МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y =$ $= (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть A составлено из одинак. цифр x. $\Rightarrow A = x \cdot 1111$

$A = x \cdot 101 \cdot 11$, $ABC = x \cdot 101 \cdot 11 \cdot BC = n^2$ $\Rightarrow BC \vdots 101, 11, x$

C не может быть $\vdots 101$, т.к. оно двузнач $\Rightarrow C \vdots 11$.

• Ед. число $\vdots 11$ и содержащее в себе единицу - это 11.

$C = 11$. А т.к. B не может быть кратно 101 и 11 одновременно (оно трехзначное, а $101 \cdot 11 = 1111$) и B содержит 7, то оно кратно 101, и может быть равно 101, 202, 303, ..., 909, из которых подходит 707.

• $B = 707$, $C = 11$, $ABC = x \cdot 7 \cdot 101^2 \cdot 11^2$, $x \leq 9$, $x \vdots 7$ $\Rightarrow x = 7$. Тогда подходит единственная тройка натуральных чисел $(7777; 707; 11)$

Ответ: $(7777; 707; 11)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$k=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{x+y+3}{xy}$ $\qquad k=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{y+4}+\frac{3}{(x-4)(y+4)}$

$\frac{x+y+3}{xy}=\frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} \Rightarrow \frac{x+y+3}{xy}=\frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$

$(x+y+3)\left((x-4)(y+4)-xy\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=-3 \\ 4x-4y=16 \end{array}\right.; \left[\begin{array}{l} x+y=-3 \\ x-y=4 \end{array}\right.;$

$M=x^3-y^3-12xy=(x-y)(x^2+xy+y^2)-12xy$

(1) $x-y=4$ $\qquad M=4x^2+4xy+4y^2-12xy=4(x^2-2xy+y^2).$

$M=4(x-y)^2=4^3=64$

(2) $x+y=-3$ $\qquad M=(x-y)((x+y)^2-xy)-12xy=(x-y)(9-xy)-12xy$

$\cancel{M=9x-9y-x^2y+xy^2-12xy}$ $\qquad y=-x-3$

$\cancel{M=(-x-3)^3-y^3}$ $\qquad M=x^3+(x+3)^3-12x(-x-3)=$

$=x^3+x^3+3x^2+9x+27+12x^2+36x=2x^3+15x^2$

$x,y>0 \Rightarrow x+y$ не может быть отрицательной

$\Rightarrow$ подходит только случай (1)

Ответ: 64.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

а) $(\sin \pi y - \sin \pi x)\sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x)\cos \pi y$

$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \cos \pi x \cos \pi y + \sin \pi x \sin \pi y$

$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$ $\qquad \cos 2\pi y + \cos(\pi x - \pi y) = 0$

$2\cos\left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}y - \frac{\pi}{2}x\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\left(\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}y\right)=0\\ \cos\left(\frac{3\pi}{2}y-\frac{\pi}{2}x\right)=0\end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}y=\frac{\pi}{2}+\pi n\\ \frac{3\pi}{2}y-\frac{\pi}{2}x=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.$, $n \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l}x+y=1+2n\\ 3y-x=1+2n\end{array}\right.$; Ответ: а) $(x; 2n+1-x)$, $\left(x; \frac{2n+1+x}{3}\right)$, для всех $x \in \mathbb{R}$

б) $\arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$

$\frac{x}{7} \in [-1;1]$, $\frac{y}{4} \in [-1;1]$, $\qquad \arccos\frac{x}{7} \in [0;\pi]$

$-\arcsin\frac{y}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow \arccos\frac{x}{7} - \arcsin\frac{y}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$ при любых x, y допустимых

$\Rightarrow$ Подходят все x, y такие, что $\left[\begin{array}{l}\arccos\frac{x}{7} \neq 0\\ \arcsin\frac{y}{4} \neq -\frac{\pi}{2};\end{array}\right.$ $\begin{cases}x \in [-7;7]\\ y \in [-4;4]\end{cases}$ и подходящие для уравнения из пункта а)

0. $\arcsin\frac{y}{4} \neq -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y \neq 4$

1. $\arccos\frac{x}{7} \neq 0 \Rightarrow x \neq 7$

2. $x+y=1+2n \rightarrow x$ и y разной чётности $\rightarrow$ таких пар $7 \cdot 4$ (выбор x (чет), выбор y (нечет))

$+$

нечет x $\rightarrow \overset{\text{чет } y}{8 \cdot 5} - 1$ (пара $(7;4)$)

всего $\overset{28}{7\cdot 4} + \overset{40}{8\cdot 5} - 1 = 67$

3. $y = \frac{2n+1+x}{3}$

$x = 3y - 1 - 2n$

Подходят те же пары, т.к. в этот случае тоже x и y разной чётности

Ответ: б) 67.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Пусть в конце месяца было выделено k билетов.
Способов выбрать одиннадцатиклассников с билетами в начале месяца C_n^4, а в конце — C_n^k.
Если Петя и Вася едут на концерт, способов C_{n-2}^2 и C_{n-2}^{k-2}, где n — общее кол-во одиннадцатиклассников. p_1 и p_2 — вероятности в начале и в конце $\Rightarrow p_2 = 11p_1$

$$p_2 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{11 \cdot C_{n-2}^2}{C_n^4} = 11p_1$$

$$\frac{\cancel{(n-2)!} \cdot (k-2)! \cdot \cancel{(n-k)!}}{\cancel{(n-k)!} \cdot \cancel{n!} \cdot k!} = \frac{11 \cdot \cancel{(n-2)!} \cdot 2! \cdot \cancel{(n-4)!}}{\cancel{(n-4)!} \cdot \cancel{n!} \cdot 4!}$$

$$\frac{(k-2)!}{k!} = \frac{11 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2} \Rightarrow \frac{1}{k(k-1)} = \frac{11}{4 \cdot 3}$$

$$12 = 11k^2 - 11k \Rightarrow 11k^2 - 11k - 12 = 0$$

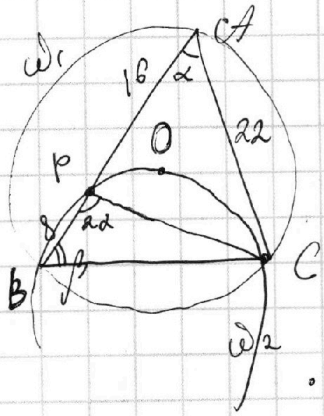
$$\cancel{D = 121 + 4 \cdot 11 \cdot 12 = 121 + 44 \cdot 12}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



• Пусть $\angle A=\alpha$, $\angle B=\beta$. Т.к. $\angle BOC$ – центральный, $\angle BOC=2\angle A=2\alpha$.

• $\angle BPC=\angle BOC=2\alpha$ как впис., опир. на одну дугу.

• $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BA\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}22\cdot24\cdot\sin\alpha$

• По теореме косинусов из $\triangle APC$ $PC^2=16^2+22^2-2\cdot16\cdot22\cos\alpha$

из $\triangle BPC$: $BC^2=8^2+PC^2-2\cdot8\cdot PC\cdot\cos2\alpha$

• $\frac{PC}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin2\alpha}$ по т. синусов из $\triangle BPC$, $\frac{PC}{\sin\alpha}=\frac{22}{\sin2\alpha}$ из $\triangle APC$

$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{22}{\sin\beta}$ из $\triangle BAC$

• $\sin\alpha=\frac{BC\sin\beta}{22}=\frac{PC\sin2\alpha}{22}=$

~~и $\sin\alpha=\frac{BC\sin\beta}{22}=\frac{PC\sin2\alpha}{22}$~~ $=\frac{(16^2+22^2-2\cdot16\cdot22\cos\alpha)\sin2\alpha}{22}$

$22=4(64+121-176\cos\alpha)\cdot2\cos\alpha$

$\cos\alpha=t$ $\quad 11=2(185-176\cos\alpha)\cdot\cos\alpha$

$2\cdot176t^2-2\cdot185\cos\alpha+11=0$

$\frac{D}{4}=185^2-11\cdot2\cdot176=34225-3872=30353$

$t_{1,2}=\frac{185\pm\sqrt{30353}}{2\cdot176}$ $\quad \frac{185+\sqrt{30353}}{2\cdot176}>1$

$\Rightarrow\cos\alpha=\frac{185-\sqrt{30353}}{2\cdot176}$ $\quad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{(185-\sqrt{30353})^2}{2^2\cdot176^2}}$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot22\cdot24\cdot\sqrt{1-\frac{(185-\sqrt{30353})^2}{2^2\cdot176^2}}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

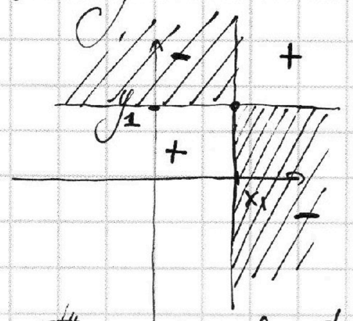
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\leq 0\\ x^2+y^2\leq 36\end{cases}$;

(подходит область внутри неё)
— окружность с ц. $(0;0)$ и $R=6$

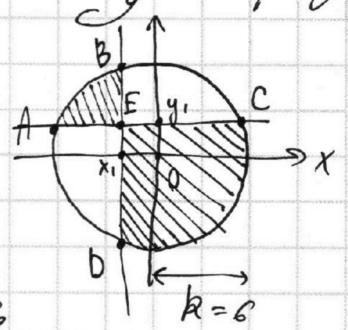


при некотором α $(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)=0$

при $x_1=-4\sin\alpha$ и $y_1=4\cos\alpha$

$\Rightarrow$ график выглядит как на рисунке

Тогда фигура $\Phi(\alpha)$ выглядит как:



P - периметр $\Phi(\alpha)$ $\Rightarrow P=AC+BD+\overset{\smile}{AB}+\overset{\smile}{CD}$

1) Пусть градусные меры дуг $\overset{\smile}{AB}$ и $\overset{\smile}{CD}$ равны φ_1 и φ_2

По формуле угла между хордами $\angle AEB=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=90°$

$\varphi_1+\varphi_2=\pi$, $\overset{\smile}{AB}+\overset{\smile}{CD}=\varphi_1 R+\varphi_2 R=R(\varphi_1+\varphi_2)=6\pi$

2) точки B и D: $\begin{cases}x=-4\sin\alpha\\ x^2+y^2=36\end{cases}$; $y^2=36-x^2=36-16\sin^2\alpha$
$y=\pm\sqrt{36-16\sin^2\alpha}$

$BD=y_B-y_D=2\sqrt{36-16\sin^2\alpha}$

точки A и C: $\begin{cases}y=4\cos\alpha\\ x^2+y^2=36\end{cases}$; $x^2=36-y^2=36-16\cos^2\alpha$
$x=\pm\sqrt{36-16\cos^2\alpha}$

$AC=y_C-y_A=2\sqrt{36-16\cos^2\alpha}$

P максимально при $AC+BD=2\left(\sqrt{36-16\sin^2\alpha}+\sqrt{36-16\cos^2\alpha}\right)$ — максимально

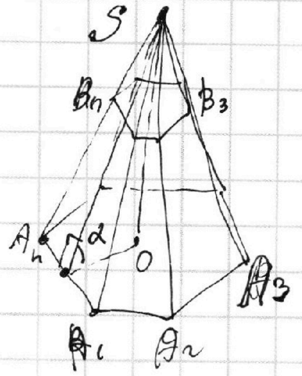
$AC+BD=2\left(\sqrt{36-16\sin^2\alpha}+\sqrt{16\sin^2\alpha+20}\right)=4\left(\sqrt{9-4\sin^2\alpha}+\sqrt{4\sin^2\alpha+5}\right)$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

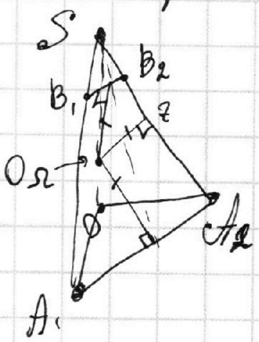
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



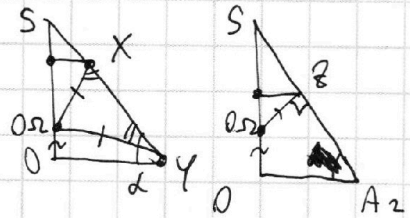
Пусть все боковые ребра пересекаются в точке S, O — центр правильного n-ка $A_1A_2\ldots A_n$. Тогда SO — высота пирамиды.

Обозначим α — угол между боковой гранью и основанием.

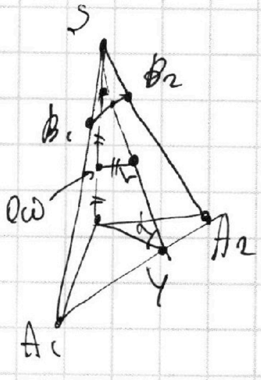
Центры ω и Ω лежат на SO из симметрии прав. пирамиды относительно SO.



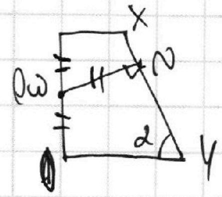
Пусть Ω касается B_1B_2 и A_1A_2 в т. X и Y, а B_2A_2 в Z. Тогда X и Y лежат на серед. перп-ре из S к A_1A_2 (из симметрии)



$O_\Omega X = O_\Omega Y = R_\Omega$



Пусть ω касается грани A_1SA_2 в т. N. Тогда N лежит на XY, O_ω — середина высоты усеченной пирамиды.



$OO_\omega = O_\omega N = R_\omega$

$O_\omega Y$ — биссектриса угла $\angle ONY$ $\Rightarrow \angle O_\omega YO = \frac{\alpha}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

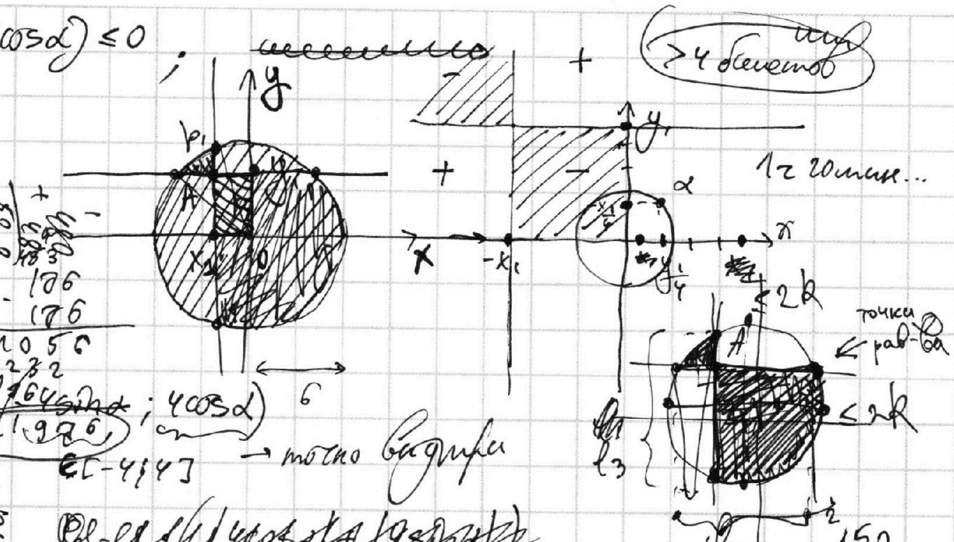
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0\\ x^2+y^2\le 36\end{cases}$$

> 4 билетов

1ч 20мин...



$x_1 = -4\sin\alpha$

$y_1 = 4\cos\alpha$

$A(x_1, y_1)$

$A(-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$ $\in[-4;4]$ → точно входит

$\Rightarrow P = P_1 + P_2$

P_1 - ?

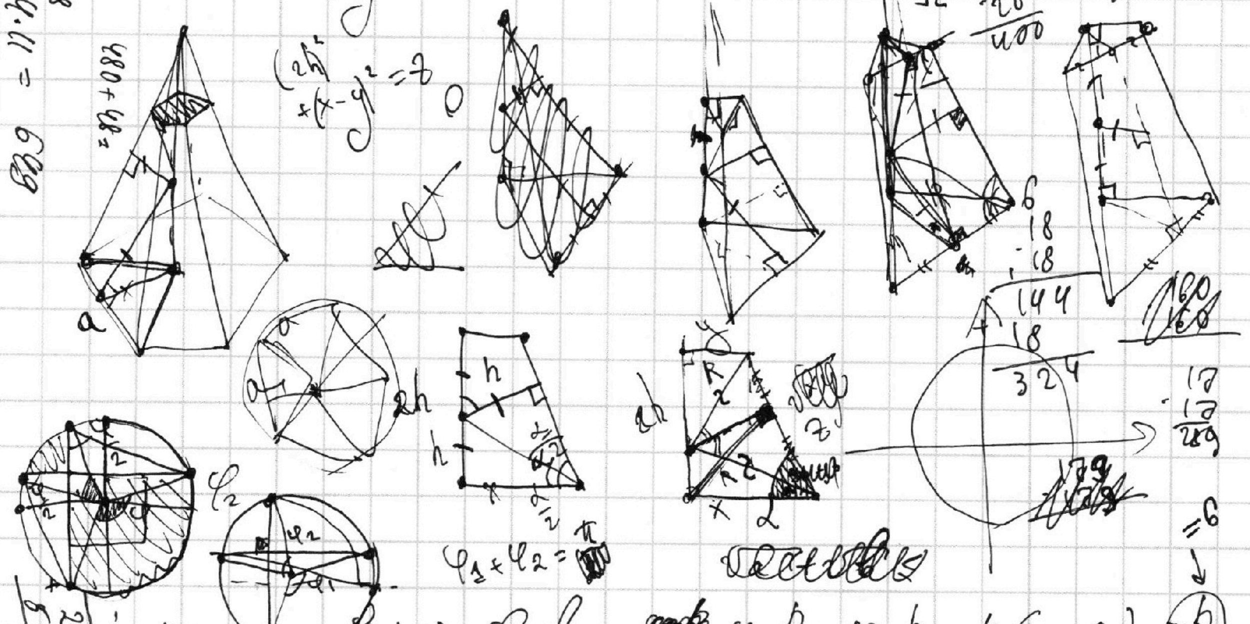
$\begin{cases}x^2+y^2=36\\ y=4\cos\alpha\end{cases}$ → $\boxed{x^2 = 36-16\cos^2\alpha}$ → $\ell_4 =$

точки рав-ва

$150\cdot150 = 22500$

$20\cdot20 = 400$

$121 + 12\cdot4\cdot11 = 649$



$18\cdot18 = 324$

$17\cdot17 = 289$

$\varphi_1+\varphi_2 = \pi$

$\ell_1+\ell_2 = \varphi_1\cdot R + \varphi_2\cdot R = R(\varphi_1+\varphi_2) = \pi R$

$\pi R + (\ell_3+\ell_4)$ max

$\pi R + 4R = (\pi+4)\cdot 6 = 6\pi+24$ не правда

α - ?

такого не бывает

$a+b \ge 2\sqrt{ab}$ $\quad 1+b \ge 2\sqrt{b}$

$a = \sqrt{4\sin^2\alpha+5}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$\underline{x}\,\underline{x}\,\underline{x}\,\underline{x} \vdots 11$ $\quad A\cdot B\cdot C = n^2$ $\quad -7\ -6\ -5\ -4\ -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$

$\underline{y}\,\underline{z}\,\underline{z}$ $\quad B$

$\underline{6}\,\underline{1}$

$A = x\cdot 1111 = x\cdot 11\cdot 101$

$\underline{y}\,\underline{z}\,\underline{z} \vdots 101 \to 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909, \cancel{1010}$

$C \vdots 11 \Rightarrow C = 11$

$B\cdot C \vdots x$

$-4\ -3\ -2\ -1\ 0\ 1\ 2\ 3\ 4$

$B\cdot C = 7\cdot 101\cdot 11 \Rightarrow x = 7$

$352 \cdot 11 = 352 + 352\_ = 3872$

$-13-2n$

$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ $\quad x, y > 0$ $\quad M = x^3 - y^3 - 12xy$?

$k = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}$

$k = \frac{x+y+3}{xy} \Rightarrow (x-4)(y+4) = xy$ $\quad -13+2n \to -7, -5, -3$

$xy - 4y + 4x - 16 = xy \to -4y + 4x - 16 = 0$

$x - y = 4$ $\quad 176 \cdot 2 = 352$

$M = (x-y)(x^2+xy+y^2) - 12xy = 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy$

$M = 4x^2 + 4y^2 - 8xy = 4(x^2 - 2xy + y^2) = 4(x-y)^2 = 4^3$ $\quad 30352$

$x, y \in \mathbb{R}$ $\quad (\sin\pi y - \sin\pi x)\sin\pi y = (\cos\pi y + \cos\pi x)\cos\pi y$

а) $\cancel{\sin^2\pi y - \cos^2\pi y}$ $\quad \sin^2\pi y - \cos^2\pi y = \cos\pi x\cos\pi y + \sin\pi x\sin\pi y$

$-\cos 2\pi y = \cos(\pi x - \pi y)$

$2\cos\frac{\pi}{2}(x+y)\cos\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}y\right) = 0$

$\cos(\pi x - \pi y) + \cos 2\pi y = 0$

$\left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}(x+y) = \pi n \\ \frac{\pi}{2}x - \frac{3\pi}{2}y = \pi n \end{array}\right.$;

для целых:

$\left[\begin{array}{l} x + y = 2n \\ x - 3y = 2n \end{array}\right.$; $\to$ одна четность $\quad \to$ одна чет.

б) $x, y \in \mathbb{Z}$ $\quad \underbrace{\arccos\frac{x}{7}}_{\alpha} - \underbrace{\arcsin\frac{y}{4}}_{\beta} > -\frac{\pi}{2}$ $\quad \alpha \in [0; \pi]$, $\beta \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$x \in [-7; 7] \setminus \{7\}$ $\quad \frac{3\pi}{2} \geq \alpha - \beta \geq -\frac{\pi}{2}$

$y \in [-4; 4] \setminus \{4\}$ $\quad \sin(\alpha - \beta) > \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ $\quad \begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{x}{7} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x \neq 7 \\ y \neq 4 \end{cases}$

$\Rightarrow 7\cdot 5 + 7\cdot 4 = 35 + 28 = 63$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

n, 4б: $p_1 = \dfrac{1\cdot 1\cdot (n-2)\cdot(n-3)}{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)(n-3)} = \dfrac{1}{n(n-1)}$

n, kб: $p_2 = \dfrac{1\cdot 1\cdot (n-2)\cdot\ldots\cdot(n+1-x)}{n(n-1)\ldots(n+1-x)} = \dfrac{1}{n(n-1)}$

$34225 - 3872 = 30353$ НЕТ

C_n^4 – выбрать чел. с билетами

C_{n-2}^4 – не выбрать П и В

$p_1 = 1 - \dfrac{C_{n-2}^4}{C_n^4}$ $\qquad p_2 = 1 - \dfrac{C_{n-2}^k}{C_n^k}$ $\qquad p_2 = 11\cdot p_1$

$11 - 11\cdot\dfrac{\frac{(n-2)!\,4!}{(n-6)!}}{\frac{n!\,4!}{(n-4)!}} = 1 - \dfrac{\frac{(n-2)!\,k!}{(n-2-k)!}}{\frac{n!\,k!}{(n-k)!}}$

$10 = \dfrac{11\cdot(n-4)(n-5)}{n\cdot(n-1)} - \dfrac{(n-k)(n-1-k)}{n(n-1)}$

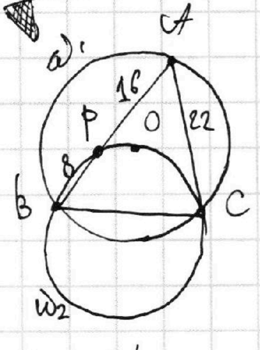
$10n(n-1) = 11(n^2-9n+20) - (n^2-n-2nk+k+k^2)$

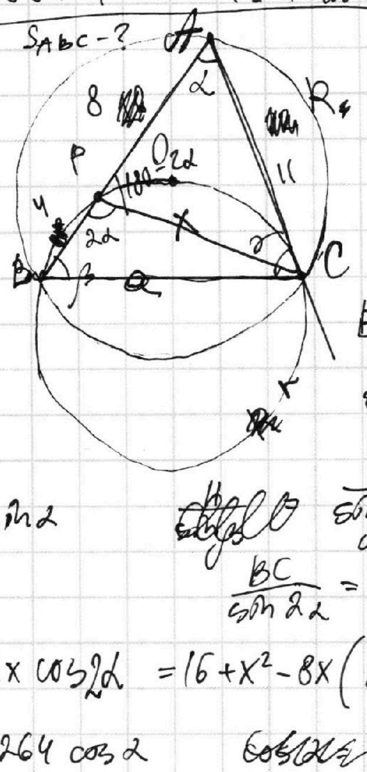
$0 = n^2 - 89n + 220 - n^2 + n + 2nk - k - k^2$

$k^2 + k(1-2n) - 88n + 220 = 0$

$D = (1-2n)^2 + 88n\cdot 4 - 220\cdot 4 = 1 - 4n + 4n^2 + 88n\cdot 4 - 220\cdot 4$

$64 \cdot 42$, $185\cdot 185 = 925 + 14800 + 18500 = 34225$





$\angle BOC = 2\alpha$

$\angle BPC = 2\alpha$

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 11\cdot 12\cdot\sin\alpha$

$BC^2 = 121 + 144 - 2\cdot 11\cdot 12\cos\alpha = 265 - 264\cos\alpha$

$186 \mid 5$, 37

$PC^2 = 64 + 121 - 2\cdot 88\cos\alpha = 185 - 176\cos\alpha$

$BC^2 = 16 + 185 - 176\cos\alpha - 2\cdot 4\cdot\sqrt{185-176\cos\alpha}\cdot\cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = (2\cos^2\alpha - 1)$

$\parallel$ $265 - 264\cos\alpha$

$\dfrac{11}{\sin\beta} = \dfrac{12}{\sin\gamma} = \dfrac{BC}{\sin\alpha} = 2R$ $\qquad \dfrac{x}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin 2\alpha}$

$\dfrac{BC}{\sin 2\alpha} = 2r = \dfrac{4}{\sin(2\alpha+\beta)} = \dfrac{PC}{\sin\beta}$ $\qquad \dfrac{x}{\sin\alpha} =$

$\dfrac{x}{\sin\alpha} = \dfrac{11}{\sin 2\alpha}$

$a^2 = 16 + x^2 - 8x\cos 2\alpha = 16 + x^2 - 8x(2\cos^2\alpha - 1)$

$a^2 = 265 - 264\cos\alpha$ $\qquad \cos\alpha = \dfrac{265-a^2}{264}$ $\qquad \sin 2\alpha = \dfrac{11\sin\alpha}{x}$

$a^2 = 16 + x^2 - 8x\left(\dfrac{265-a^2}{132} - 1\right)$