



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача №1

$$A = \overline{nnnn} = \overline{nn} \cdot 101 = n \cdot 11 \cdot 101, \text{ где } n \text{ цифра } (\in [1; 9])$$

, т.к. $A \cdot B \cdot C = x^2$, то $B \cdot C$ должно делиться на 101 (101-простое). Но $C < 100 \Rightarrow B \nmid 101 \Rightarrow$

$$B \mid 101. \text{ Тогда } B \in \{101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909\}.$$

Из условия B имеет цифру 1 $\Rightarrow B = 101$.

Заметим также, что $A \mid 11$, $A \cdot B \cdot C = x^2 \Rightarrow B \cdot C \mid 11$,

$$\text{но } B = 101 \nmid 11 \Rightarrow C \mid 11 \Rightarrow C \in \{11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99\}$$

Из условия C имеет цифру 5 $\Rightarrow C = 55$

$$x^2 = A \cdot B \cdot C = n \cdot 11 \cdot 101 \cdot 101 \cdot 11 \cdot 5 \Rightarrow n = 5 \cdot a^2,$$

$$\text{но } n \in [1; 9] \Rightarrow a^2 < 2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$$

$$n = 5. \Rightarrow A = 5555 \quad B = 101 \quad C = 55$$

$$\text{Ответ: } A = 5555 \quad B = 101 \quad C = 55$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Zadacha №2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \quad x, y > 0$$

$$\frac{y+x+1}{xy} = \frac{y+3+x-3+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow (x+y+1) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} xy = (x-3)(y+3) \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = xy - 3y + 3x - 9 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 9 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-y = 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3+y \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3+y \quad (y > 0)$$

$$\begin{aligned} M &= x^3 - y^3 - 9xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = \\ &= 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = 3x^2 + 6xy + 3y^2 = 3(x^2 - 2xy + y^2) = \\ &= 3 \cdot (x-y)^2 = 3 \cdot 9 = 27 \end{aligned}$$

Ответ: 27

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Sagara №3

$$a) (\sin \sqrt{2}x - \sin \sqrt{2}y) \cdot \sin \sqrt{2}x = (\cos \sqrt{2}x + \cos \sqrt{2}y) \cdot \cos \sqrt{2}x$$

$$\sin^2(\sqrt{2}x) - \sin \sqrt{2}x \cdot \sin \sqrt{2}y = \cos^2(\sqrt{2}x) + \cos \sqrt{2}x \cdot \cos \sqrt{2}y$$

$$\sin^2(\sqrt{2}x) - \cos^2(\sqrt{2}x) = \cos \sqrt{2}x \cdot \cos \sqrt{2}y + \sin \sqrt{2}x \cdot \sin \sqrt{2}y$$

$$-\cos(2\sqrt{2}x) = \cos(\sqrt{2}x - \sqrt{2}y)$$

$$\cos(\sqrt{2}t - 2\sqrt{2}x) = \cos(\sqrt{2}x - \sqrt{2}y)$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}t - 2\sqrt{2}x = \sqrt{2}x - \sqrt{2}y \\ \sqrt{2}t - 2\sqrt{2}x = \sqrt{2}y - \sqrt{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = x - y \\ 1 - 2x = y - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 1 - x \end{cases}$$

Ответ: а) $\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = 1 - x \end{cases}$

$$d) \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \Rightarrow \frac{x}{4} \in [-1; 1] \quad \frac{y}{9} \in [-1; 1] \Rightarrow x \in [-4; 4], y \in [-9; 9], x, y \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 - x : \quad x = -4 \quad x = -3 \quad x = -2 \quad x = -1 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2 \quad x = 3 \quad x = 4$$

$$y = 5 \quad y = 4 \quad y = 3 \quad y = 2 \quad y = 1 \quad y = 0 \quad y = -1 \quad y = -2 \quad y = -3$$

$$y = 3x - 1 : \quad x = -4 \quad x = -3 \quad x = -2 \quad x = -1 \quad x = 0 \quad x = 1 \quad x = 2 \quad x = 3 \quad x = 4$$

$$(y = -13) \quad (y = -10) \quad y = -7 \quad y = -4 \quad y = -1 \quad y = 2 \quad y = 5 \quad y = 8 \quad (y = 11)$$

По области определения подходит 15 пар (x, y) .

$$\arccos(a) + \arccos(b) \leq 2\pi \text{ всегда, т.к. } \arccos(t) \in [0; \pi]$$

$$\Rightarrow \arccos(a) + \arccos(b) = 2\pi \Leftrightarrow a = 1 \quad b = 1.$$

Тогда если $\arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \arccos\left(\frac{y}{9}\right) = 2\pi \Rightarrow x = 4, y = 9$, ~~но~~ ~~но~~ такой пары среди ~~всех~~ тек 15-ти нет \Rightarrow

$\arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \arccos\left(\frac{y}{9}\right) < 2\pi$ выполняется для всех 15 пар \Rightarrow

Ответ: д) 15 пар.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Задача №9

Пусть k - кол-во 11-классников.
 Вероятность того, что Петя и Вася получат 6 баллов в начале месяца = $\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4}$

C_{k-2}^2 ← распределение 2-х баллов среди всех, кроме Петя и Вася

C_k^4 ← распределение 4-х баллов среди всех

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{\frac{(k-2)!}{2! \cdot (k-4)!}}{\frac{k!}{4! \cdot (k-4)!}} = \frac{(k-2)! \cdot 4!}{k! \cdot 2!} = \frac{24}{k \cdot (k-1) \cdot 2} = \frac{12}{k \cdot (k-1)}.$$

Аналогично, если 6 конкуреントов дали 7 баллов

$$\frac{C_{k-2}^{l-2}}{C_k^l} = \frac{\frac{(k-2)!}{(k-l)! \cdot (l-2)!}}{\frac{k!}{(k-l)! \cdot l!}} = \frac{(k-2)! \cdot l!}{(k-2)! \cdot k!} = \frac{(l-1) \cdot l}{(k-1) \cdot k} = \frac{l^2 - l}{k \cdot (k-1)}$$

Узбестно, что:

$$\frac{12}{k \cdot (k-1)} \cdot 3,5 = \frac{l^2 - l}{k \cdot (k-1)} \stackrel{k=2}{\Rightarrow} 12 \cdot 3,5 = l^2 - l \Rightarrow$$

$$l^2 - l - 42 = 0 \quad \text{По Т. Виета} \quad l_1 = 7 \quad l_2 = -6. \quad T.k$$

$$l = 7 \quad \text{это корень} \Rightarrow l = 7$$

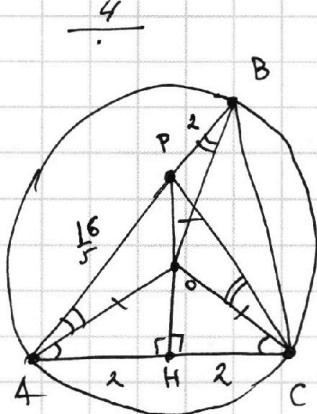
Ответ: 7 баллов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



Задача $\sqrt{39}$

Дано: O - центр окр ABC

P : $PBCO$ впис.

$P \in AB$, $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$; $AC = 4$ $S_{ABC} = ?$

Решение: Заметим, что

$\angle OCP = \angle OBP = \alpha$, т.к. $POCB$ - впис.

$\angle PAO = \angle OBP = \alpha$, т.к. $OB = OA$. $\angle OAC = \angle OCA = \beta$, т.к. $OC = OA$. \Rightarrow

$\angle PAC = \angle PCA = \alpha + \beta \Rightarrow PC = PA = \frac{16}{5}$. Т.к. ~~PC~~ $PC = PA = 4$

$OC = OA \Rightarrow PO$ - сер.пер. к $AC \Rightarrow PO$ - высота, медиана,

бис. $\angle APC$.] K - пересечение A и PO . Тогда

$$AK = KC = \frac{AC}{2} = 2$$

По Т.Пифагора $PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{\frac{256}{25} - 4} = \sqrt{\frac{256 - 100}{25}} = \sqrt{\frac{156}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{39}$

$$\sin \angle PAH = \frac{PH}{AP} = \frac{\frac{2}{5}\sqrt{39}}{\frac{16}{5}} = \frac{\sqrt{39}}{8} \Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$$

$$S_{ABC} = \sin \angle BAC \cdot BA \cdot CA \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot \left(\frac{16}{5} + 2\right) \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \\ = \frac{\sqrt{39} \cdot 5,2 \cdot 4}{8 \cdot 2} = \frac{5,2 \cdot \sqrt{39}}{4} = 1,3 \cdot \sqrt{39}$$

Ответ: $1,3 \cdot \sqrt{39}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача №6 (продолжение)

$$2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 4\sqrt{7}$$

$(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 2\sqrt{7}$, все 6 локомотивных проськтов

$$9-x^2 + 9-y^2 + 2\sqrt{81-9(x^2+y^2)+x^2y^2} \leq 28$$

$$18 - 4 + 2\sqrt{81-36+x^2y^2} \leq 28$$

$$2\sqrt{45+x^2y^2} \leq 28 - 14$$

$$\sqrt{45+x^2y^2} \leq 7$$

$$45+x^2y^2 \leq 49$$

$$x^2y^2 \leq 4$$

$$|xy| \leq 2. \text{ Известно, что } |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow$$

$$|xy| \leq 2 \Rightarrow 2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 4\sqrt{7}.$$

Равенство достигается при $x^2=2$ $y^2=2$

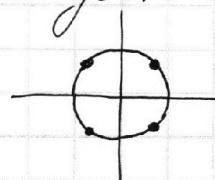
$$|x|=|y|=\sqrt{2} \quad \begin{cases} x=2\cos\alpha \\ y=2\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$AB+CD \leq 4\sqrt{7} \quad JT+AB+CD \leq JT+4\sqrt{7} \Rightarrow$$

периметр $\Phi(a) \leq JT+4\sqrt{7}$ и он достигается

при

$$\begin{cases} \sin\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pi k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha = \pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



$$\alpha = \pi k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Получ: при } \alpha \quad \begin{cases} \alpha = \pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 из 2

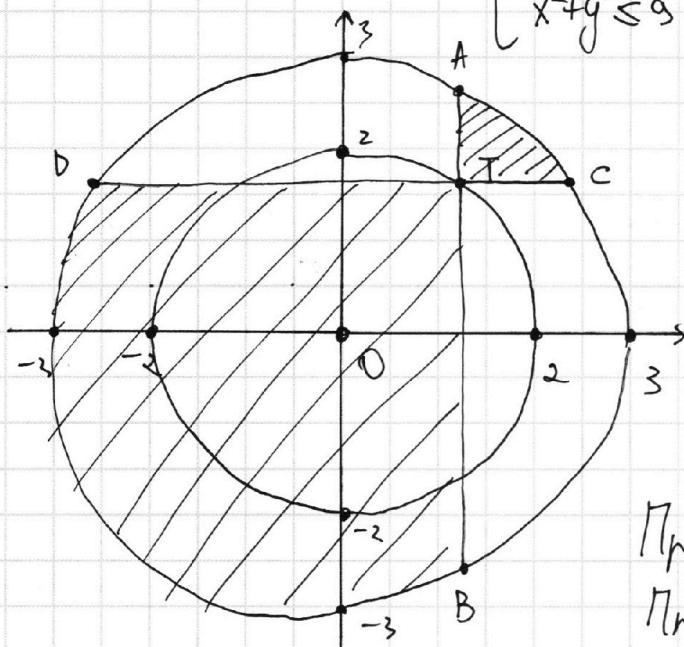
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

 \Leftrightarrow

Задача №6

$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$



Представим это все на координатной плоскости.

Заметим, что точка $(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$ лежит на окр. радиуса 2 и центром в центре координат, т.к.
 $(2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha)^2 = 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4 = 2^2$. Рассмотрим Т.

Проведем $AB \Rightarrow T$, $AB \parallel Oy$
 Проведем $CD \Rightarrow T$, $CD \parallel Oy$

Тогда совокупность заштрихованных областей и есть $Q(a)$.
 (в $A \in T$ $x \geq 2\cos\alpha$; $y \geq 2\sin\alpha$ $x^2 + y^2 \leq 9$; в $D \in T$ $x \leq 2\cos\alpha$; $y \leq 2\sin\alpha$ $x^2 + y^2 \leq 9$)
 $(x^2 + y^2 \leq 9)$ означает, что (x, y) находятся внутри (включая границу) окружности с $r=3$ и центром в O). $AB \perp CD \Rightarrow \overline{AD} + \overline{CB} = \overline{AC} + \overline{BD}$, при этом $\overline{AB} + \overline{CB} + \overline{BD} + \overline{DA} = 2\pi$
 $\Rightarrow \overline{AC} + \overline{BD} = \pi$. Периметр $Q(a) = \overline{AC} + \overline{BD} + AT + TC + DT + TB = \pi + AB + CD$. AB и CD хорды

~~всегда делят окружность на две равные части~~. Если обозначить $T = (x; y)$, то $A = (x; \sqrt{9-x^2})$, $B = (x; -\sqrt{9-x^2})$, $C = (\sqrt{9-y^2}; y)$, $D = (-\sqrt{9-y^2}; y)$ $\Rightarrow AB + CD = 2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2})$. $\boxed{x^2 + y^2 = 9}$

Давайте докажем, что $2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 4\sqrt{7}$.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

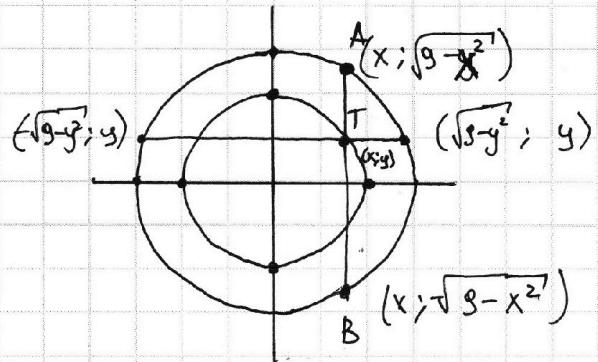
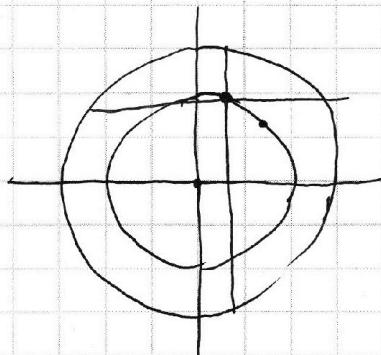
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\left(\frac{|DT-TC|}{2}\right) \cdot \left(\frac{|BT-AT|}{2}\right) = \frac{(|DT-TC|)(|BT-AT|)}{4} = 4$$

$$|DT-TC| \cdot |BT-AT| = 1$$

$$(BT-TC)^2 \cdot (BT-AT)^2 = 1 \quad x^2 + y^2 = 9$$

$$(DT^2 + TC^2 - DT \cdot TC)(BT^2 + AT^2 - BT \cdot AT) = 1 \quad x = 3 - y$$



II

$$2\sqrt{9-x^2} + 2\sqrt{9-y^2} - \text{ макс.}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$\begin{matrix} 32 \\ -14 \\ \hline 18 \end{matrix} \quad 4\sqrt{8} \quad x=y=1 \quad 8\sqrt{2}$$

$$2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 8\sqrt{2}$$

$$\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2} \leq 4\sqrt{2} \quad 14$$

$$9+x^2+9-y^2 + 2\sqrt{81-9(x^2+y^2)} + x^2y^2 \leq (4\sqrt{2})^2$$

$$18 - 4 + 2\sqrt{81-36+x^2y^2} \leq 32$$

$$2\sqrt{45+x^2y^2} \leq 18$$

$$\sqrt{45+x^2y^2} \leq 9$$

$$45+x^2y^2 \leq 81 \quad x^2y^2 \leq 36$$

$$x \cdot y \leq 6$$

~~9~~

r

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x - \cos \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2(\pi x) - (\sin(\pi y) \cdot \sin(\pi x)) = \cos^2(\pi x) + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2(\pi x) - \cos^2(\pi x) = \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\cos(\pi - 2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

$$\begin{cases} \pi - 2\pi x = \pi y - \pi x \\ \pi - 2\pi x = \pi x - \pi y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = y - x \\ 1 - 2x = x - y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$

$$\arccos\left(\frac{x}{4}\right) + \arccos\left(\frac{y}{9}\right) \leq 2\pi$$

~~$$\frac{x}{4}$$~~
$$\frac{x}{4} \quad x \in [-4; 4]$$

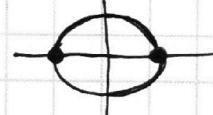
$$\cos(l) = \frac{x}{4} \quad y \in [-9; 9]$$

$$\arccos\left(\frac{x}{4}\right) = l$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} y = 1 - x & y = 5 & y = 4 & y = 3 & y = 2 & y = 1 & y = 0 & y = -1 & y = -2 & y = -3 \\ x = -4 & x = -4 & x = -3 & x = -2 & x = -1 & x = 0 & x = 1 & x = 2 & x = 3 & x = 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} y = 3x - 1 & y = -13 & y = -10 & y = -7 & y = -4 & y = -1 & y = 2 & y = 5 & y = 8 & y = 11 \\ x = -4 & x = -3 & x = -2 & x = -1 & x = 0 & x = 1 & x = 2 & x = 3 & x = 4 & x = 4 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & & & & \end{array}$$

$$\arccos(-1) + \arccos\left(\frac{5}{9}\right)$$



$$= 2\pi \Rightarrow$$

$$a = b = 1$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{x}{4} = 1 & \frac{y}{9} = 1 & \\ x = 4 & y = 9 & \end{array}$$

~~$$\arccos\left(\frac{x}{4}\right)$$~~

$$\arccos(a) + \arccos(b) \leq 2\pi$$

~~$a \in [0; 1]$~~

~~$b \in [0; 1]$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

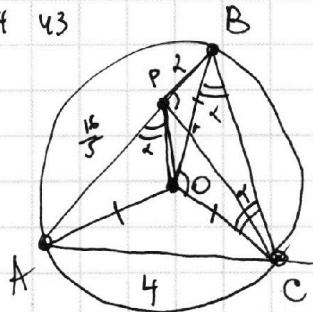


$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k}$$

K - ~~задача~~. 11-классников

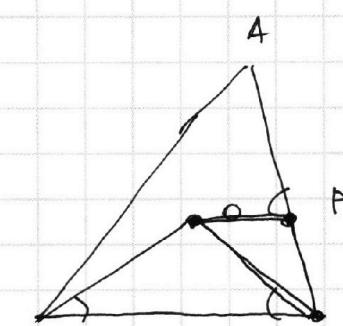


12 21 31 41
13 23 32 42
14 24 34 43



$$k \cdot (k-1) (k-2) (k-3)$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 16 \\ \hline 96 \\ \frac{16}{16} \\ \hline 236 \end{array}$$



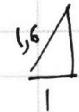
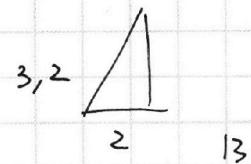
$$156 = 3 \cdot 52 = \frac{16}{5} = \frac{32}{10} = 3,2$$



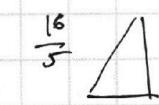
$$2 \cdot 3 \cdot 26 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 13 = \\ PO-\text{диаметр} = 4\sqrt{39}$$

ΔAPC

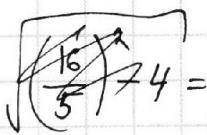
ΔABC



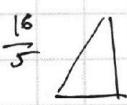
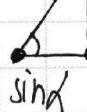
$$\begin{aligned} \sqrt{1,6 - 1} &= \sqrt{2,56 - 1} = \\ &= \sqrt{1,56} = \\ &= \frac{25}{64} = \\ &= \frac{\sqrt{39}}{64} \end{aligned}$$



cos



$$\begin{aligned} \sin \angle PAH &= \frac{16}{5} = \\ &= \frac{\sqrt{39}}{8} \end{aligned}$$



cos



$$\cos \alpha = \frac{2 \cdot 5}{16} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

$$S_{ABC} = \sin \angle PAC \cdot AC \cdot BA \cdot \frac{1}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{3 \cdot 13}}{8}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2(\sqrt{g-x^2} + \sqrt{g-y^2}) \leq 4\sqrt{7}$$

$$\sqrt{g-x^2} + \sqrt{g-y^2} \leq 2\sqrt{7}$$

$$g-x^2+g-y^2 + 2\sqrt{81-9(x^2+y^2)+x^2y^2} \leq 28$$

$$18 - 4 + 2\sqrt{81-36+x^2y^2} \leq 28$$

$$\sqrt{45+x^2y^2} \leq 7$$

$$45+x^2y^2 \leq 49$$

$$x^2y^2 \leq 4$$

$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

~~xy <= 2~~

$$|xy| \leq 2 \quad \text{известно, то} \quad |xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\Rightarrow |xy| \leq 2 \Rightarrow AB+CD \leq 4\sqrt{7}.$$

При этом равенство достигается при

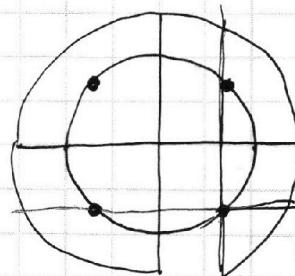
$$|x|=|y|=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

* α

$$x=2\cos \alpha$$

$$y=2\sin \alpha$$



$$x = \pi k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

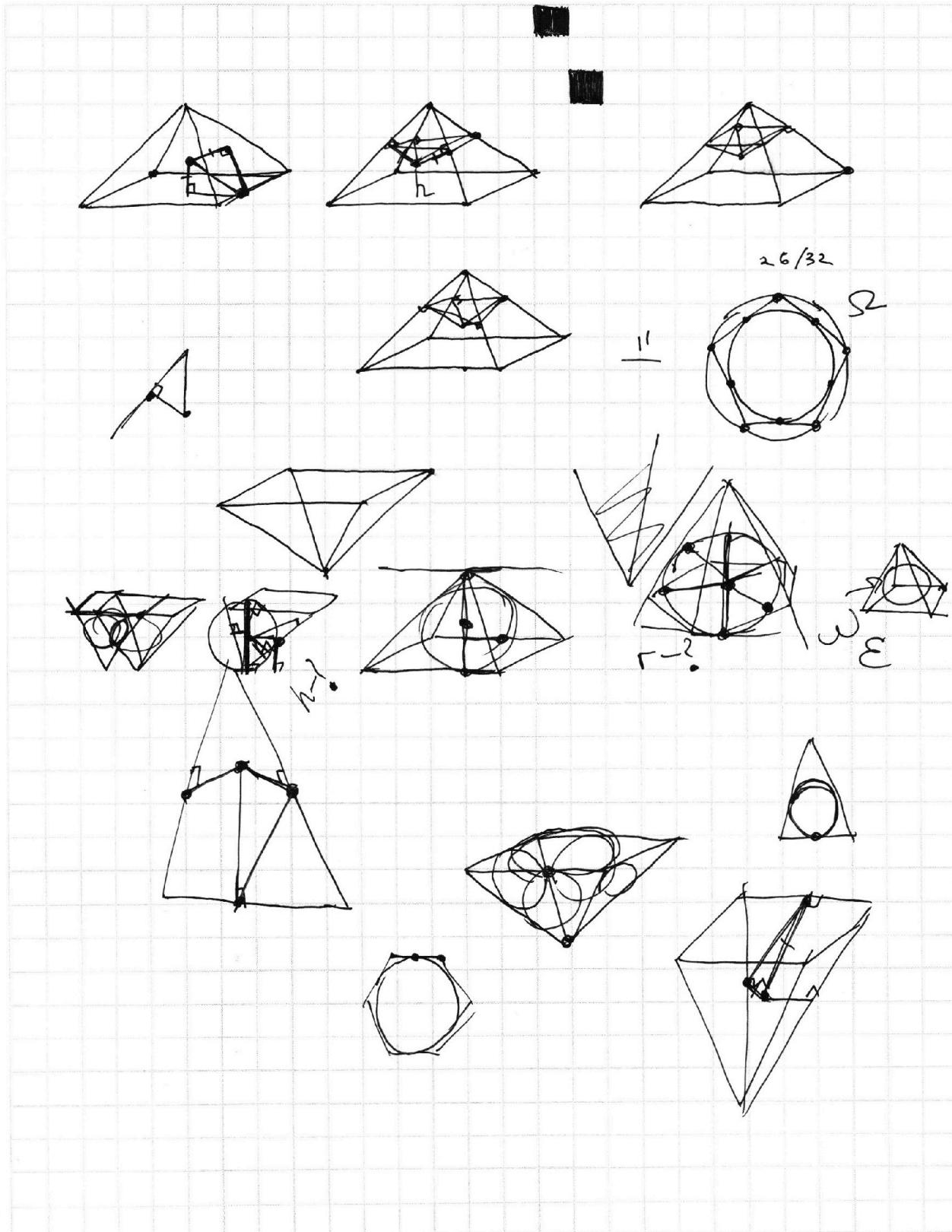


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

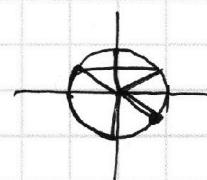


СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} xy = (x-3)(y+3) \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} xy = xy - 3y + 3x - 9 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$



~~$3x - 3y = 9$~~

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 3 \\ t.k \quad y \geq 0 \end{cases}$$

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \cdot \sin \pi x =$$

$$= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 9xy &= \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 9xy = \\ &= 3x^2 + 3xy + 3y^2 - 9xy = \\ &= 3x^2 - 6xy + 3y^2 = \\ &= 3 \cdot (x^2 - 2xy + y^2) = \\ &= 3 \cdot (x-y)^2 = 3 \cdot 9 = \underline{\underline{27}} \end{aligned}$$

$$\sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = \cos^2 \pi x + \cos \pi y \cdot \cos \pi x$$

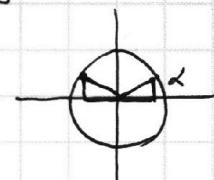
$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cdot \cos \pi x + \sin \pi y \cdot \sin \pi x$$

$$-\cos(2\pi x) = \cos(\pi y - \pi x)$$

~~$\cos(2\pi x)$~~

$$\cos(\pi(1-2x)) = \cos(\pi y - \pi x)$$

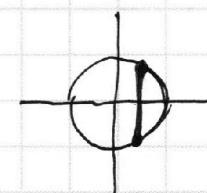
$$-\cos x = \cos(\pi - x)$$



$$\begin{cases} \pi(1-2x) = \pi y - \pi x \\ \pi(1-2x) = \pi x - \pi y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-2x = y-x \\ 1-2x = x-y \end{cases}$$

~~$\pi(1-2x) = \pi x$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3333 = 33 \cdot 10\Phi =$$

$$\begin{array}{r} * \\ * \\ * \\ \times 101 \\ \hline 303 \\ 303 \\ \hline 3333 \end{array}$$

$$\overline{n n n n} = n \cdot 11 \cdot 101$$

(101)

202

303

404

505

606

707

808

909

$$101 \cdot (101 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 5 \cdot n) = x^2$$

$$n = 5 \cdot a^2, \text{ но } n \in [1; 9] \Rightarrow a^2 < 2 \Rightarrow$$

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow n = 5.$$

$$\text{Обозн.: } A = 5555$$

$$B = 101$$

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$$

$$C = 55$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\Rightarrow xy = (x-3)(y+3)$$

$$(x+y+1) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-3)(y+3)} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+y+1) = 0$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~1~~

$$\frac{C_{k-2}^2}{C_k^4} = \frac{\frac{(k-2)!}{2! \cdot (k-4)!}}{\frac{k!}{(k-4)! \cdot 4!}} = \frac{\frac{(k-2) \cdot (k-3)}{2}}{\frac{(k-3)(k-2)(k-1)(k)}{24}} =$$

--- (•) ---

$$= \frac{1}{\frac{(k-1) \cdot k}{12}} = \frac{12}{(k-1) \cdot k}$$

C_n^k

$$\frac{C_{k-2}^{L-2}}{C_k^L} = \frac{\frac{(k-2)!}{(k-L)! \cdot (L-2)!}}{\frac{k!}{(k-L)! \cdot L!}} = \frac{\frac{(L-2)!}{(L-2)!}}{\frac{k!}{L!}} = x=2$$

$y=0$

$$= \frac{(k-2)! \cdot L}{k! \cdot (L-2)!} = \frac{(L-1 \cdot L)}{(k-1) \cdot k} \quad 7 \cdot 6 = 42$$

$$2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) =$$

$$\frac{12}{(k-1) \cdot k} \cdot 3,5 = \frac{(L-1) \cdot L}{(k-1) \cdot k}$$

$$12 \cdot 3,5 = L^2 - L$$

~~Л~~

$$L^2 - L - 42 = 0$$

$$36+6 - 42$$

$$L_1 = 7 \quad L_2 = -6$$

$$48-7-42 \quad //$$

$$(L=7)$$

$$2(\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2}) \leq 4\sqrt{8}$$

$$\sqrt{9-x^2} + \sqrt{9-y^2} \leq 4\sqrt{2}$$

$$18-4+2\sqrt{81-36}$$

$$9-x^2+9-y^2+2\sqrt{81-9(x^2+y^2+x^2y^2)} \leq 32$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

$$xy - 2 \cdot \cos\alpha \cdot y - 2 \cdot \sin\alpha \cdot x - 4 \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

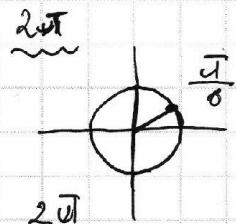
$$x > 2 \cos\alpha$$

$$y > 2 \sin\alpha$$

$$x \leq 2 \cos\alpha$$

$$\sqrt{\pi^2}$$

$$y \leq 2 \sin\alpha$$



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$(2\sin\alpha)^2 + (2\cos\alpha)^2 =$$

$$= 4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha$$



значит, что

точка $(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$

лежит на

шаре $O(0, 0)$, с

радиусом α

и центром B

центр конгруэнтн., т.к.

$$x_2 - x_1 = y_2 - y_1$$

$$x > 2\cos\alpha$$

$$y > 2\sin\alpha$$

$$AC + BD \Rightarrow$$

$$\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$$

$$+ k. \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD} = 2\sqrt{\pi} \Rightarrow \overline{BC} + \overline{AD} = \sqrt{\pi}$$

$$(2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha)^2 = 4(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4 = 2^2$$