значение } M$$

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi(x-y)) = \cos(2\pi x)$$

$$1) \pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x-y = 2x + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = -x - 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) -\pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$-x+y = 2x + 2m, m \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3x + 2m, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(x; -x - 2n), \forall n \in \mathbb{Z}$ x-любое действительное число
 $(x; 3x + 2m), \forall m \in \mathbb{Z}$ x-любое действительное число

$$b) \arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) < \pi \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

Учитывая, что: $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(c) \leq \frac{\pi}{2}$ - следствие из сб-в данной ф-ии

$$\Rightarrow \arcsin(c_1) + \arcsin(c_2) \leq \frac{\pi}{1}, \text{ причем}$$

$(\arcsin(c_1)) + \arcsin(c_2) \geq \pi$ тогда и только тогда, когда

$$c_1 = c_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \arcsin(c_1) + \arcsin(c_2) = \pi;$$

$$\arcsin(c_1) = \arcsin(c_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

А значит нам не подходит пара, где $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = 1$
 \Rightarrow нам не подходит пара $(6;2)$

Все же остальные пары, удовлетворяющие условию из пункта (а) и входящие в ОДЗ нам подходят.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

1. $x = -6 \Rightarrow y \in \{-2; 0; 2\}$
2. $x = -5 \Rightarrow y \in \{-1; 1\}$
3. $x = -4 \Rightarrow y \in \{-2; 0; 2\}$
- ⋮
13. $x = 6 \Rightarrow y \in \{-2; 0; 2\}$

можно заметить, что исходя из условия из пункта (а) мы можем получать у только той-же ячейки, что и x

\Rightarrow

$$\Rightarrow \forall x \in \{-6; -5; -4; -3; -2; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\} \quad y \in \{-2; 0; 2\}$$

$$\forall x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\} \quad y \in \{-1; 1\}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = 7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 21 + 12 = 33$$

одной ячейки
пар

т.к. из всех этих пар нам не подходит пара $(6;2)$, то

$$N_0 = N - 1 = 33 - 1 = 32$$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отмьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

1) Пусть в классе учатся x человек; число билетов было увеличено на y , тогда:

1. Найдём вероятность исходного события в начале месяца

$$\text{Всего способов раздать } 4 \text{ билета: } C_x^4$$

$$\text{Способы раздать билеты Петре, Васи и ещё } 2^m \text{ людям: } C_{x-2}^2$$

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2 \cdot (x-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (x-4)!}{x!} \\ P_1 = \frac{12}{x \cdot (x-1)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

2. Найдём вероятность исходного события в конце месяца (аналогично тому случаю):

$$\text{Всего: } C_x^{4+y}$$

$$P_2 = \frac{C_{x-2}^{2+y}}{C_x^{4+y}} = \frac{(y+2)! \cdot 2!}{(x-2)!} \cdot \frac{(y+4)! \cdot (x-y-4)!}{x!} \Rightarrow$$

$$\text{Получаем: } C_{x-2}^{2+y} \Rightarrow P_2 = \frac{(x-2)!}{(x-y-4)! \cdot (y+2)!} \cdot \frac{(y+4)! \cdot (x-y-4)!}{x!} = \frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)}$$

$$2) \frac{P_2}{P_1} = \frac{(y+3)(y+4)}{12} = 6 \Rightarrow y^2 + 7y + 12 = 72 \Rightarrow y^2 + 7y - 60 = 0$$

$$\Delta = 49 + 4 \cdot 60 = 49 + 240 = 289 ; \sqrt{\Delta} = 17$$

$$y_1 = \frac{-7 - 17}{2} < 0 \Rightarrow \text{нестороннее значение} ; y_2 = \frac{-7 + 17}{2} = 5 ; \text{Небы} = 4 + y = 9$$

Ответ: 9



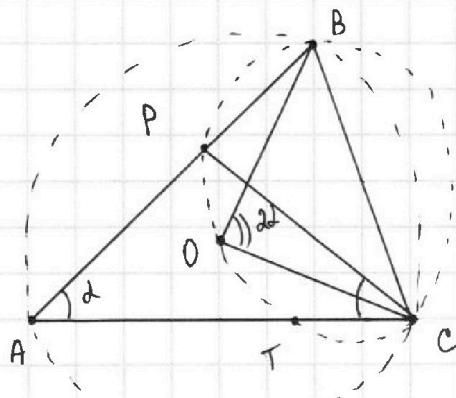
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



Дано: $AP = 25$; $PB = 5$; $AC = 35$

- 1) Пусть вписанный угол $\angle BAC = d \Rightarrow \angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 2d$ (как центральный угол)
- 2) Рассмотрим $\angle BAC$, стороны которого пересекают ω_2 в точках P и T (вн. м.с.)

$$\angle BAC = \frac{\overarc{BC} - \overarc{PT}}{2}$$

- 3) $\angle PCT = \frac{\overarc{PT}}{2}$ (как угол, вписанный в ω_2) \Rightarrow

$$\Rightarrow \angle PCT = \angle PAC = d \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle APC$ - равнобедренный \Rightarrow

$$\Rightarrow PC = AP = 25$$

$$\angle BOC = 2d - \text{вписанный в } \omega_2 \text{ угол} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overarc{BC} = 2 \cdot \angle BOC = 4d$$

$$\text{Тогда: } d = \frac{4d - \overarc{PT}}{2} \Rightarrow \overarc{PT} = 2d$$

- 4) Запишем теорему косинусов для $\triangle APC$:

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos d \Rightarrow 25^2 = 25^2 + 35^2 - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \cos d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 25 \cdot \cos d = 35^2 \Rightarrow \cos d = \frac{35}{10}$$

$$\sin d = \sqrt{1 - \cos^2 d} = \sqrt{\frac{100 - 49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$5) S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin d \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} \cdot 36 \cdot 35 = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

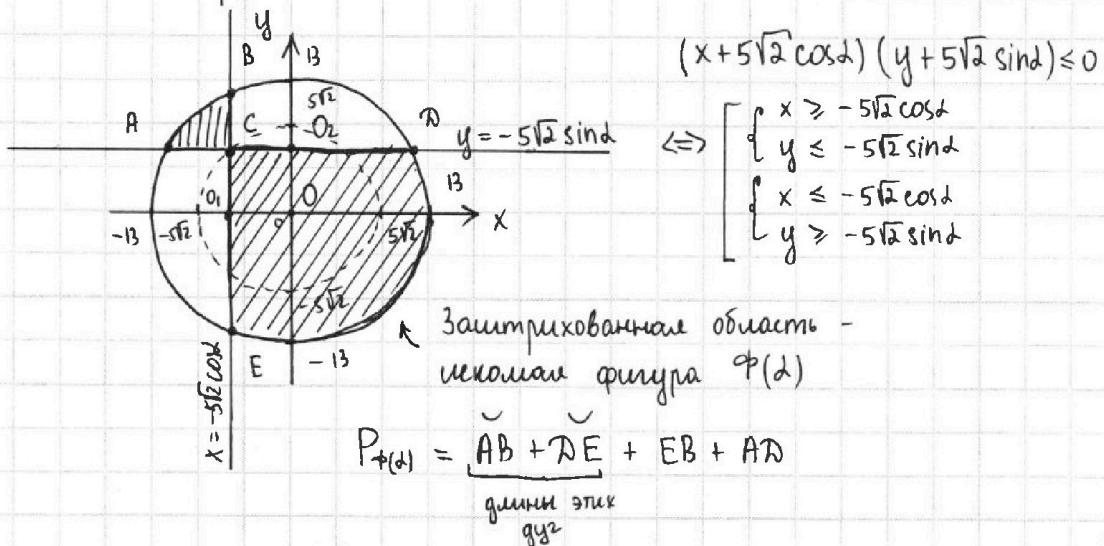
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Nº 6

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \lambda)(y + 5\sqrt{2} \sin \lambda) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

↗ уравнение круга, ограниченного окружностью с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $R = 13$

Рассмотрим плоскость XOY :



1) Пусть дуга AB образует центральный угол λ_1 ; дуга DE образует центральный угол λ_2

$$\angle BCA = 90^\circ = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = \pi$$

$$\overbrace{AB + DE}^{R\lambda_1 + R\lambda_2} = R(\lambda_1 + \lambda_2) = \pi R = 13\pi \quad \forall \lambda$$

2)

$$f_1(\lambda) = EB + AD = 2 \cdot (\sqrt{169 - 50\cos^2 \lambda} + \sqrt{169 - 50\sin^2 \lambda})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Обозначим $f(\alpha) = \frac{f_1(\alpha)}{2} = \sqrt{169 - 50\cos^2\alpha} + \sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}$ и заметим, что: $P_{t(\alpha)} \rightarrow \max \Leftrightarrow f(\alpha) \rightarrow \max$

$$f'(\alpha) = \frac{50 \cdot 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}} - \frac{50 \cdot 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25\sin 2\alpha \left(\frac{\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} - \sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}}{\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} \cdot \sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} > 0 \\ \sqrt{169 - 50\cos^2\alpha} > 0 \end{cases} \forall \alpha \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \\ \sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} = \sqrt{169 - 50\cos^2\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \\ 50(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

При нахождении максимальных расстояний
один период для 2α (этого достаточно, т.к. период $f(\alpha)$ равен 2π)

$f'(\alpha)$ $\oplus \ominus \oplus \ominus \oplus \dots \Rightarrow$ τ -и максимума:

$$\frac{f(\alpha)}{\alpha} \circ / \overset{\oplus}{\nearrow} \frac{\pi}{2} \searrow \pi \nearrow \frac{3\pi}{2} \searrow 2\pi \nearrow 2\alpha \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ такие замечания, что во всех этих точках максимума значение $f(\alpha)$ одинаково, а значит значение функции в этих точках равно и максимальное значение функции

$$\cos^2\alpha = \sin^2\alpha = \frac{1}{2}$$

значение угла α , при котором достигается максимум $P_{t(\alpha)} = M$

$$4) f_{\text{макс}} = \sqrt{169 - 50/2} + \sqrt{169 - 50/2} = 12 + 12 = 24$$

$$P_{t(\alpha)}_{\max} = 13\pi + 2f_{\text{макс}} = 13\pi + 48$$

Ответ: $P_{t(\alpha)}_{\max} = M = 13\pi + 48; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N⁰4

Пусть было x генов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Берю: C_x^4

подходит: C_{x-2}^2

$$\left. \begin{array}{l} \\ P(1) = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2 \cdot (x-4)!} \cdot \frac{4! (x-4)!}{x!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{x \cdot (x-1) \cdot x} = \frac{12}{x(x-1)} \end{array} \right\}$$

Берю: C_x^{4+y}

подходит: C_{x-2}^{2+y}

$$\left. \begin{array}{l} \\ P(2) = \frac{C_{x-2}^{2+y}}{C_x^{4+y}} = \frac{(x-2)!}{(2+y)!} \cdot \frac{(4+y)! \cdot (x-y)!}{x!} = \end{array} \right\}$$

$$\frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)} \cdot \frac{x(x-1)}{12} = 6 \frac{12}{(2+y)!} = \frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)} \cdot \frac{101}{101} = \frac{101}{101}$$

$$\Rightarrow y^2 + 7y + 12 = 72 \Rightarrow y^2 + 7y - 60 = 0$$

$$\Delta = 49 + 4 \cdot 60 = 289; \sqrt{\Delta} = 17 \quad y_1 = \frac{-7-17}{2} < 0 \Rightarrow \cancel{y_1}$$

$$\Rightarrow N = 4 + 5 = 9 \quad y_2 = \frac{-7+17}{2} = 5$$

$$25^2 = 25^2 + 35^2 - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \cos \alpha = 35^2 - 25^2$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{51}}{\sqrt{10}} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{10} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{100-49}}{10} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$



На одной странице можно оформлять **только** одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
ИЗ

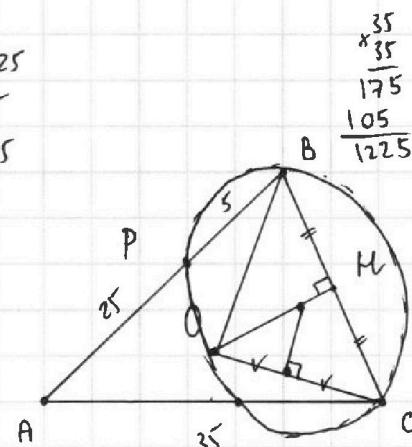
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5

$$AP = 25$$

$$BP = 5$$

$$AC = 35$$



$$\begin{array}{r} x \\ \times 35 \\ \hline 175 \end{array}$$

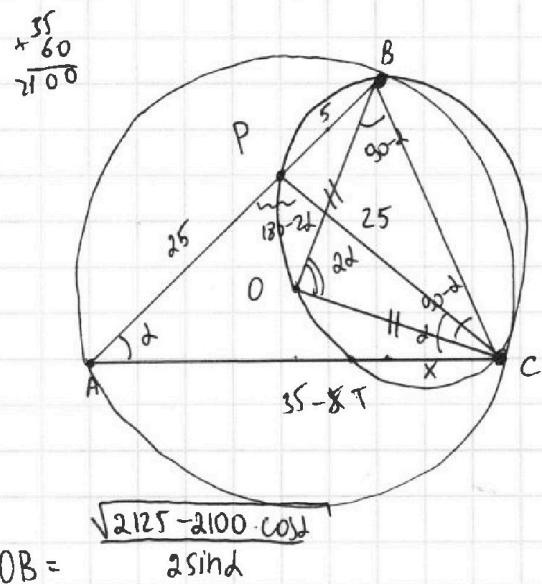
$$\begin{array}{r} 105 \\ \hline 1225 \end{array}$$

$$25 \cdot 30 = (35-x) \cdot 25 \cdot 7$$

$$150 = 245 - 7x$$

$$7x = 95$$

$$x = \frac{95}{7}$$



$$OB = 2\sinh d$$

$$BC^2 = 2OB^2 - 2OB \cdot \cos 2d = 2 \cdot OB^2 (1 - \cos 2d) \quad \angle BCP =$$

$$2125 - 2100 \cdot \cos 2d = \frac{2125 - 2100 \cdot \cos 2d}{2 \cdot \sin^2 d} = (1 - \cos 2d)$$

$$d = \frac{\overline{BC} - \overline{PT}}{2} = \frac{2d - \overline{PT}}{2} = d - \frac{\overline{PT}}{2}$$

$$d = \frac{4d - \overline{PT}}{2} = 2d - \frac{\overline{PT}}{2} \Rightarrow \overline{PT} = 2d$$

$$BC^2 = 30 \cdot 30 + 35 \cdot 35 - 2 \cdot 30 \cdot 35 \cdot \cos 2d$$

$$BC = \sqrt{2125 - 2100 \cos 2d}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(\alpha) = 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{169 - 50\sin^2\alpha}{25}} + \sqrt{\frac{169 - 50\cos^2\alpha}{25}} \right) \quad (12) \quad f(\alpha) \rightarrow \max$$

$$f'(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) = \sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} + \sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}$$

$$f'(\alpha) = \frac{-50 \cdot 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}} + \frac{50 \cdot 2 \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha}{2 \cdot \sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}}$$

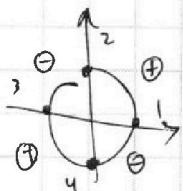
$$f'(\alpha) = 100 \sin\alpha \cos\alpha$$

$$f'(\alpha) = \frac{50 \sin 2\alpha}{2} \left(\frac{\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} - \sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}}{5\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha} \sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}} \right)$$

$$1) \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) 169 - 50\sin^2\alpha = 169 - 50\cos^2\alpha \Rightarrow 50\cos 2\alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha = 0,02 \quad \cos 2\alpha = 0 \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$$



$$P_{\max} = 48 + \pi$$

$$\cos \beta \quad \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha > 0 \\ \cos^2 \alpha > \sin^2 \alpha$$

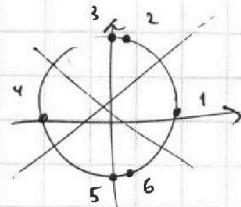
$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi z$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\alpha = -\frac{3\pi}{4} + \pi z$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 13^2 \end{cases}$$



1) $\begin{cases} x + 5\sqrt{2}\cos\alpha \geq 0 \\ y + 5\sqrt{2}\sin\alpha \leq 0 \end{cases}$

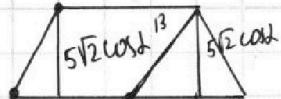
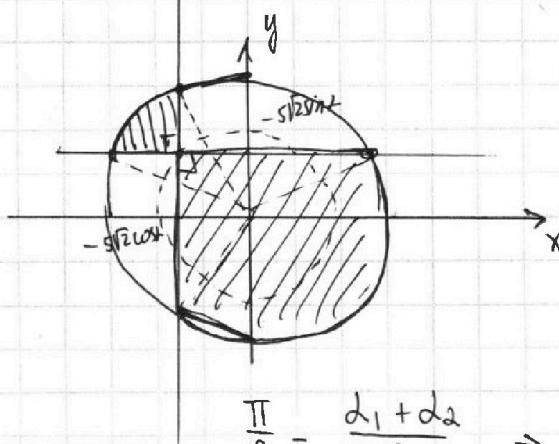
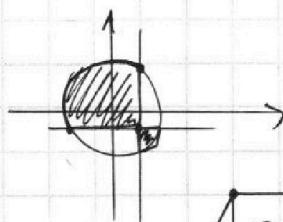
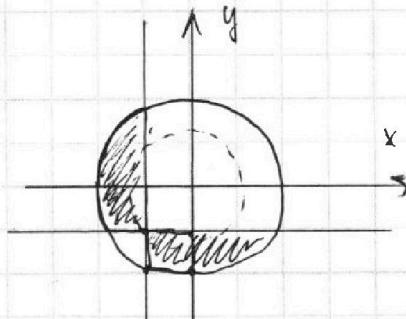
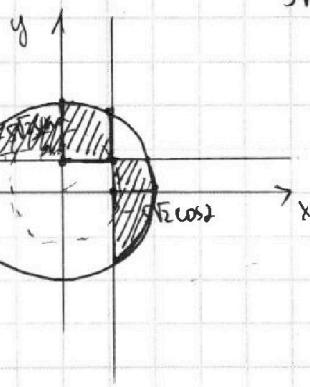
2) $\begin{cases} x + 5\sqrt{2}\cos\alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2}\sin\alpha \geq 0 \end{cases}$

$$-5\sqrt{2} \leq 5\sqrt{2}\cos\alpha \leq 5\sqrt{2}$$

$$5\sqrt{2} \approx$$

$$5\sqrt{2} \square 13$$

$$25 \cdot 2 \square 169$$



$$16 + 70 = \underline{\underline{86}}$$

$$2\sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}$$

$$2\sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \pi$$

$$l = R\alpha_1 + R\alpha_2 = R(\alpha_1 + \alpha_2) = \pi R$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$A = \overline{xxx8} = 1000 \cdot x + 100x + 10x + x = 1111x \quad x \in [1; 9]$$

$$A \cdot B \cdot C = m^2 \quad m \in \mathbb{N}$$

$$m^2 : 11 \quad m^2 : 11^2$$

$$m^2 : 101 \quad m^2 : 101^2$$

$$B \cdot C : 11 \cdot 101$$

$$\frac{1111}{11} \frac{111}{101} = \underline{\underline{11 \cdot 101}}$$

$$\underbrace{B : 11}_{C : 101}$$

$$\underbrace{B : 101}_{C : 11}$$

$$B : \cancel{11 \cdot 101}$$

$$B : \cancel{\dots}$$

$$B : 11 \cdot 101$$

$$\textcircled{1} \quad \cancel{C : 101}$$

$$B \cdot 16$$

$$B \cdot 61$$

$$B \cdot 26$$

$$B \cdot 62$$

$$B \cdot 36$$

$$B \cdot 63$$

$$B \cdot 46$$

$$B \cdot 64$$

$$B \cdot$$

$$\text{leg:cm} \cdot$$

$$\textcircled{B : 101}$$

$$\textcircled{C : 11}$$

$$101 \cdot 2 \cdot 3$$

$$33$$

$$3 \cdot 11$$

$$B = 101 \cdot 2 \cdot 3 = \underline{\underline{606}}$$

$$C = 3 \cdot 11 = \underline{\underline{33}}$$

$$A = 1111 \cdot 2 = \underline{\underline{2222}}$$

$$24 = \frac{4}{3}$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{3} > \cos^2 \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 101 \\ 101 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$M = x^3 - y^5 - 6xy$$

№2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow (x+y+5) \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{(x-2)(y+2)} \right) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{x+y+5}{xy} = 0 \Rightarrow \cancel{x} \cancel{y} \quad \frac{1}{xy} + \frac{1}{(x-2)(y+2)} = 0$$

$$\frac{xy - 2y + 2x - 4 - xy}{xy(x-2)(y+2)} = 0$$

$$2x - 2y = 4$$

$$x - y = 2$$

$$x = y + 2$$

$$\cancel{x} = \cancel{y} + 2$$

$$y = x - 2$$

$$M = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) = x^3 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 6x^2 + 12x$$

$$= x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = \textcircled{8}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Nº 3

$$\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cancel{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$

$$\cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi(x-y)) = \cos(2\pi x) \quad \frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \quad (x; -x-2n), \text{ где}$$

$$1) \pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi n \quad \left. \begin{array}{l} \frac{\pi}{3} \\ -\frac{\pi}{3} \end{array} \right\} \pi - 2n \quad x - \text{любое действительное} \\ n \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2) -\pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi n \quad \frac{1}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \quad \frac{x}{6} = \frac{y}{2} = 1$$

$$x-y = 2x+2n \quad x+y = -2n$$

$$-x-y = 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = -x-2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-x+y = 2x+2m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow -3x+y = 2m$$

$$y = 3x+2m, m \in \mathbb{Z}$$

$$① \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi \quad \arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \quad -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \quad \arcsin p \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

$$y = -1; 1^2 \quad x = \{-6; -3; -1; 1; 3; 5; 6\}$$

$$① x = -6: y = 6-2n \xrightarrow[n=0]{-2} y = -18+2m$$

$$y = -2; 0; 2 \quad x = \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\}$$

$$② x = -5: y = -1; 1$$

$$y = -1; 1 \quad x = \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\}$$

$$③ x = -3; y = -1; 1$$

$$6 \cdot 2 + 3 \cdot 7 =$$

$$= 12 + 21 = \underline{\underline{33}}$$