



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin \alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Представим A как $\overline{aaaa}$, где a — цифра. Тогда $A = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$. $A \cdot B \cdot C$ должно быть квадратом натурального числа.
Т.е. множители 11 и 101 должны встретиться в разложении B и C .
 C — двузначное. Т.е. $C \div 101$. Т.е. $B \div 101$. Учитывая, что среди цифр B должна быть 2 , B разлагается единственно как 202 . $202 \div 11$.
Т.е. $C \div 11$. Учитывая, что среди цифр C должна быть 3 , C разлагается единственно как 33 .

Теперь $A \cdot B \cdot C$ выглядят как $(11 \cdot 101 \cdot a) \cdot (101 \cdot 2) \cdot (11 \cdot 3)$.

Очевидно, что a тоже разлагается единственно как $a = 6$. Т.е. $A = 6666$.

Ответ: $(6666, 202, 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y > 0. \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

ограничение: $x \neq 1$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy - 1$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$(x+y+2) \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-1)(y+1)} \right) = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} x+y+2=0 \leftarrow \text{Невозможно, так как } x>0, y>0. \\ \frac{(x-1)(y+1)-xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0. \end{array} \right.$$

Может быть знаменатель, но все необходимые ограничения записаны.

$$xy + x - y - 1 - xy = 0.$$

$$x = y + 1.$$

$$\begin{aligned} M &= (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = \\ &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
1 из 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) \{x, y\} \subset \mathbb{R} \quad (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

Воспользуемся формулами для синусов и косинусов.

$$2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \sin(\pi x) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \cdot \cos(\pi x)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \sin(\pi x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \cos \pi x \right) = 0$$

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(y-x)\right) = 0 \right] \quad (1)$$

$$\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \cos \pi x - \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y)\right) \cdot \sin \pi x = 0 \right] \quad (2)$$

$$(2) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}(3x+y)\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{2}(3x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$3x+y = 1+2k \quad y = -3x+1+2k$$

$$(1) \quad \frac{\pi}{2}(y-x) = \frac{\pi}{2} + \pi k_1; k_1 \in \mathbb{Z}$$

$$y-x = 1+2k_1 \quad y = x+1+2k_1$$

$$\text{Ответ: } (x, x+1+2k_1), (x, -3x+1+2k)$$

$$d) \{x, y\} \subset \mathbb{Q}. \quad \text{По ОДЗ, } x \in [-5; 5], y \in [-4; 4]$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{5}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos\left(\frac{y}{4}\right) \in [0; \pi]$$

Заметим, что пер-ву $\arcsin\left(\frac{x}{5}\right) + \arccos\left(\frac{y}{4}\right)$

$< \frac{3\pi}{2}$ удовлетворяют все верхние

(x, y) , кроме $(5, -4)$, поскольку $\arcsin\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\arccos\left(-\frac{4}{4}\right) = \pi$

$$(1) \quad \text{Рассмотрим все пары вида } (x, x+1+2k_1)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Хотим: 4 билета для 11-классников $h-?$
 Дали: $(h > 4)$ билетов для 11-классников

$$P_2 (\text{получить билеты на концерт}) = \frac{5}{2} P_1 (\text{получить билеты на концерт})$$

Решение: Пусть 11-классник n человек P_1 - вероятность в начале месяца, P_2 - вероятность в конце месяца.

$$P_1 = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4}$$

$$P_2 = \frac{C_{n-2}^{h-2}}{C_n^h}$$

Вероятность, по определению, =
 кол-во всех желаемых сир. /
 кол-во всех возможных сир.

$$P_1 = \frac{(n-2)! \cdot 4! \cdot (4-4)!}{2! \cdot (n-4)! \cdot n!} =$$

$$P_2 = \frac{(n-2)! \cdot h! \cdot (h-2)!}{(h-2)! \cdot (n-h)! \cdot h!} = \frac{(n-2)! \cdot 1!}{(h-2)! \cdot n!}$$

$$= \frac{72 \cdot (n-2)!}{n!}$$

$$P_2 = \frac{h(h-1) \cdot (n-2)!}{n!} = \frac{5}{2} P_1 = \frac{5}{2} \cdot \frac{72 \cdot (n-2)!}{n!}$$

$$h^2 - h = 30$$

$$h^2 - h - 30 = 0$$

$$\begin{cases} h = 6 \\ h = -5 \leftarrow \text{невозможно} \end{cases}$$

Ответ: 6 билетов

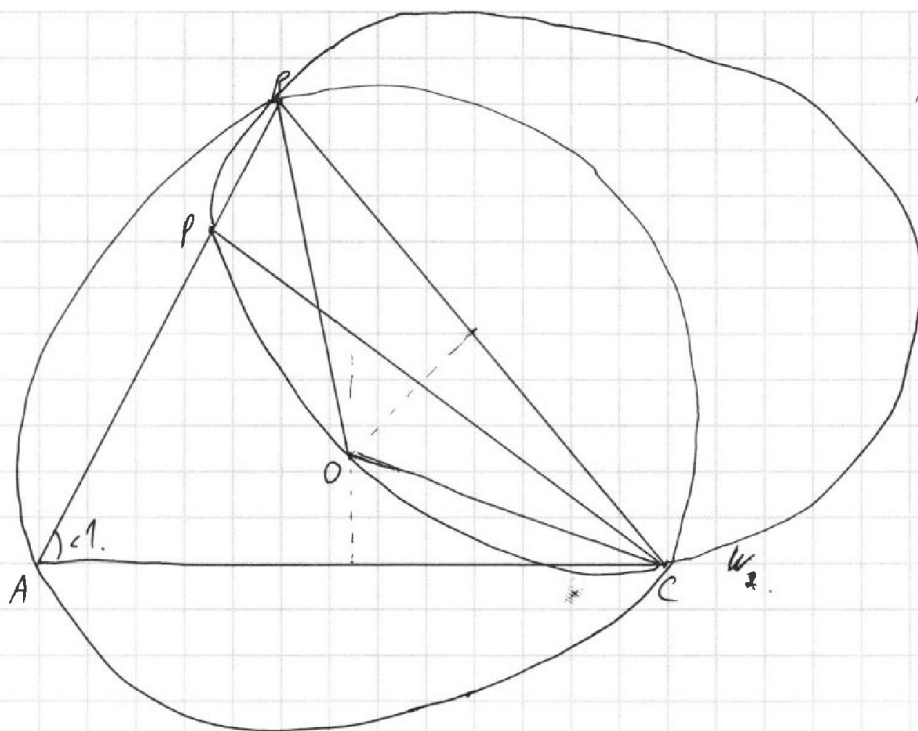


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AP = \frac{15}{2}, BP = 5.$$

$$AC = 9.$$

$$\triangle ABC - ?$$

$$S_{\triangle ABC} - ?$$

↑
Площадь $\triangle ABC$.

Решение: $\left. \begin{array}{l} \angle BAC - \text{внш. в окр-сти } \omega_1, \text{ опирается на } BC. \\ \angle BOC - \text{центральный, опирается на } BC \end{array} \right\} \angle BOC = 2\angle BAC.$

$\left. \begin{array}{l} \angle BOC - \text{внш. в окр-сти } \omega_2, \text{ опир. на } BC \\ \angle BPC - \text{внш. в окр-сти } \omega_2, \text{ опир. на } BC \end{array} \right\} \angle BOC = \angle BPC$

$\angle BPC$ - внешний угол $\triangle APC$. Значит, $\angle BPC = \angle BAC + \angle PCA = 2\angle BAC$
 $\angle PCA = \angle BAC.$

Значит, $\triangle APC$ - равн., $AP = \frac{15}{2} = PC.$

Пусть $\angle PAC = \alpha$. Тогда, по т. косинусов, $PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2 \cdot \cos \alpha \cdot AP \cdot AC.$

$$AC = 2 \cos \alpha \cdot AP. \quad \cos \alpha = \frac{AC}{2AP} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}.$$

По основному тригонометрическому тождеству, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{25}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = 45$$

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☒

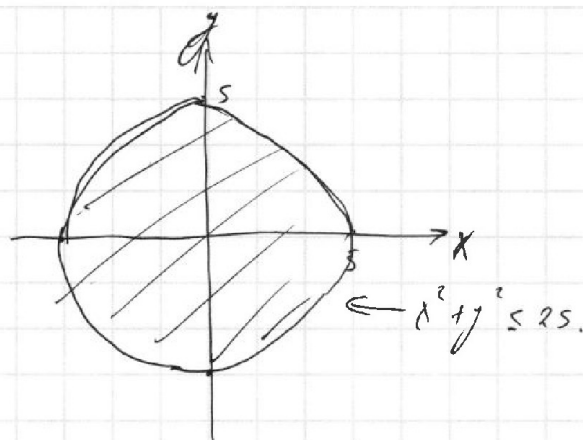
5
☐

6
☒

7
☒

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$\rho_{\max}(\phi) = ?$

$$(x - 3\sqrt{2} \cdot \sin \alpha) / (y - 3\sqrt{2} \cdot \cos \alpha) \leq 0$$

$$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \cdot \sin \alpha \\ y \geq 3\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \\ x \geq 3\sqrt{2} \cdot \sin \alpha \\ y \leq 3\sqrt{2} \cdot \cos \alpha \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\{x, y \in \mathbb{R} \quad (\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\begin{aligned} \text{Справка: } \sin(a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{сложение} \end{array} \right.$$

$$\sin(a-b) + \sin(a+b) = 2 \sin a \cdot \cos b \quad \text{Пусть } a-b=x \quad a=\frac{x+y}{2}$$

$$\text{Тогда } \sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{y-x}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \pi x + \sin \pi y &= 2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cdot \cos \frac{\pi(y-x)}{2} = 2 \sin \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2}(y-x) \right) \\ \text{Тогда левая часть: } &2 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2}(y-x) \right) \cdot \sin \pi x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II справка: } \cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\ \cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{сложение} \end{array} \right.$$

$$\cos(a-b) + \cos(a+b) = 2 \cos a \cdot \cos b \quad \text{Пусть } a-b=x \quad a=\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{y-x}{2}$$

$$\cos \pi x + \cos \pi y = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2}(y-x) \right)$$

$$\text{Правая часть: } 2 \cos \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2}(y-x) \right) \cdot \cos \pi x$$

Вычтем из левой части правую:

$$2 \cos \left(\frac{\pi}{2}(y-x) \right) \left(\sin \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) \cdot \sin \pi x - \cos \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) \cdot \cos \pi x \right) = 0$$

$$\left[\cos \left(\frac{\pi}{2}(y-x) \right) = 0 \right] \quad (1)$$

$$\left[\cos \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) \cdot \cos \pi x - \sin \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) \cdot \sin \pi x = 0 \right] \quad (2)$$

$$(2) \quad \cos \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y + \pi x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2}(3x+y) \right) = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{2} \quad \cos\left(\frac{x}{2}(3x+y)\right) = 0.$$

$$\frac{x}{2}(3x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{1}{2}(3x+y) = \frac{1}{2} + k.$$

$$3x+y = 1+2k.$$

$$y = -3x + 1 + 2k.$$

$$x+1+2k_1 = -3x+1+2k$$

$$4x = 2(k-k_1) \\ 2x = k - k_1$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{x}{2}(y-x) = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{1}{2}(y-x) = \frac{1}{2} + k,$$

$$y-x = 1+2k,$$

$$y = x+1+2k,$$

$$\text{Ответ: } (x, -3x+1+2k), \\ (x, x+1+2k_1)$$

$$\text{д. } x, y \in \mathbb{Z}.$$

$$x \in [-5; 5], \quad y \in [-4; 4].$$

$$\arcsin\left(\frac{x}{5}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos\left(\frac{y}{4}\right) \in [0; \pi].$$

Учитывая все, кроме случаев, когда $\begin{cases} \arcsin(\frac{x}{5}) = \frac{\pi}{2} \\ \arccos(\frac{y}{4}) = \pi \end{cases}$

$$\text{т.е. } \frac{x}{5} = 1 \quad x = 5.$$

$$\frac{y}{4} = -1.$$

$$y = -4$$

$$\text{если } y = -3x+1+2k$$

т.е. находится лишь 1 пара: (5, -4)

Пусть $x = 5$. Тогда $y = -4 + 2k$. Пусть ввожних значений y

Столько же будет со всеми ввожними значениями x : 3, 1, -1, 3, -5.

Всего: 25.

Пусть $x = 4$. Тогда $y =$

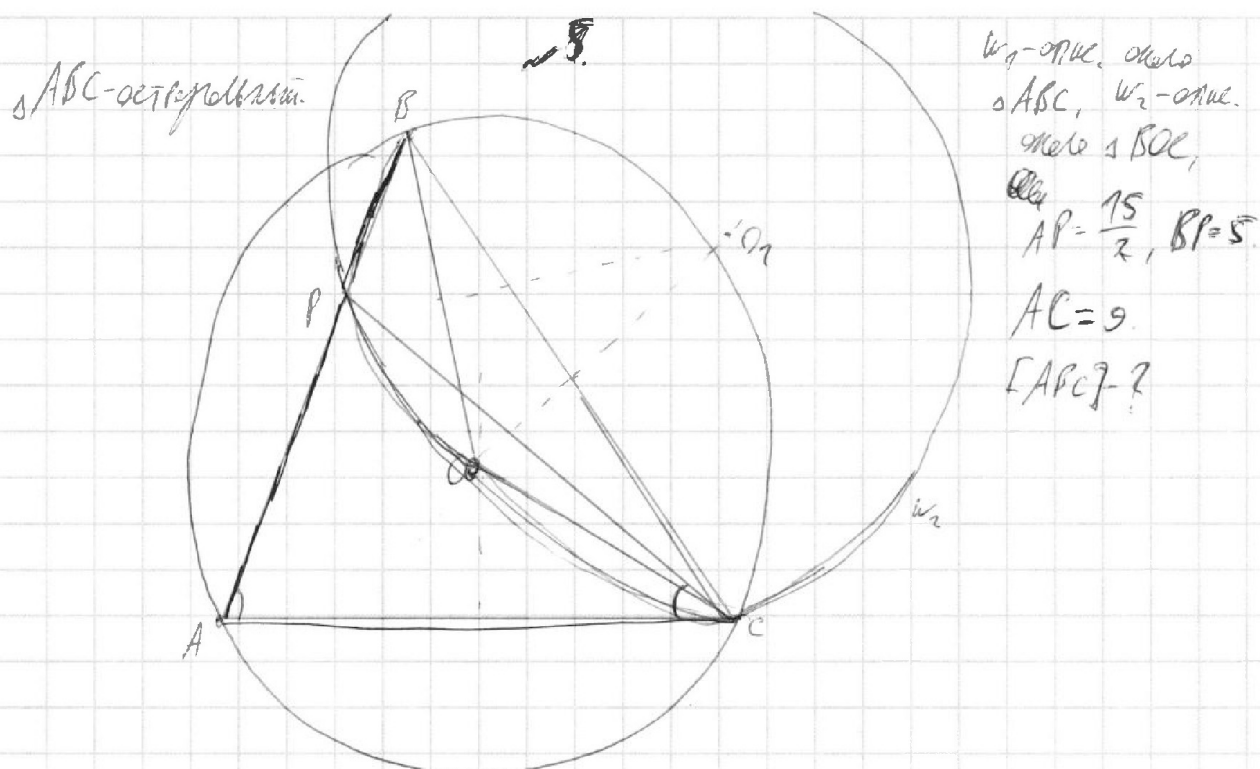


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



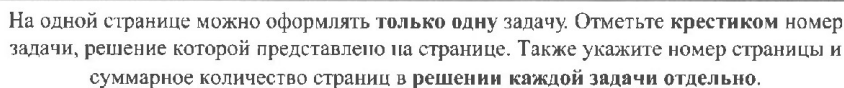
Решение: $\angle BAC = \frac{75}{2}$, $\angle BOC = \frac{75}{2}$, $\angle BPC$ - внешний для $\triangle APC$.
 Т.е. $\angle BPC = \angle PAC + \angle PCA$. Т.е. $\angle BPC = \frac{75}{2} + \angle PCA$. $\angle PCA = \frac{75}{2} - \angle BPC$.
 Т.е. $\triangle APC$ - р/д, $AP = PC = \frac{75}{2}$.

Т. косинусов: $PC^2 = AP^2 + AC^2 - 2AP \cdot AC \cdot \cos \angle PAC$.

$$AC^2 = 2AP \cdot AC \cdot \cos \angle PAC. \quad \cos \angle PAC = \frac{AC}{2AP} = \frac{9}{75} = \frac{3}{25}$$

По основному тригонометрическому тождеству, $\sin \angle PAC = \frac{4}{5}$.

$$[ABC] = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle PAC}{2} = \frac{75}{2} \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = 45.$$



СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Попоча QR-кода недопустима!

$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a = 11 \cdot 101 \cdot a$
 Т.е. a делится на 101, $a = 101$
 Т.е. $B = 101$
 Т.е. $C = 11$
 Т.е. $C = 33$
 Тогда $a = 2$,
 $a = 8$.

Orbit: (8888, 202, 33), (2222, 202, 33)

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\cancel{(x-1)(x+1)} \cancel{(x-2)(x+2)} (x+2) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right) = 0$$

$$[x-1] + 2 = 0 \leftarrow \text{Неверно, ибо } x > 0, y > 0.$$

$$\frac{(x-1)(y+1) - xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

Можно брать знаменатель, но все соответствующие ограничения уже записаны

$$x^y + x - y - 7 - x^y = 0$$

$$x = y + 7$$

$$M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$