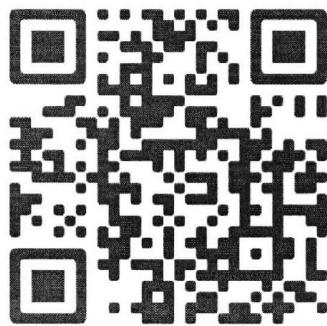


МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a$$

a - четырехзначное число, т.к. $1 \leq a \leq 9$; ($a=0$ некор.)

B - трехзначное число, складое для двух четырехзначных 2

C - четырехзначное число, складое для двух четырехзначных 3

$$A - B - C = n^2, n \in \mathbb{N}$$

$$1111a - B - C = n^2$$

$$1111a = 11 \cdot 101$$

$$\underline{11 \cdot 101 \cdot a - B - C = n^2}$$

$$n^2 = 11 \cdot 101$$

Значит $n^2 = 11^2 \cdot 101^2$, т.к. 11 и 101 простые числа.
 \checkmark

$$a - B - C = 11 \cdot 101$$

Однако $a \neq 11$ и $a \neq 101$, и.к. $a \leq 9$;

$$\text{значит } B - C = 11 \cdot 101$$

Однако C - четырехзначное число, значит $C \neq 101$
($C = 99$)

Значит $B = 101$, и при этом $a = B$ складое
для двух четырехзначных 2; Значит $B = 202$;



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$B \cdot C = 11 \cdot 101$

При этом $B = 202$, значит число $C = 11$

При этом $Y \in \{0, 1, 2, 3\}$,
значит $C = 33$;

$$1111a = 33 \cdot 202 = n^2$$

$$1111^2 \cdot 5 \cdot a = n^2$$

Получим только $a = 5$;

$$A = 6666$$

$$B = 202$$

$$C = 33$$

Ответ: $A = 6666$; $B = 202$;

$$C = 33$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА

3 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№2. $x, y \geq 0$, $x \neq 1$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$$K = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)} \quad | : x+y+2 > 0$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-1)(y+1)} \quad | \cdot xy(x-1)(y+1)$$

$$(x-1)(y+1) = xy$$

~~$$xy + x - y - 1 = xy$$~~

~~$$x = y + 1$$~~

Найти $M = x^3 - y^3 - 3xy$?

$$M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1) \cdot y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ЧИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

W3.

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\cos \pi x \cdot \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x$$

$$\cos(2\pi x + \pi y) = \cos 2\pi x \cdot \cos \pi y - \sin 2\pi x \cdot \sin \pi y$$

$$\cos(\pi x + \pi y) = -\cos(2\pi x)$$

$$\cos(\pi x + \pi y) + \cos(2\pi x) = 0$$

$$2 \cos\left(\frac{\pi x + \pi y + 2\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y - 2\pi x}{2}\right) = 0 \quad | : 2$$

$$\cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi y - \pi x}{2}\right) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad | \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$3x + y = 1 + 2k$$

$$y = 1 - 3x + 2k;$$

$$\textcircled{2} \quad \cos\left(\frac{\pi y - \pi x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad | \cdot \frac{2}{\pi};$$

$$y - x = 1 + 2n$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
5 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1

$$y = 1 - 3x + 2k, k \in \mathbb{Z}$$

2

$$y = x + 1 + 2n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $(x, 1 - 3x + 2k); (x; x + 1 + 2n)$

здесь $k, n \in \mathbb{Z}$

3

$$x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin \frac{x}{3} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\underbrace{\arcsin \frac{x}{3} \leq \frac{\pi}{2}}_{\text{от } -1 \text{ до } 1} + \underbrace{\arccos \frac{y}{4} \leq \pi}_{\text{от } 0 \text{ до } \pi} < \frac{3\pi}{2}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{3} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Значит нам достаточно, чтобы x и y

были расположены на ОДЗ и не совпадали между собой, когда $\arcsin \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2}$ и $\arccos \frac{y}{4} = \pi$;

$$\arcsin \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} \quad \arccos \frac{y}{4} = \pi$$

$$\frac{x}{3} = 1$$

$$\frac{y}{4} = -1$$

$$x = 3;$$

$$y = -4$$

следовательно исключим пару $(3; -4)$:

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
10 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$-5 \leq x \leq 5; -4 \leq y \leq 4$$

$$\textcircled{1} \quad y = 1 - 3x + 2k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -5: \quad y = 16 + 2k$$

5 шаг

$$-4 \leq 16 + 2k \leq 4 \quad | -16$$

$$-20 \leq 2k \leq -12$$

$$-10 \leq k \leq -6;$$

$$k = -10, -9, -8, -7, -6$$

Аналогично исследуем и дальше

$$x = -4: \quad y = 13 + 2k \quad 5 \text{ шаг}$$

$$x = -3: \quad y = 10 + 2k \quad 5 \text{ шаг}$$

$$x = -2: \quad y = 7 + 2k \quad 5 \text{ шаг}$$

$$x = -1: \quad y = 4 + 2k \quad 5 \text{ шаг}$$

$$x = 0: \quad y = 1 + 2k \quad 4 \text{ шаги}$$

$$x = 1: \quad y = -2 + 2k \quad 5 \text{ шаг}$$

$$x = 2: \quad y = -5 + 2k \quad 4 \text{ шаги}$$

$$x = 3: \quad y = -8 + 2k \quad 5 \text{ шаг}$$

$$x = 4: \quad y = -11 + 2k \quad 4 \text{ шаги}$$

$$x = 5: \quad y = -14 + 2k \quad 5 \text{ шаг}$$

(Очко на $(5; -4)$)

не подходит

- 1 шаг

Далее исследуем

следующий $y = x + 1 + 2n$.

* в этом необходимо выполнить задачу с обидением!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
6 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

W4.

В начале места:

число бакелов = 4

число 11-классиков = x;

Найдём вероятно, что и II, и III классы попадут на концерт.

C_x^2 - всего способов выбрать двух

из x;

C_4^2 - способы выбрать учащихся бакелов

$$P_1 = \frac{C_4^2}{C_x^2};$$

В конце места:

число бакелов = a > 4

число 11-классиков = x;

$$P_2 = \frac{C_a^2}{C_x^2};$$

По условию

$$2,5 P_1 = P_2$$

$$2,5 \cdot \frac{C_4^2}{C_x^2} = \frac{C_a^2}{C_x^2} \quad | \cdot C_x^2 \neq 0$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$2,5 \cdot \binom{2}{4} = \binom{2}{a}$$

$$2,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} = \frac{a!}{2! \cdot (a-2)!}$$

$$15 = \frac{a!}{(a-2)! \cdot 2!} \cdot 1 \cdot 2!$$

$$30 = \frac{a!}{(a-2)!} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2)!}{(a-2)!} = a(a-1)$$

$$30 = a \cdot (a-1)$$

$$a^2 - a - 30 = 0$$

no in Bielind

$$\begin{cases} a_1 \cdot a_2 = -30 \\ a_1 + a_2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ a = -5 \end{cases} \leftarrow \text{не могут!}$$

Ответ: 6



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

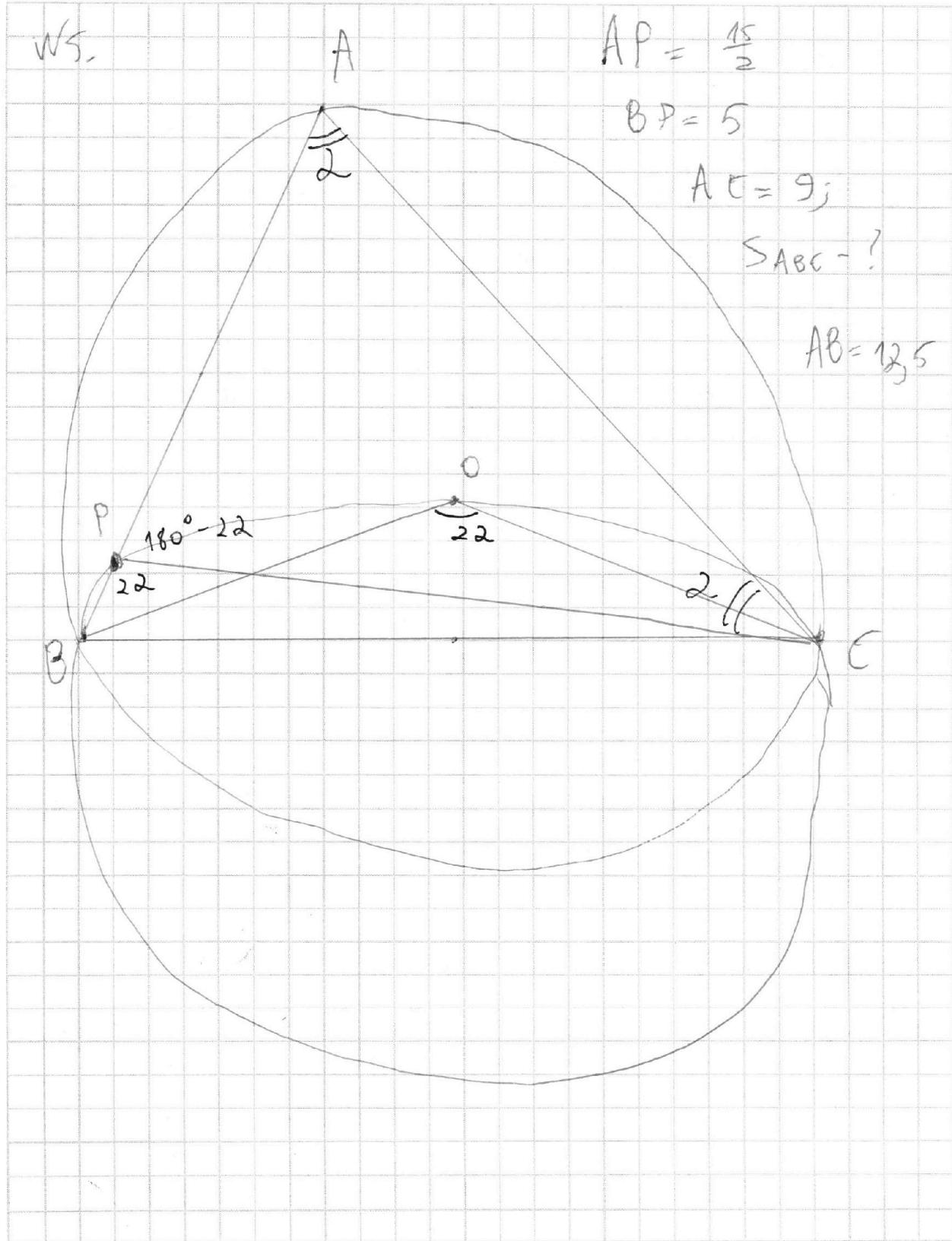
5

6

7

СТРАНИЦА
8 ИЗ 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $\angle BAC = 2^\circ$; тогда $\angle BOC = 22^\circ$

(н.к. $\angle BAC$ - внеш., а $\angle BOC$ - центральн.)

$\angle BPC = \angle BOC = 22^\circ$

(внеш. угол, общ. на одну вершину)

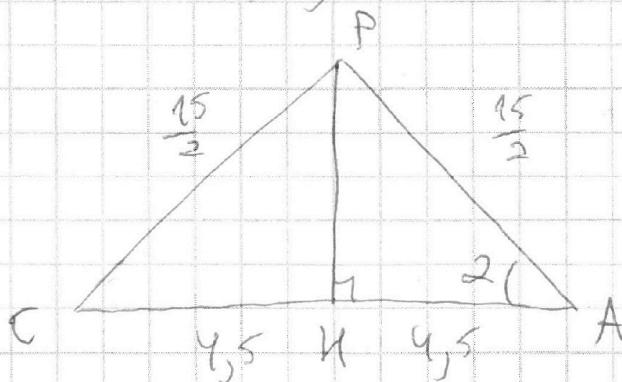
$\angle APC = 180^\circ - 22^\circ$

тогда оставшийся угол $\angle ACP$ в треуг. $\triangle APC$:

$\angle APC = 2^\circ$; $\angle APC = \angle PAC$;

$\triangle APC$ - $\text{Rt}\angle$

$PA = PC$;



по н. Треугольника: $PH = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{144}{4}} = \frac{12}{2} = 6$

$$\sin 2 = \frac{PH}{PA} = \frac{6}{12} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 2$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{25 \cdot 9}{5} = 45$$

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
11 из 11

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin 2)(y - 3\sqrt{2} \cos 2) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$x^2 + y^2 \leq 25$ данное нер-во задаёт множество точек $(x; y)$ лежащих внутри окружности с центром $(0, 0)$ и $R = 5$;

Заметим $3\sqrt{2} \sin 2 = a_j$

$$\text{тогда } 3\sqrt{2} \cos 2 = \pm \sqrt{1-a^2}$$

если $\cos 2 > 0$, то соответствующий

$$\begin{cases} (x - a)(y - \sqrt{1-a^2}) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$xy - \sqrt{1-a^2}x - ay + a\sqrt{1-a^2} \leq 0$$

$$y(x-a) \leq \sqrt{1-a^2}(x-a)$$

$$(x-a)(y - \sqrt{1-a^2}) \leq 0$$

∴



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1.

$$1 \leq a \leq 9$$

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a$$

B - трёхзнач. число, такое что оно сумма цифр 2

C - четырёхзнач. число, такое что оно сумма цифр 3

$$A \cdot B \cdot C = n^2, n \in \mathbb{N}$$

$$1111a \cdot B \cdot C = n^2$$

$$1111 = 11 \cdot 101$$

$$\underbrace{11 \cdot 101}_{a \cdot B \cdot C} \cdot n^2$$

$$n^2 = 11 \cdot 101;$$

$$n^2 = \underbrace{121 \cdot 101}_{\text{нельзя}}$$

$$A = 6666$$

$$B = 202$$

$$C = 33$$

$$a \cdot B \cdot C = 1111 \cdot 101$$



a - не трёхзначное

$$B \cdot C = 11 \cdot 101$$

C - четырёхзнач. число не может быть 101;

значит $\underbrace{B = 101}_{\text{нельзя}}$ и $y \ B$ такое что

сумма цифр 2; $\underbrace{B = 202}_{\text{нельзя}}$

но трёхзнач. $C = 11$ и $y \ C$ сумма цифр 3, значит

$$\underbrace{C = 33}_{\text{нельзя}}$$

$$1111a \cdot 33 \cdot 202 = n^2$$

$$1111^2 - 5 \cdot a = n^2$$

$$\boxed{a = 0}$$

L

L

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№2.

$$x, y > 0$$

$$\text{Найти } M = x^3 - y^3 - 3xy$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} - \text{const}$$

$$K = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \leq \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-x}{x(x-1)} = \frac{1}{(1-x)x}$$

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{y(y+1)} \quad \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \quad x+y-y-1$$

$$\frac{2}{xy} - \frac{2}{(x-1)(y+1)} = 2 \left(\frac{(x-1)(y+1) - xy}{xy(x-1)(y+1)} \right) = \\ 2 \left(\frac{x-y-1}{xy(x-1)(y+1)} \right)$$

$$xy = xy - y + x - 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} \geq$$

$$x = y - 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \geq \sqrt[4]{\frac{1}{x^2y^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{xy}}$$

$$K_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy}$$

$$K_2 = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-1)(y+1)}$$

$$xy = (y+1)(x-1)$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} -3 \leq 3x - 2k \leq 5 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$y = 1 - 3x + 2k$$

$$\text{если } k \geq 9, \text{ то } -2k \leq -18$$

$$-3 \leq 3x - 2k \leq 3x - 18$$

$$\begin{aligned} 15 &\leq 3x \\ x &\geq 5 \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &\geq 2 \\ k &\leq 9 \end{aligned}$$

$$\underline{k \geq -10}$$

$$\text{если } k < -10; -2k > 20$$

$$5 \geq 3x - 2k \geq 3x + 20$$

$$5 \geq 3x + 20$$

$$k \in [-10; 9]$$

$$x \leq -5$$

$$(2)$$

$$(k \neq 5)$$

$$x = -5; y = 15 + 2k$$

$$-4 \leq 15 + 2k \leq 4 \quad | -15$$

$$-20 \leq 2k \leq -12 \quad | :2$$

$$-10 \leq k \leq -6$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\leq \frac{3\pi}{2}$$

Значит нам, что x и y получили из ОДЗ и исключить единицу; получ $\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$;

$$\arccos \frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \arccos \frac{y}{4} = \pi$$

$$\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} \quad \frac{y}{4} = -1$$

$$\frac{x}{5} = 1$$

$$y = -4$$

$$x = 5$$

не удовл в месте обр
однозначно

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$① \quad y = 1 - 3x + 2k$$

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq 1 - 3x + 2k \leq 4 \end{cases}$$

$$1 - 15 + 2k = -4$$

$$-5 \leq -3x + 2k \leq 3 \quad |+1$$

$$\begin{cases} 2k = 10 \\ k \neq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3 \leq 3x - 2k \leq 5 \\ -5 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$K = 5; -2k \leq -10$$

$$7 \leq 3x$$

$$3x - 2k \leq 3x - 10$$

$$-3 \leq$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y - \pi x}{2}\right) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad \cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) = 0$$

$$\frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad 1 - \frac{3}{\pi}$$

$$3x + y = 1 + 2k$$

$$\textcircled{2} \quad \cos\left(\frac{\pi y - \pi x}{2}\right) = 0$$

$$\frac{\pi y - \pi x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad 1 - \frac{3}{\pi}$$

$$y - x = 1 + 2n$$

$$\textcircled{1} \quad 3x + y = 1 + 2k$$

$$y = 1 - 3x + 2k, \quad y \in K \in \mathbb{Z}$$

$$(x, 1 - 3x + 2k) \leftarrow$$

ответ в Q;

$$\textcircled{2} \quad y = x + 1 + 2n$$

$$(x, x + 1 + 2n)$$

$$\textcircled{3} \quad \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

\textcircled{3}:

$$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1; \quad -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1$$

$$-5 \leq x \leq 5; \quad -4 \leq y \leq 4;$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M = x^3 - y^3 - 3xy \quad (y+1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$$

$$x = y+1 \quad 3xy = 3(y+1)y = 3y^2 + 3y$$

$$M = (y+1)^3 - y^3 - 3xy =$$

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

W3,

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

罪

$$\cos \pi x \cdot \cos \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x$$

$$\cos(2\pi x + 2\pi y) = \cos 2\pi x \cdot \cos 2\pi y - \sin 2\pi x \cdot \sin 2\pi y =$$

$$\cos(\pi x + \pi y) = -\cos(2\pi x + 2\pi y)$$

$$\cos(\pi x + \pi y) + \cos(2\pi x + 2\pi y) = 0$$

$$\begin{aligned} \cos(2\pi x + 2\pi y) + \cos(2\pi x - 2\pi y) &= 2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \\ \cancel{\cos 2\pi x \cdot \cos 2\pi y - \sin 2\pi x \cdot \sin 2\pi y} + \cancel{\cos 2\pi x \cdot \cos 2\pi y + \sin 2\pi x \cdot \sin 2\pi y} &= \\ 2 \cos 2\pi x \cdot \cos 2\pi y & \end{aligned}$$

$$2 \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y + 2\pi x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi x + \pi y - 2\pi x}{2}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{3\pi x + \pi y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y - \pi x}{2}\right) = 0$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x = -1: \quad y = 4 + 2k \quad x - 3x + 2k = 4 + x + 2k \\ 4 - 3(-1) + 2k = 4 + (-1) + 2k \\ 4 + 3 + 2k = 4 - 1 + 2k \\ 4k = 2k - 3 \\ 4k = 2k - 3$$

$$-4 \leq 4 + 2k \leq 4 \quad \underline{5 \text{ или}}$$

$$-8 \leq 2k \leq 0 \quad -4 \leq k \leq 0 \\ -4 \leq k \leq 0$$

$$x = 0: \quad y = 1 + 2k \quad 4 \text{ или}$$

$$-4 \leq 1 + 2k \leq 4 \quad -3 \leq k \leq 1 \\ -5 \leq 2k \leq 3 \\ -2.5 \leq k \leq 1.5 \\ -2 \leq k \leq 1$$

$$x = 1: \quad y = -2 + 2k \quad 5 \text{ или}$$

$$-4 \leq -2 + 2k \leq 4 \quad 1 \leq k \leq 3$$

$$x = 2: \quad y = -5 + 2k \quad 4, 3, 2, 1$$

$$-4 \leq -5 + 2k \leq 4 \quad 1 \leq k \leq 4.5 \\ 1 \leq 2k \leq 9 \\ 0.5 \leq k \leq 4.5 \\ 1 \leq k \leq 4$$

$$x = 3: \quad y = -8 + 2k \quad 4 \text{ или}$$

$$-4 \leq -8 + 2k \leq 4 \quad 1 \leq k \leq 12 \\ 2 \leq k \leq 6$$

$$-4 \leq -11 + 2k \leq 4 \\ 7 \leq 2k \leq 15 \\ 3.5 \leq k \leq 7.5$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\textcircled{1} \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$-5 \leq x \leq 5 \quad -4 \leq y \leq 4$$

$$\textcircled{1} \quad y = 1 - 3x + 2k$$

$$x = -5: \quad y = 16 + 2k$$

$$-4 \leq 16 + 2k \leq 4$$

$$-20 \leq 2k \leq -12$$

$$-10 \leq k \leq -6$$

5 варианта

-10, -9, -8, -7, -6

$$\textcircled{2} \quad x = -4: \quad y = 13 + 2k$$

$$-4 \leq 13 + 2k \leq 4 \quad | -13$$

$$-17 \leq 2k \leq -9$$

$$-8,5 \leq k \leq -4,5$$

$$-8 \leq k \leq -4$$

$$x = -3: \quad y = 20 + 2k$$

$$-4 \leq 20 + 2k \leq 4$$

$$-14 \leq 2k \leq -16$$

$$-7 \leq k \leq -8$$

5 варианта

5 варианта

$$x = -2: \quad y = 7 + 2k$$

$$-9 \leq 7 + 2k \leq 9 \quad | -7$$

$$-16 \leq 2k \leq -10$$

$$-8,5 \leq k \leq -5,5; \quad -8 \leq k \leq -1$$

5 варианта



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y \leq$$

$$\frac{x \cdot 3\sqrt{2} \cdot \cos 2 + 12 \sin 2 \cdot \cos 2}{x - 3\sqrt{2} \cdot \sin 2}$$

$$3\sqrt{2} \sin 2 = a \rightarrow a^2 = 12 \sin^2 2$$

$$3\sqrt{2} \cos 2 = \sqrt{1-a^2} \quad \sqrt{12-12 \sin^2 2}$$

$$12 \cos^2 2 = 1-a^2$$

$$3\sqrt{2} \cos 2 = \pm \sqrt{1-a^2}$$

$$\begin{cases} (x-a)(y-\sqrt{1-a^2}) \leq 0 \\ x^2+y^2 \leq 25 \end{cases}$$

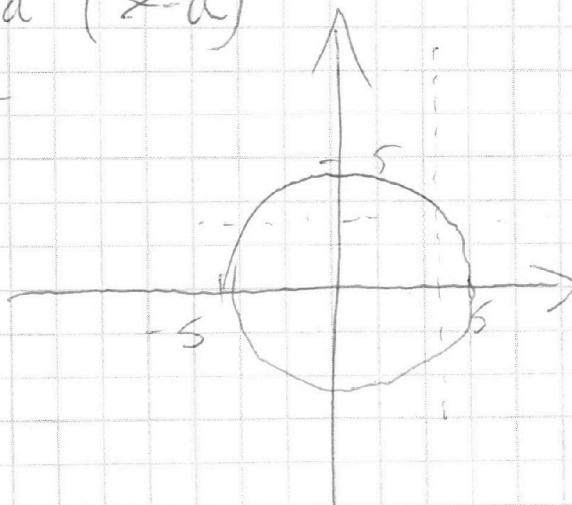
$$xy - \sqrt{1-a^2}x - ay + a\sqrt{1-a^2} \leq 0$$

$$y(x-a) \leq \sqrt{1-a^2}(x-a)$$

$$y \leq \sqrt{1-a^2}$$

$$x=a$$

$$x \geq 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.



Это же можно было!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin 2)(y - 3\sqrt{2}\cos 2) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases} \leftarrow \text{OKH-шт}$$

$$xy - 3\sqrt{2}\cos 2 \cdot x - 3\sqrt{2}\sin 2 \cdot y + 12\sin 2 \cdot \cos 2 \leq 0$$

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin 2)(y - 3\sqrt{2}\cos 2) \leq 0 \\ x \leq 3\sqrt{2}\sin 2 \end{cases} \quad x^2 = 12\sin^2 2$$

$$\begin{cases} y = 3\sqrt{2}\cos 2 \\ x^2 = 12\sin^2 2 \end{cases} \quad y^2 = 12\cos^2 2$$

$$x^2 + y^2 = 12$$

$$\begin{cases} x^2 \geq 3\sqrt{2}\sin 2 \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \leq 12\sin^2 2 \\ y^2 \leq 12\cos^2 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin 2 \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 \leq 12\sin^2 2 \\ y^2 \geq 12\cos^2 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 \leq 12 - 8\sin^2 2 \\ x^2 \leq 12\sin^2 2 \end{cases}$$

$$-x^2 \leq -12\sin^2 2$$

$$y(x - 3\sqrt{2}\sin 2) \leq 3\sqrt{2}\cos 2x + 12\sin 2\cos 2$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

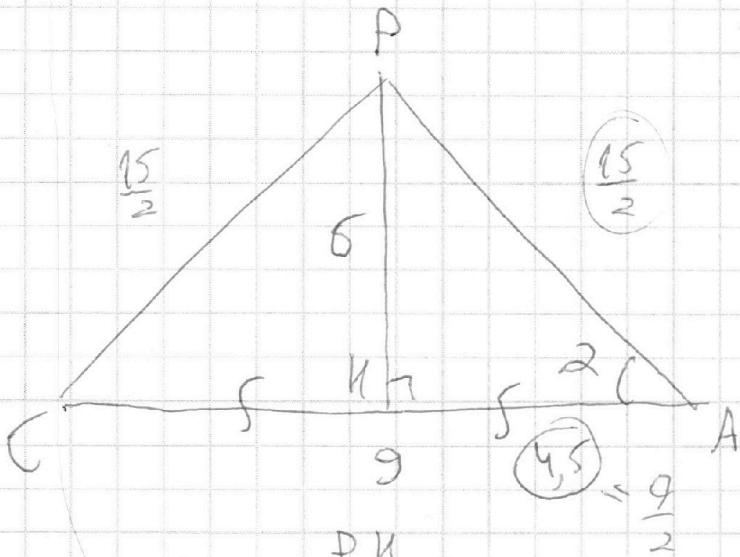
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin 2 = \frac{PK}{PA}$$

$$PK = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{81}{4}} = \sqrt{\frac{144}{4}} = \frac{12}{2} = 6$$

$$\sin 2 = \frac{6}{\frac{15}{2}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin 2$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{216}{5} = 43.2$$

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№5.

A

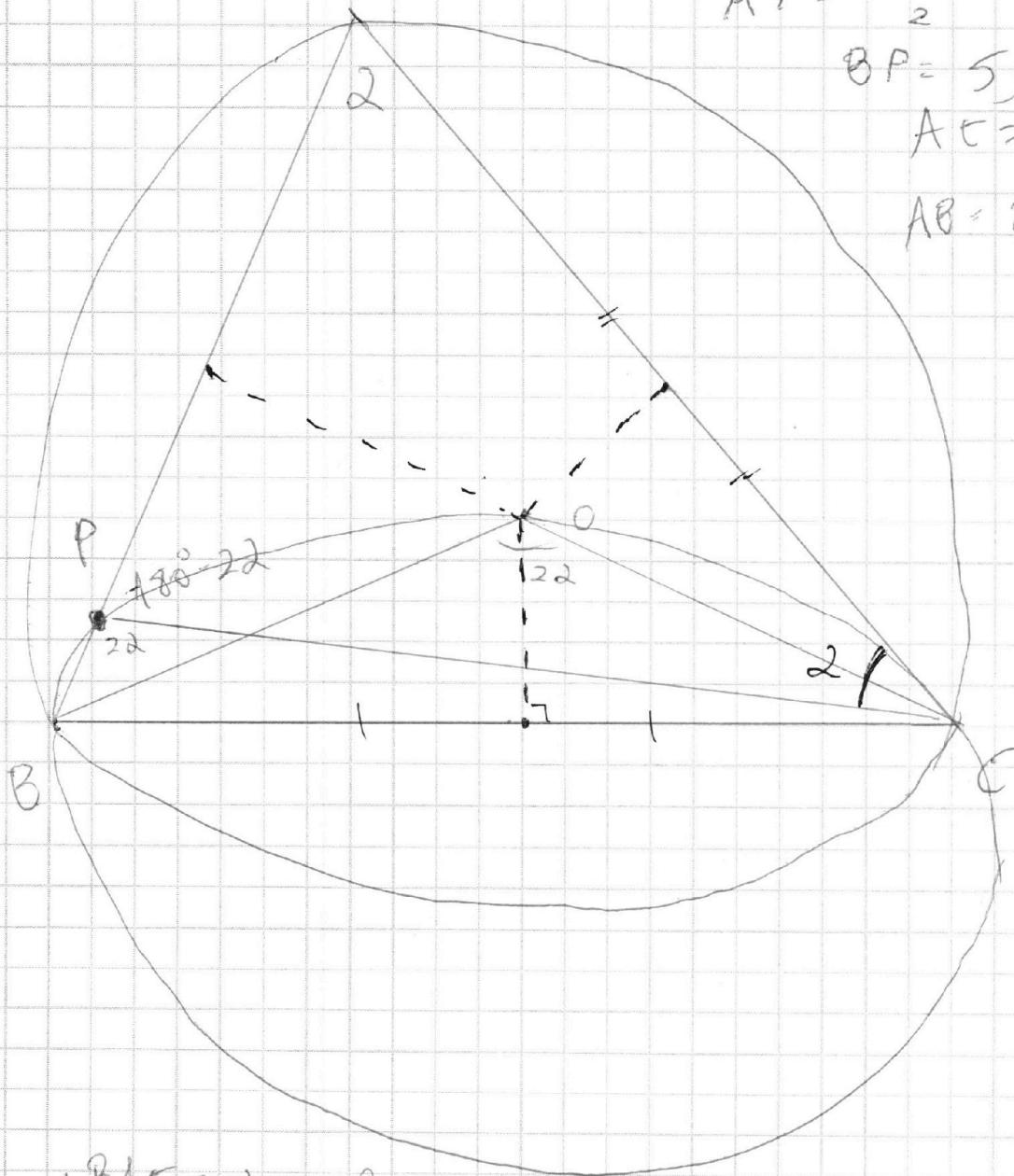
S_{ABC} - ?

$$AP = \frac{15}{2}$$

$$BP = 5j$$

$$AC = 9$$

$$AB = 12,5$$



$$\angle BAC = 2^{\circ}, \angle BOC = 22^{\circ}$$

$$\angle BPC = 22^{\circ}, \angle CAPC = 180^{\circ} - 22^{\circ}$$

$$\triangle APC - \text{равн.} \quad PC = AP$$

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_4^2}{C_4^2} - 2,5 = \frac{C_a^2}{C_a^2}$$

~~C₄²~~

$$5 - 2,5 = C_a^2$$
$$15 = \frac{a!}{(a-2)! - 2!}$$

$$30 = \frac{a!}{(a-2)!} = \frac{a \cdot (a-1) \cdot (a-2)!}{(a-2)!} = a(a-1)$$

$$a^2 - a - 30 = 0$$

$$D = 1 + 120 = 121$$

$$a = \frac{1 \pm 11}{2}$$
$$a = 5$$
$$a = -5,$$

W₄.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

WY.

$$\frac{16}{x^2 - 2,5} = \frac{a^2}{x^2}$$

x - 2 числа 11 - множители;

$$P_1 = \frac{4}{x}$$

$$40 = a^2$$

?!

Число одинаково сило $a \geq 4$

$$P_2 = \frac{a}{x}$$

1) число одинаково $= 4$

число 11-множителей $m = x$

Бр. и π , и θ находим вместе и в порядке

$$\frac{4}{x} \cdot \frac{4}{x} = \frac{16}{x^2}$$

$$m m \quad \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{12}{x(x-1)}$$

2,5 руд
много

$$2) P_2 = \frac{a}{x} \cdot \frac{a-1}{x-1} = \frac{a(a-1)}{x(x-1)}$$

$$\frac{12}{x(x-1)} - 2,5 = \frac{a(a-1)}{x(x-1)}$$

$$25 = a^2 - a$$

$$a^2 - a - 25 = 0$$

$$D = 1 + 100 = 101;$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{101}}{2}$$

~~Установлено?~~