



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

1) Пусть x - цифра числа A ($x \in [1; 9]$) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow A = 1000x + 100x + 10x + x = 1111x$

Заметим, что $1111 = 11 \cdot 101$, где 11 и 101 - простые числа

2) Тогда $A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot x \cdot B \cdot C = m^2$, где $m \in \mathbb{N}$
 $\left. \begin{matrix} m^2 : 11 \\ m^2 : 101 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} m^2 : 11^2 \\ m^2 : 101^2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow B \cdot C : 11 \cdot 101 = 1111$

3) Рассмотрим следующие случаи:

1. $B : 1111$ - невозможно, т.к. B - трёхзначное число
 $C \dots$

2. $B \dots$ - невозможно, т.к. C - двузначное число
 $C : 1111$

3. $B : 11$ - невозможно, т.к. C - двузначное число
 $C : 101$

4. $\left. \begin{matrix} B : 101 \\ C : 11 \end{matrix} \right\}$ - единственный возможный случай $\swarrow$ единственный случай, если нет

4) т.к. одна из цифр числа $B = 6$, то $B = 101 \cdot 6 = 606$

т.к. одна из цифр числа $C = 3$, то $C = 11 \cdot 3 = 33$

5) $B \cdot C \cdot A = \underbrace{11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2}_{\text{уже полный квадрат натурального числа}} \cdot 2x : m^2$
 $\left. \begin{matrix} \text{уже полный квадрат натурального числа} \\ 2x - \text{полный квадрат} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{единственный возможный случай}$

$\Rightarrow \begin{matrix} x = 2 \Rightarrow 2x = 2^2 & A_1 = 2222 \\ x = 8 \Rightarrow 2x = 4^2 & A_2 = 8888 \end{matrix}$

Ответ: $(2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2

1) Из условия получаем, что: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$

Преобразуем его, получаем: $\frac{y+x+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{(x-2)(y+2)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (y+x+5) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-2)(y+2)} \right) = 0$$

2) т.к. $x > 0; y > 0$, то $y+x+5 > 5 \Rightarrow y+x+5 \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-2)(y+2)} = 0 \Rightarrow \frac{xy - 2y + 2x - 4 - xy}{xy(x-2)(y+2)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-y-2}{xy(x-2)(y+2)} = 0 \quad \text{т.к. из условия задачи мы}$$

можем считать, что выражение К существует, то $x = y+2$ - условие

3) Получаем, что $y = x-2$, тогда:

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = x^3 - (x-2)^3 - 6x(x-2) =$$

$$= x^3 - (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 6x^2 + 12x =$$

$$= x^3 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8 - 6x^2 + 12x = 8$$

единственно возможное значение M

Ответ: 8



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi(x-y)) = \cos(2\pi x)$$

$$1) \pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x-y = 2x + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = -x - 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) -\pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$-x+y = 2x + 2m, m \in \mathbb{Z}$$

$$y = 3x + 2m, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(x; -x-2n)$, где x — любое действительное число, $n \in \mathbb{Z}$

$(x; 3x+2m)$, где x — любое действительное число, $m \in \mathbb{Z}$

$$б) \arcsin\left(\frac{x}{6}\right) + \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) < \pi \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

Известно, что: $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(c) \leq \frac{\pi}{2}$ — следствие из св-в данной ф-ии

$$\Rightarrow \arcsin(c_1) + \arcsin(c_2) \leq \frac{\pi}{1}, \text{ причем}$$

$(\arcsin(c_1)) + \arcsin(c_2) \geq \pi$ тогда и только тогда, когда

$$c_1 = c_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \arcsin(c_1) + \arcsin(c_2) = \pi;$$

$$\arcsin(c_1) = \arcsin(c_2) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c_1 = c_2 = 1$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

А значит нам не подходит пара, где $\frac{x}{6} = \frac{y}{2} = 1$
 $\Rightarrow$ нам не подходит пара $(6; 2)$

Все же остальные пары, удовлетворяющие условию из пункта (а) и входящие в ОДЗ нам подходят.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6 \leq x \leq 6 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

1. $x = -6 \Rightarrow y \in \{-2; 0; 2\}$

2. $x = -5 \Rightarrow y \in \{-1; 1\}$

3. $x = -4 \Rightarrow y \in \{-2; 0; 2\}$

$\vdots$

13. $x = 6 \Rightarrow y \in \{-2; 0; 2\}$

можно заметить, что исходя из условия из пункта (а) мы можем получить y только той-же четности, что и x

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \forall x \in \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\} \quad y \in \{-2; 0; 2\} \\ \forall x \in \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\} \quad y \in \{-1; 1\} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N = 7 \cdot 3 + 6 \cdot 2 = 21 + 12 = 33$$

объём
пар

Т.к. из всех этих пар нам не подходит пара $(6; 2)$, то

$$N_0 = N - 1 = 33 - 1 = 32$$

Ответ: 32



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№4

1) Пусть в классе учатся x человек; число билетов было увеличено на y , тогда:

1. Найдём вероятность искомого события в начале месяца

$$\left. \begin{array}{l} \text{Всего способов} \\ \text{раздать 4 билета: } C_x^4 \\ \text{Способы раздать} \\ \text{билеты Пете,} \\ \text{Ване и ещё 2м} \\ \text{людям: } C_{x-2}^2 \end{array} \right\} P_1 = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)!}{2 \cdot (x-4)!} \cdot \frac{4! \cdot (x-4)!}{x!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{12}{x \cdot (x-1)}$$

2. Найдём вероятность искомого события в конце месяца (аналогично той же ситуации):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Всего: } C_x^{4+y} \\ \text{Подходит: } C_{x-2}^{2+y} \end{array} \right\} P_2 = \frac{C_{x-2}^{2+y}}{C_x^{4+y}} = \frac{(x-2)!}{(x-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{(y+4)! \cdot (x-y-4)!}{x!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{(x-2)!}{(x-y-4)! \cdot (y+2)!} \cdot \frac{(y+4)! \cdot (x-y-4)!}{x!} = \frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)}$$

$$2) P_1 = \frac{(y+3)(y+4)}{12} = 6 \Rightarrow y^2 + 7y + 12 = 72 \Rightarrow y^2 + 7y - 60 = 0$$

$$D = 49 + 4 \cdot 60 = 49 + 240 = 289; \sqrt{D} = 17$$

$$y_1 = \frac{-7-17}{2} < 0 \Rightarrow \text{постороннее значение}; y_2 = \frac{-7+17}{2} = 5; \text{Нобу} = 4+y = 9$$

Ответ: 9

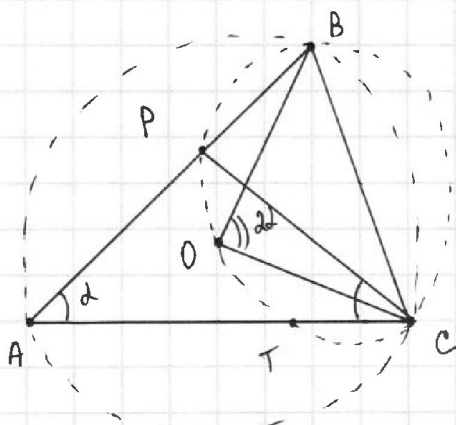


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5



Дано: $AP = 25$; $PB = 5$; $AC = 35$

- 1) Пусть вписанный угол
 $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2 \cdot \angle BAC = 2\alpha$
 (как центральный угол)
- 2) Рассмотрим $\angle BAC$, стороны которого пересекают ω_2 в точках P и T (см. рис.)

$$\angle BAC = \frac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{PT}}{2}$$

$$\angle BOC = 2\alpha - \text{вписанный в } \omega_2 \text{ угол} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 2 \cdot \angle BOC = 4\alpha$$

$$\text{Тогда: } \alpha = \frac{4\alpha - \overset{\frown}{PT}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{PT} = 2\alpha$$

- 3) $\angle PCT = \frac{\overset{\frown}{PT}}{2}$ (как угол, вписанный в ω_2) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle PCT = \angle PAC = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle APC - \text{равнобедренный} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow PC = AP = 25$$

- 4) Запишем теорему косинусов для $\triangle APC$:

$$PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot AP \cdot AC \cdot \cos \alpha \Rightarrow 25^2 = 25^2 + 35^2 - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 25 \cdot \cos \alpha = 35^2 \Rightarrow \cos \alpha = 7/10$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{100 - 49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$5) S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} \cdot 30 \cdot 35 = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

$$\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

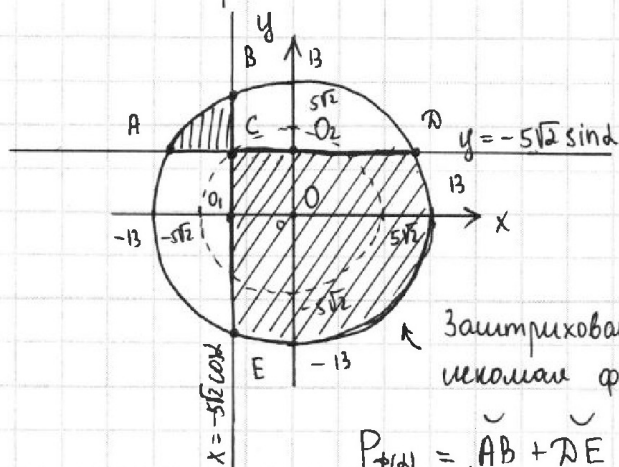
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases}$$

← уравнение круга, ограниченного окружностью с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $R=13$

Рассмотрим плоскость XOY :



$$(x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \text{ or } \begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$$

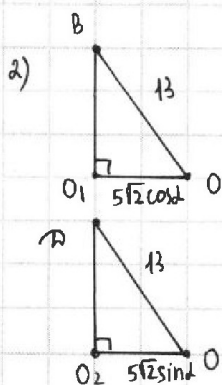
← Заштрихованная область - искомая фигура $\Phi(\alpha)$

$$P_{\Phi(\alpha)} = \underbrace{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DE}}_{\text{длины этих дуг}} + EB + AD$$

1) Пусть дуга $\overset{\frown}{AB}$ образует центральный угол α_1 ; дуга $\overset{\frown}{ED}$ образует центральный угол α_2

$$\angle BCA = 90^\circ = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \pi$$

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{DE} = R\alpha_1 + R\alpha_2 = R(\alpha_1 + \alpha_2) = \pi R = 13\pi \quad \forall \alpha$$



Из теоремы Пифагора: $BO_1 = \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$; $DO_2 = \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$

$$f_1(\alpha) = EB + AD = 2 \cdot (\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} + \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha})$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Обозначим $f(x) = \frac{f_1(x)}{2} = \frac{\sqrt{169-50\cos^2 x} + \sqrt{169-50\sin^2 x}}{2}$
и заметим, что: $P_4(x) \rightarrow \max \Leftrightarrow f(x) \rightarrow \max$

$$f'(x) = \frac{50 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \sin x}{2\sqrt{169-50\cos^2 x}} - \frac{50 \cdot 2 \cdot \cos x \cdot \sin x}{2\sqrt{169-50\sin^2 x}} = 0 \Leftrightarrow$$

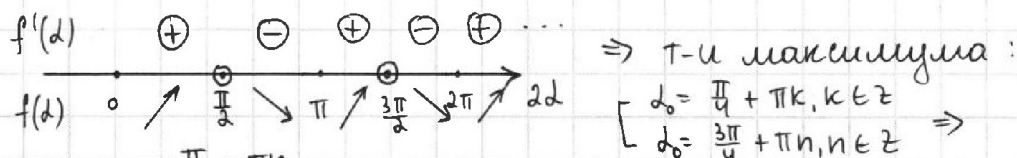
$$\Leftrightarrow 25 \sin 2x \left(\frac{\sqrt{169-50\sin^2 x} - \sqrt{169-50\cos^2 x}}{\sqrt{169-50\sin^2 x} \cdot \sqrt{169-50\cos^2 x}} \right) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{169-50\sin^2 x} > 0 \\ \sqrt{169-50\cos^2 x} > 0 \end{array} \right\} \forall x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \sqrt{169-50\sin^2 x} = \sqrt{169-50\cos^2 x} \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ 50(\cos^2 x - \sin^2 x) = 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right]$$

Для нахождения максимума рассмотрим один период для $2x$ (этого достаточно, т.к. период $f(x)$ равен 2π)

по крайней мере не < этого значения



$$\Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos^2 x_0 = \sin^2 x_0 = \frac{1}{2}$$

значение угла x , при котором достигается макс величина $P_4(x) = M$

также заметим, что во всех этих точках максимума значение $f(x)$ одинаково, а значит значениями φ -и в этих т-ах равно и максимальное значение φ -и

$$4) f_{\max} = \sqrt{169-50/2} + \sqrt{169-50/2} = 12 + 12 = 24$$

$$P_{\Phi(x)}_{\max} = 13\pi + 2f_{\max} = 13\pi + 48$$

Ответ: $P_{\Phi(x)}_{\max} = M = 13\pi + 48$; $x_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N°4

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Пусть было x человек

$$\left. \begin{array}{l} \text{всего: } C_x^4 \\ \text{подходит: } C_{x-2}^2 \end{array} \right\} P(1) = \frac{C_{x-2}^2}{C_x^4} = \frac{(x-2)! \cdot 4! \cdot (x-4)!}{2 \cdot (x-4)! \cdot x!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot (x-1) \cdot x} = \frac{12}{x(x-1)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{всего: } C_x^{4+y} \\ \text{подходит: } C_{x-2}^{2+y} \end{array} \right\} P(2) = \frac{C_{x-2}^{2+y}}{C_x^{4+y}} = \frac{(x-2)! \cdot (4+y)! \cdot (x-4-y)!}{(2+y)! \cdot (x-4-y)! \cdot x!} =$$

$$\frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)} \cdot \frac{x(x-1)}{12} = \frac{x \cdot 7}{11 \cdot 9} = \frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)} = \frac{(y+3)(y+4)}{x(x-1)} = \frac{101}{11} \cdot \frac{101}{101} = \frac{101}{1111}$$

$$\Rightarrow y^2 + 7y + 12 = 72 \Rightarrow y^2 + 7y - 60 = 0$$

$$D = 49 + 4 \cdot 60 = 289; \sqrt{D} = 17 \quad y_1 = \frac{-7-17}{2} < 0 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$\Rightarrow N \pm 4 + 5 = \textcircled{9}$$

$$y_2 = \frac{-7+17}{2} = \underline{5}$$

$$25^2 = 25^2 + 35^2 - 2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \cos \alpha$$

$$2 \cdot 25 \cdot 35 \cdot \cos \alpha = 35^2 - 25^2$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{10} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{100-49}}{10} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 35 \cdot 30 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$f(\alpha) = 2 \cdot \left(\sqrt{169 - \frac{50 \sin^2 \alpha}{25}} + \sqrt{169 - \frac{50 \cos^2 \alpha}{25}} \right) \quad f(\alpha) \rightarrow \max$$

$$f'(\alpha) \Rightarrow f(\alpha) = \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$f'(\alpha) = \frac{-50 \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cdot \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}} + \frac{50 \cdot 2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{2 \cdot \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}}$$

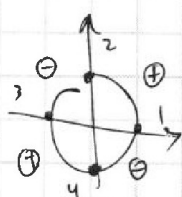
$$f'(\alpha) = 100 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$f'(\alpha) = \frac{50 \sin 2\alpha}{2} \left(\frac{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} - \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}}{\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} \cdot \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}} \right)$$

$$1) \sin 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) 169 - 50 \sin^2 \alpha = 169 - 50 \cos^2 \alpha \Rightarrow 50 \cos 2\alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha = 0, 02 \quad \cos 2\alpha = 0 \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n$$



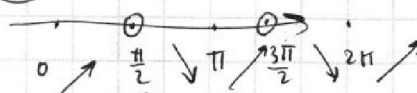
$$P_{\max} = 48 + \pi$$

$$48 + 13\pi$$

$$\cos \beta \quad \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha > 0$$

$$\cos^2 \alpha > \sin^2 \alpha$$



$$2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi z$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi z$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2}\cos\alpha)(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 13^2 \end{cases}$$

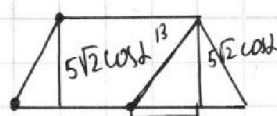
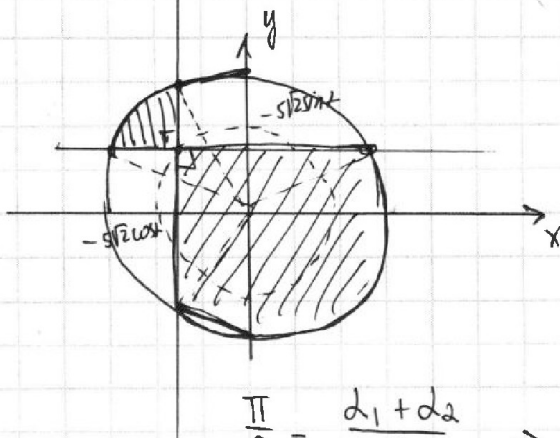
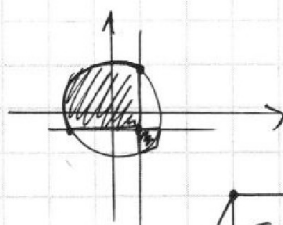
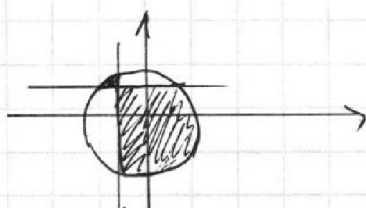
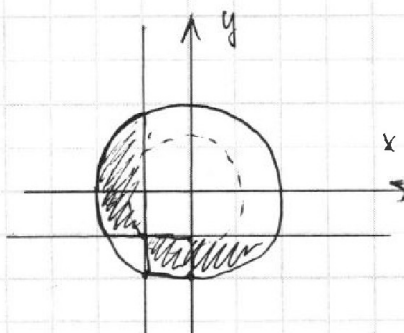
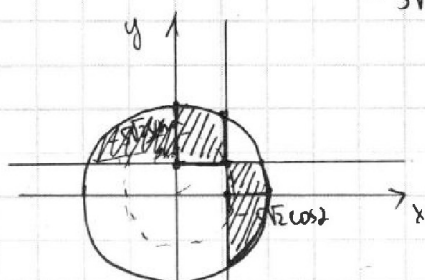


1) $\begin{cases} x + 5\sqrt{2}\cos\alpha \geq 0 \\ y + 5\sqrt{2}\sin\alpha \leq 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 5\sqrt{2}\cos\alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2}\sin\alpha \geq 0 \end{cases}$

$$-5\sqrt{2} \leq 5\sqrt{2}\cos\alpha \leq 5\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 1,4 &\approx \\ 5\sqrt{2} &\square 13 \\ 25 \cdot 2 &\square 169 \end{aligned}$$



$$16 + 70 = \underline{\underline{26}}$$

$$2 \cdot \sqrt{169 - 50\cos^2\alpha}$$

$$2 \cdot \sqrt{169 - 50\sin^2\alpha}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \pi$$

$$l = R\alpha_1 + R\alpha_2 = R(\alpha_1 + \alpha_2) = \pi R$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

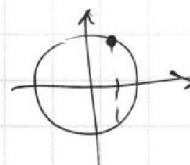
1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$\left(\sin \pi x + \sin \pi y \right) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \cos \pi y \cos \pi x$$



$$\cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi(x-y)) = \cos(2\pi x)$$

$$1) \pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi n$$

$$2) -\pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi n$$

$$x-y = 2x + 2n$$

$$x+y = -2n$$

$$-x-y = 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$y = -x - 2n, n \in \mathbb{Z}$$

$$-x+y = 2x + 2m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow -3x + y = 2m$$

$$y = 3x + 2m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\textcircled{1} \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\arcsin d \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{y}{2} \leq 1$$

$$\arcsin p \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$-6 \leq x \leq 6$$

$$-2 \leq y \leq 2$$

$$\textcircled{1} x = -6: y = 6 - 2n \rightarrow y = -18 + 2m$$

$$\textcircled{2} x = -5: y = -1; 1$$

$$\textcircled{3} x = -5; y = -1; 1$$

$$6 \cdot 2 + 3 \cdot 7 =$$

$$= 12 + 21 = 33$$

$$y = -1; 1^2 \quad x = \{-6; -3; -1; 1; 3; 5\}$$

$$y = -2; 0; 2 \quad x = \{-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6\}$$