



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{bcd} ; \text{ в нем с или d} = 1$$

$$C = \overline{ef} ; \text{ ни f} = 5$$

$$A \cdot B \cdot C = n^2 \quad \text{2 простых числа}$$

$$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101 \quad 0 < a < 10 ; a \in \mathbb{N}$$

т.к. ABC - квадрат $\Rightarrow$ каждый его простой множитель встречается в нем по 2 раза. $\Rightarrow 101$ должен встретиться в числах B или C , $C < 100 \Rightarrow 101$ - делитель B

$0 < k < 10$
 $B = k \cdot 101$ т.к. мы знаем, что $0 < k < 10 \Rightarrow B = \overline{k0k} \neq 2$
также нам известно, что одна из цифр B - единица $\Rightarrow$
 $\Rightarrow k = 1 \Rightarrow B = 101$

Также в $A \cdot B \cdot C$ должен встретиться 11 2 раза $\Rightarrow$
 $C : 11 \Rightarrow C = l \cdot 11 = \overline{ll}$ но нам сказано, что одна из цифр C - пятерка $\Rightarrow l = 5 \Rightarrow C = 55$.

Итого:

$$A \cdot B \cdot C = 5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 11 \cdot 101 = n^2$$

в разложении должна встретиться 5 $\Rightarrow a = 5$ - единственное удовлетворяющее условию
 $a \in \mathbb{N} ; a < 10$

Таким образом найдем все a .

Ответ: $A = 5555 ; B = 101 ; C = 55$.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$$x; y > 0$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = ?$$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

Если $x; y > 0 \Rightarrow x+y+1 > 0$, тогда, получаем:

$$xy = (x-3)(y+3) = xy + 3x - 3y - 9 \Rightarrow 3(x-y) = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-y = 3 \Rightarrow x = 3+y$$

Тогда, подставив в M , получим:

$$M = 27 + 9y^2 + 27y + y^3 - y^3 - 9(3+y)y = 27 + 9y^2 + 27y - 27 - 9y^2 = 27$$

Таким образом, получаем, что M - единственно и равно 27.

Ответ: $M = 27$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$$\sin a + \sin b = \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b; \quad \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

Итак же $\cos$:

$$\cos a + \cos b = \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} - \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} - \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} + \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} + \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2} =$$

$$= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

Тогда такими преобразованиями:

$$(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$2 \cos \left(\pi \left(\frac{x+y}{2} \right) \right) \sin \left(\pi \left(\frac{x-y}{2} \right) \right) \sin \pi x = 2 \cos \left(\pi \left(\frac{x+y}{2} \right) \right) \cos \left(\pi \left(\frac{x-y}{2} \right) \right) \cos \pi x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \left(\pi \left(\frac{x-y}{2} \right) \right) \sin \pi x = \cos \left(\pi \left(\frac{x-y}{2} \right) \right) \cos \pi x$$

$x+y$ - нечетное число

$$0 = \cos \left(\pi \left(\frac{x-y}{2} \right) \right) \cos \pi x - \sin \left(\pi \left(\frac{x-y}{2} \right) \right) \sin \pi x = \cos \left(\pi \left(\frac{x-y}{2} + x \right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi \frac{3x-y}{2} = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow 3x-y - \text{нечетное число}$$

Такими образом нам подходит все пары таких x, y , что $x+y$ - нечетное число

$3x-y$ - нечетное число

Пункт б: $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{3} < 2\pi$$

Здесь сказано, какие числа не подходят:

← Ответ на пункт а
нечетное в значении $2k+1$, где $k \in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow$ числа не обязательно натуральные



1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~Илим~~ ~~нет~~ ~~Страница~~

Ограничение:

аргссы $\rightarrow$ возвращ. значение от 0 до $\pi \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~од~~ равенство будет достигаться, если

$$\text{аргссы } \frac{x}{4} = \pi ; \text{аргссы } \frac{y}{9} = \pi \Rightarrow \frac{x}{4} \neq -1 ; \frac{y}{9} \neq -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \neq -4 ; y \neq -9 \quad (1)$$

Плюс мы знаем, что арксос определен на области от -1 до 1

$$\Rightarrow \frac{x}{4} \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$$

$$\frac{y}{9} \in [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \Rightarrow -9 \leq y \leq 9$$

~~Плюс посмотрим на условие пункта а:~~

$$\nmid x+y - \text{нечетное} \Rightarrow$$

$$x+y = 2k+1$$

Если раскрыть условие на целость:

$x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$ — может быть одним из чисел

$$y \in \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

Условие из (а):

$$x+y - \text{нечетное} \Rightarrow x, y - \text{разной четности (если } x, y \in \mathbb{Z})$$

$$3x-y - \text{нечетное} \Rightarrow x, y - \text{разной четности (если } x, y \in \mathbb{Z})$$

четных x — 4 шт

четных y — 9

нечетных x — 4 шт

нечетных y — 9

$$\text{Тогда всего пар: } 4 \cdot 9 \cdot 2 = 72 \text{ пары чисел:}$$

Ответ: 72 пары чисел.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Многа

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \frac{1 \pm 13}{2} \rightarrow \begin{matrix} -6 \\ +7 \end{matrix}$$

$m^2 - m = 42 \Rightarrow m^2 - m - 42 = 0 = (m-7)(m+6) \Rightarrow \begin{matrix} m = -6 \\ m = 7 \end{matrix}$
отрицательное количество билетов выдано ~~не~~ быть не может

$$\Rightarrow m = 7$$

Ответ: ~~бы~~ в конце месяца было выдано 7 билетов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☒5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

N - общее количество 11-классников

П; В - Петя и Вера

$$P(A \cap B) = 3,5 \cdot P \text{ в начале} = P \text{ в конце}$$

$4 = n - \text{в начале}$

Найдем вероятность того, что 2 выбранных человека пойдут вместе:

$$P = \frac{a}{b}$$

a - количество ~~предполож~~ желаемых исходов
 b - общее количество исходов

$$b_1 = C_N^4 \text{ - в начале - мы выбираем, какие 4 11-классника пойдут на концерт}$$

$$a_1 = C_{(N-2)}^2 \text{ - в начале - все количество исходов в при которых билеты покупают у П и В}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Тогда P_1 - в начале месяца:

$$P_1 = \frac{(N-2)!}{2!(N-4)!} \cdot \frac{4!(N-4)!}{N!} = 12 \cdot \frac{12}{N(N-1)}$$

Если в конце выделим m билетов, то

$$a_2 = C_{(N-2)}^{m-2} \quad b_2 = C_{(N)}^m$$

$$P_2 = \frac{(N-2)!}{(m-2)!(N-2-m+2)!} \cdot \frac{m!(N-m)!}{N!} = \frac{(N-2)! \cdot m!}{(m-2)! \cdot N!} = \frac{m(m-1)}{N(N-1)}$$

По условию $P_2 = 3,5 \cdot P_1 \Rightarrow \frac{m(m-1)}{N(N-1)} = \frac{3,5 \cdot 12}{N(N-1)} \Rightarrow \frac{m(m-1)}{N(N-1)} = \frac{42}{N(N-1)}$ $N \neq 0; N \neq 1$ (у нас не 0 и 1)

$$\Rightarrow m^2 - m - 42 = 0 \Rightarrow m^2 - m - 42 = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{1+4 \cdot 42}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \Rightarrow m = 4 \text{ или } m = -3$$

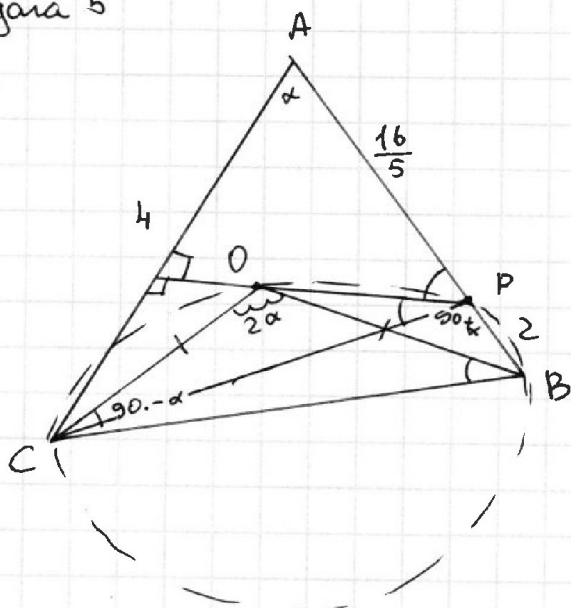


1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 5



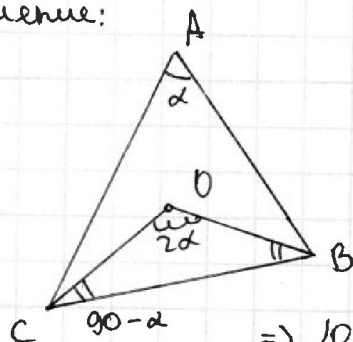
$\triangle ABC$ - остроугольный $\triangle$
 O - центр описанной ABC (ω_1)
 ω_2 - описанная BOC

$$\{P\} = AB \cap \omega_2 : AP = \frac{16}{5}; BP = 2$$

$$AC = 4$$

$$S_{ABC} = ?$$

Решение:



1) Т.к. O - центр опис. ок-ти ABC $\Rightarrow$
 $\angle COB = 2\angle CAB = 2\alpha$

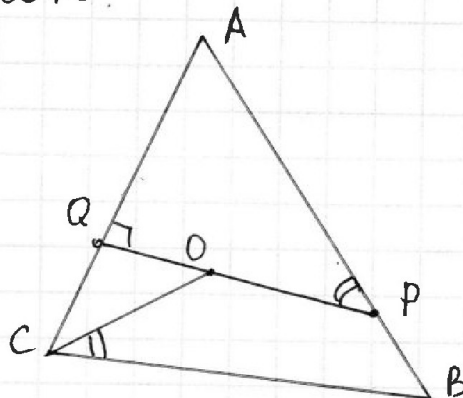
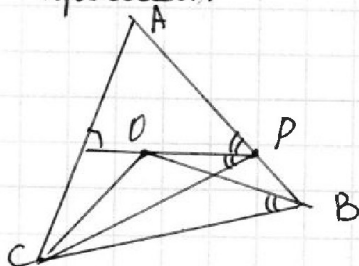
2) $OB = OC = OA \Rightarrow \triangle OCB$ - $\triangle$ по определению
 $\Rightarrow \angle OCB = 90^\circ - \alpha = \angle CBO$

3) Так как P - пересечение AB и $\omega_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow OPBC$ - вписанный $\Rightarrow \angle OPB + \angle OCB = 180^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle OPB = 180^\circ - 90^\circ + \alpha = 90^\circ + \alpha$

4) $\angle APO + \angle OPB = 180^\circ$ как смежные
 $\Rightarrow \angle APO = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle APO = \angle OCB$

5) Проведем OP до пересечения
с AC : $OP \cap AC = \{Q\}$.

6) $\angle AQP = 180^\circ - \angle CAB - \angle APQ$ по сумме
углов треугольника $\Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AQP = 180^\circ - \alpha - 90^\circ + \alpha = 90^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AQP$ - прямой.



7) Т.к. $OPBC$ - впис. $\Rightarrow$
 $\angle OPC = \angle OBC = 90^\circ - \alpha = \angle APQ$
следовательно OP - биссектриса
в $\triangle APC$, она же и высота
т.к. AQP - прямой $\Rightarrow \triangle APC$ -
равнобедренный т.к. высота



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

совпадает с биссектрисой. $\Rightarrow$

$$AP = PC = \frac{16}{5} \text{ и } Q - \text{середина } AC$$

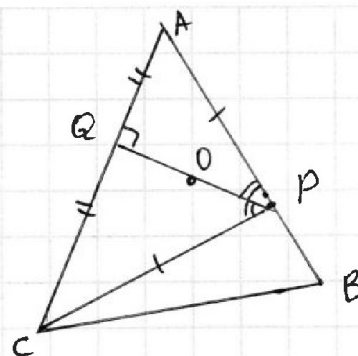
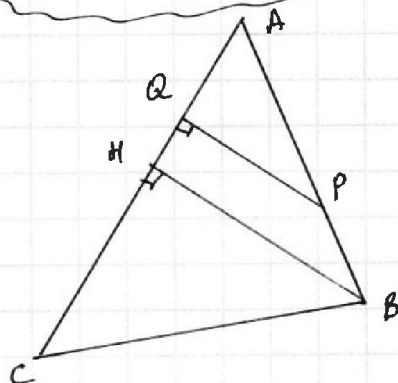
$$8) \text{ Тогда } AQ = \frac{1}{2} AC = 2$$

9) Из теоремы Пифагора найдем PQ:

$$PQ = \sqrt{AP^2 - AQ^2} = \sqrt{\frac{256}{25} - 4} =$$

$$= \sqrt{\frac{156}{25}} = \frac{2}{5} \sqrt{39}$$

$$156 = 4 \cdot 39 = 4 \cdot 3 \cdot 13$$



10) Найдём BH - высоту в ABC

11) $\triangle APQ \sim \triangle ABH$ по двум углам
 $\angle BAC$ - общий $\angle AQP = 90^\circ = \angle AHB$

$$12) QP : HB = AP : AB \Rightarrow$$

$$\Rightarrow HB = QP \cdot \frac{AB}{AP} = \frac{2}{5} \cdot \frac{26}{16} \sqrt{39} = \frac{26\sqrt{39}}{40} \textcircled{=}$$

$$AB = AP + BP = \frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$\textcircled{=} HB = \frac{13\sqrt{39}}{20}$$

$$13) \text{ Наконец найдём } S_{ABC} = \frac{HB \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 13\sqrt{39}}{40} = \frac{13}{10} \sqrt{39}$$

$$\text{Ответ: } S_{ABC} = \frac{13}{10} \sqrt{39}$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$Q(\alpha): \begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 9 & (2) \end{cases}$$

~~Решение:~~

M - периметр $Q \Rightarrow M(\max) = ? ; \alpha = ?$

Решение:

1) Належи с (2) - оно задает нам ~~уравнение~~ круга с центром в начале координат и радиусом 3 $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ все точки лежащие внутри него будут удовлет-во-вать (2)

2) (1) выполняется, когда ~~х и у~~ $x - 2\cos\alpha$ и $y - 2\sin\alpha$ имеют один знак (или одно из них равно нулю).

Тогда рассмотрим 2 случая:

$$\begin{cases} x - 2\cos\alpha \geq 0 \\ y - 2\sin\alpha \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{и } \begin{cases} x - 2\cos\alpha \leq 0 \\ y - 2\sin\alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

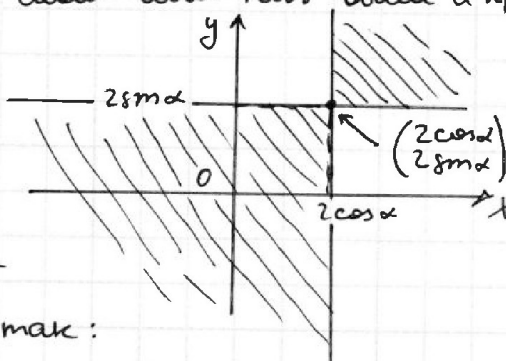
$$\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$$

Точкой равенства является ~~х = 2cosα и у = 2sinα~~ и все точки, удовлет-во-вающие (2) лежат ~~выше и левее~~ ~~или правее и ниже~~ ~~или левее и ниже~~

Примерно так выйдет область подходящих точек



Зависимость положения точки $(2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$ от α можно описать так:

это точка, лежащая на окружности радиусом 2 и отстоящая от Ox на угол α . (см рисунок на следующем листе)

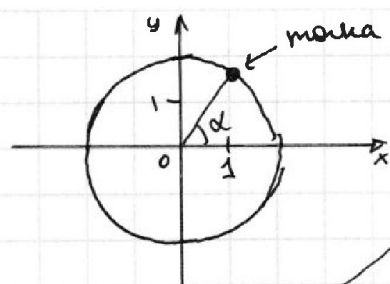


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

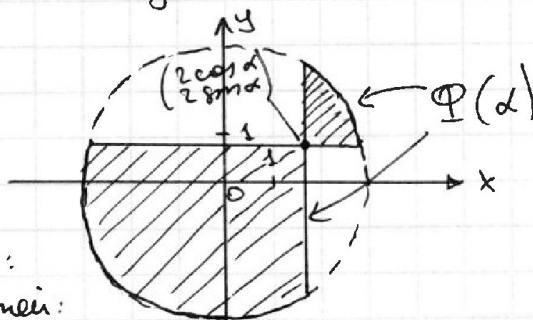
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



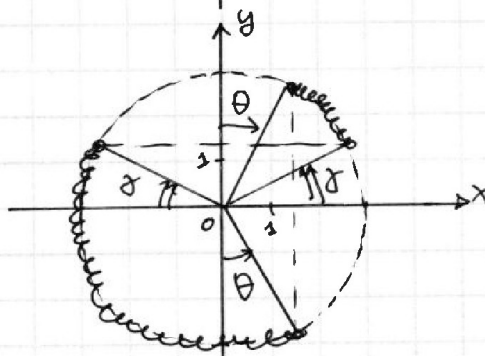
Теперь "обобщим" соединим грани-
чение:
 $\Phi(\alpha)$ выведет примерно так:



Подобнее посчитаем периметр:
1) Периметр участков округлости:

$$M_{\text{окр}} = 2R \left(\frac{\pi}{2} + \theta + \gamma + \frac{\pi}{2} - \theta - \gamma \right) R =$$

$= \pi R = \text{const}$ и он не
зависит от α (введение θ и γ
см. на рисунке)
~~и γ не зависит н.е. с. с. с. с.~~
точка



2) Периметр прямых отрезков:
Найдем из теоремы Пифагора:

$$OC = 3 = OB = OD = OA$$

$$OP = 2 \cos \alpha$$

$$OQ = 2 \sin \alpha$$

$$AB = 2AQ; AQ^2 = OA^2 - OQ^2$$

$$CD = 2CP; CP^2 = OC^2 - OP^2$$

$$M_{\text{прям}} = AB + CD = 2(AQ + CP) =$$

$$= 2 \left(\sqrt{9 - 4 \cos^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} \right) = 2 \left(\sqrt{5 + 4 \sin^2 \alpha} + \sqrt{9 - 4 \sin^2 \alpha} \right)$$

нам нужно максимизировать эту функцию от $t = 4 \sin^2 \alpha$, $t \in [0; 4]$:

$$f(t) = \sqrt{5+t} + \sqrt{9-t} \rightarrow \max$$

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{5+t}} - \frac{1}{2\sqrt{9-t}} = 0 = \frac{\sqrt{9-t} - \sqrt{5+t}}{2\sqrt{(5+t)(9-t)}} = 0 \Rightarrow \sqrt{9-t} = \sqrt{5+t}$$

$$t \in [0; 4] \Rightarrow t \neq -5$$

$$t \neq 9$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пограничник у нас поможет. ~~ф-ция~~ ^{величина} ~~м.к.~~ $t \in [0; 4]$:

$$\Rightarrow \text{~~0, 2, 4, 2, 0, 2, 4, 2~~ } t=2$$

$$9-t = 5+t \Rightarrow 4 = 2t \Rightarrow t = 2 - \text{экстремум}$$

Итак найдем, где у нас сравним значения ~~f~~ $f(t)$ на концах отрезка и в точке нулевой производной:

$$f(0) = \sqrt{5} + 3$$

$$f(2) = 2\sqrt{4} = \sqrt{28}$$

$$f(4) = \text{~~4\sqrt{1}}~~ } 3 + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{5} + 3\sqrt{28}$$

$$5 + 6\sqrt{5} + 9\sqrt{28}$$

$$6\sqrt{5} \sqrt{14}$$

$$3\sqrt{5} \sqrt{7}$$

$$45 \sqrt{49}$$

$$45 < 49$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 5 < f(0) = f(4) < 6 \\ 5 < f(2) < 6 \end{array}} \quad 2 < \sqrt{5} < 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{5} + 3 < \sqrt{28} \Rightarrow t=2 - \text{точка максимума.}$$

$$t=2 = 4 \sin^2 \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin^2 \alpha \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos^2 \alpha \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m \\ \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2\pi l \end{array} \right. \quad m, n, k, l \in \mathbb{Z}$$

точки максимума.

$$\text{Найдем } M \text{ при } \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}:$$

$$M = M_{\text{фиг}} + M_{\text{фиг}} = \pi \cdot 3 + 2(2\sqrt{4}) = \boxed{3\pi + 4\sqrt{4} = M(\max)}$$

$$\text{Ответ: } M(\max) = 3\pi + 4\sqrt{4}$$

$$\alpha \text{ при кот. достигается } M(\max): \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$



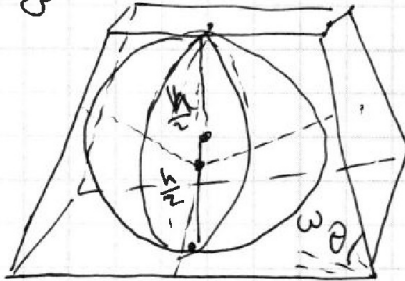
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Задача 7



прав. усеченная пирамида.
 $R; \omega$
 все ребра ω боковые грани
 θ - угол между основанием и боков. ребром.

Решение:

1) Так как пирамида правильная и усеченная $\Rightarrow$ ее основания - два параллельных правильных многоугольника.
~~наско-ост~~
 плоскости оснований параллельны.
 при этом все ее боковые грани тоже одинаковы

2) Получим, что ситуация симметрична относительно линии, соединяющей центры оснований.

3) Следовательно центры шаров Ω и ω лежат на этой линии $\Rightarrow r\omega = \frac{h}{2}$ - радиус ω
 высота пирамиды.

4) Введем следующие обозначения

S - меньшее основание

S' - большее основание

a - сеч. боков. ребро

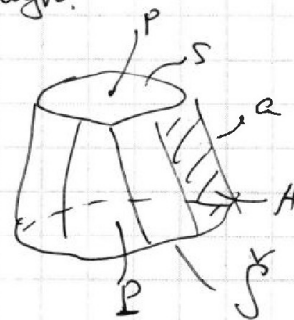
A - сеч. боковая грань

O - центр Ω

O - центр ω

P - центр S

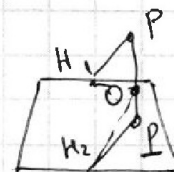
P - центр S'



5) Получим, что O лежит ближе к S' , чем к S т.к. ~~мы~~
 можем расстояние до O отн. средин ребер, принадлежащих S
 или S' одинаковы, однако расст. $H_1 P < H_2 P \Rightarrow$

$\Rightarrow PO > PO$ (из Th. Пифагора)

Также я знаю, что $H_1 O < H_2 O$



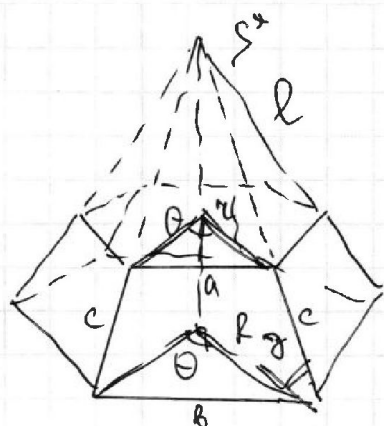


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☒

СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$2c = a + b \text{ (сб-во косин. их угловника)}$$

$$r = l \cos \gamma$$

$$R = (l + c) \cos \gamma$$

$$a = 2r \sin \frac{\theta}{2}$$

$$b = 2R \sin \frac{\theta}{2}$$

$$2c = 2 \sin \frac{\theta}{2} (2l + c) \cos \gamma$$

$$c = 2l \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma + c \cos \gamma$$

$$c(1 - \cos \gamma) = 2l \sin \frac{\theta}{2} \cos \gamma$$

Что не может быть $\Rightarrow$

$\Rightarrow S^*$ либо не существует либо она на бесконечности $\Rightarrow$ угол между основанием и

Ответ: 90°
- угол между
бок. ребром и
основанием