МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A;B;C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 3, а y — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 9xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x;y)$ такие, что $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x,y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = \frac{16}{5}$, $BP = 2$, $AC = 4$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} (x - 2\cos\alpha)(y - 2\sin\alpha) \geqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 9. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 1

$A = \overline{aaaa}$

$B = \overline{bcd}$; b или c или $d = 1$

$C = \overline{ef}$; e или $f = 5$

$A \cdot B \cdot C = n^2$

2 простых числа

$A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$; $0 < a < 10$; $a \in N$

т.к ABC – квадрат $\Rightarrow$ каждый его простой делитель встречается в нём по 2 раза. $\Rightarrow$ 101 должен встретиться в числах B или C, $C < 100 \Rightarrow 101$ – делитель B

$B = k \cdot 101$ ($0 < k < 10$) Т.к. мы знаем, что $0 < k < 10 \Rightarrow B = \overline{k0k}$ также нам известно, что одна из цифр B – единица $\Rightarrow$
$\Rightarrow k = 1 \Rightarrow B = 101$

Также в $A \cdot B \cdot C$ должно встретиться 11 2 раза $\Rightarrow$
$C \vdots 11 \Rightarrow C = l \cdot 11 = \overline{ll}$ но нам сказано, что одна из цифр C – пятерка $\Rightarrow l = 5 \Rightarrow C = 55$.

Тогда:

$A \cdot B \cdot C = 5 \cdot 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 11 \cdot 101 = n^2$

в разложении должна встретиться $5 \Rightarrow a = 5$ – единственное удовлетворяющее условиям $a \in N$; $a < 10$; $a \vdots 5$

Таким образом пара всего одна.

Ответ: $A = 5555$; $B = 101$; $C = 55$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 2

$x; y > 0$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)}$$

$M = x^3 - y^3 - 9xy = ?$

$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x-3+y+3+1}{(x-3)(y+3)} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

Если $x; y > 0 \Rightarrow x+y+1 > 0$, тогда, получаем:

$xy = (x-3)(y+3) = xy + 3x - 3y - 9 \Rightarrow 3(x-y) = 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - y = 3 \Rightarrow x = 3 + y$

Тогда, подставив в M, получим:

$M = 27 + 9y^2 + 27y + y^3 - y^3 - 9(3+y)y = 27 + 9y^2 + 27y -$
$- 27 - 9y^2 = 27$

Таким образом, получаем, что M - единственно и равно 27.

Ответ: $M = 27$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 3

$\sin a + \sin b = \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$; $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$

30
60 − 30

$\frac{\sqrt3}{2} \cdot \frac{\sqrt3}{2}$ $\frac12$ $\frac12$

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$\sin(a-b) = \sin 60\cos 30 - \sin 30\cos 60$

$\cos(a+b) = \cos^2 - \sin^2$

$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

Теперь для $\cos$:

$\cos a + \cos b = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$\cos a + \cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\sin a - \sin b = \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} =$
$= 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$\cos a + \cos b = \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} - \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2} =$
$= 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

Тогда такими преобразованиями:

$(\sin\pi x - \sin\pi y)\sin\pi x = (\cos\pi x + \cos\pi y)\cos\pi x$

$2\cos\left(\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\sin\left(\pi\frac{(x-y)}{2}\right)\sin\pi x = 2\cos\left(\pi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\cos\left(\pi\frac{x-y}{2}\right)\cos\pi x \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(\pi\left(\frac{x-y}{2}\right)\right)\sin\pi x = \cos\left(\pi\frac{x-y}{2}\right)\cos\pi x \\ x+y \text{ — нечётное число}\end{array}\right.$

$0 = \cos\left(\pi\frac{x-y}{2}\right)\cos\pi x - \sin\left(\pi\frac{x-y}{2}\right)\sin\pi x = \cos\left(\pi\left(\frac{x-y}{2}+x\right)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi\frac{3x-y}{2} = 2\pi n \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow$ $3x-y$ — нечётное число

Таким образом нам подходят все пары таких $x;y$, что
$x+y$ — нечётное число
$3x-y$ — нечётное число ← Ответ на пункт а

нечётное в значении $2k+1$, где $k\in\mathbb{Z}$, ⇒ числа не обязан. натуральные

Пункт б: $x;y\in\mathbb{Z}$

$\arccos\frac{x}{4} + \arccos\frac{y}{9} < 2\pi$

~~Легче сказать, какие числа не подходят:~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

~~Тут нет Сначала~~

Ограничение: $\arccos \xrightarrow{\text{возвращ. значение}}$ от 0 до π $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~об~~ равенство будет достигаться, если

$$\arccos \frac{x}{4} = \pi \;;\; \arccos \frac{y}{9} = \pi \Rightarrow \frac{x}{4} \neq -1 \;;\; \frac{y}{9} \neq -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \neq -4 \;;\; y \neq -9$ (1)

Также мы знаем, что arccos определён на области от -1 до 1

$\Rightarrow$ $\frac{x}{4} \in [-1;1] \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{4} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$ $\Big|\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $-4 < x \leq 4$

$\frac{y}{9} \in [-1;1] \Rightarrow -1 \leq \frac{y}{9} \leq 1 \Rightarrow -9 \leq y \leq 9$ $\Big|$ $-9 < y \leq 9$

~~Теперь посмотрим на условие пункта а:~~

~~1) x+y − нечетное ⇒~~

~~x+y = 2k+1~~

Если раскрыть условие на целость:

$x \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ – может быть одним из чисел

$y \in \{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Условие из (а):

$x+y$ – нечетное $\Rightarrow x;y$ – разной четности (если $x;y \in \mathbb{Z}$)

$3x-y$ – нечетное $\Rightarrow x;y$ – разной чётности (если $x;y \in \mathbb{Z}$)

четных x – 4 шт; четных y – 9

нечетных x – 4 шт; нечетных y – 9

Тогда всего пар: $4 \cdot 9 \cdot 2 = 72$ пары чисел:

Ответ: 72 пары чисел.

Тогда

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+168}}{2} = \frac{1 \pm 13}{2} \to -6,\ +7$$

$$m^2 - m = 42 \Rightarrow m^2 - m - 42 = 0 = (m-7)(m+6) \Rightarrow m = -6,\ m = 7$$

отрицательное количество билетов выдано быть не может

$\Rightarrow m = 7$

Ответ: ~~вы~~ в конце месяца было выдано 7 билетов

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 4

N - общее количество 11-классников

П ; В - Пете и Васе

$P(П \cap В) = 3{,}5 \cdot P$ в начале $= P$ в конце

$4 = n$ - в начале

Найдем вероятность того, что 2 выбранных человека получат билеты:

$$P = \frac{a}{b}$$ a — количество ~~требуемых~~ желаемых исходов, b — общее количество исходов

$b_1 = C_N^4$ - в начале - ~~т.к.~~ выбираем, какие 4 11-классника пойдут на концерт

$a_1 = C_{(N-2)}^2$ - в начале - ~~если~~ количество исходов при которых билеты окажутся у П и В

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Тогда P_1 - в начале месяца:

$$P_1 = \frac{(N-2)!}{2!(N-4)!} \cdot \frac{4!(N-4)!}{N!} = \frac{12}{N(N-1)}$$

Если в конце выделили m билетов, то

$a_2 = C_{(N-2)}^{m-2}$ $\qquad b_2 = C_{(N)}^{m}$

$$P_2 = \frac{(N-2)!}{(m-2)!\underbrace{(N-2-m+2)!}_{(N-m)!}} \cdot \frac{m!(N-m)!}{N!} = \frac{(N-2)!\cdot m!}{(m-2)!\cdot N!} = \frac{m(m-1)}{N(N-1)}$$

По условию $P_2 = 3{,}5 \cdot P_1 \Rightarrow \frac{m(m-1)}{N(N-1)} = \frac{3{,}5\cdot 12}{N\cdot(N-1)} \Rightarrow$ $N\neq 0; N\neq 1$ (у нас задача была)

$\Rightarrow$ ~~$m^2 - m = 12 \Rightarrow m^2 - m - 12 = 0 \Rightarrow m = \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2} = \frac{1\pm 7}{2}$~~ -3

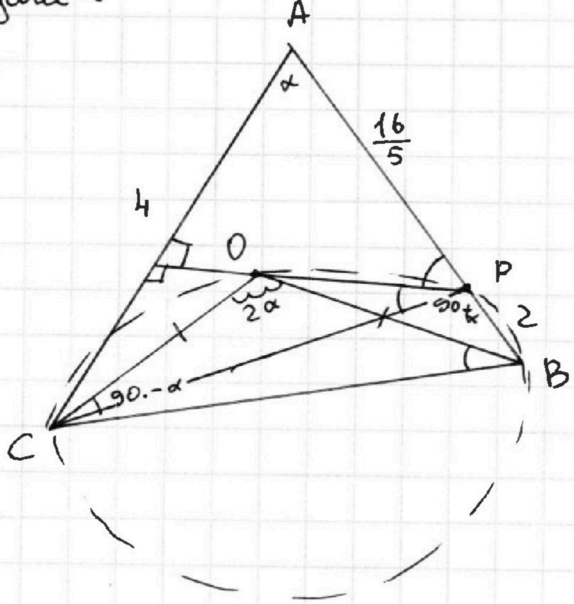
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 5



ABC - остроугольный Δ

O - центр описанной ABC (ω_1)

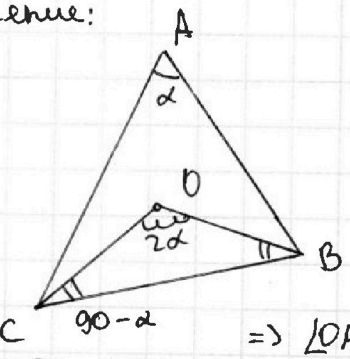
ω_2 - описанная BOC

$\{P\} = AB \cap \omega_2$: $AP = \frac{16}{5}$; $BP = 2$

$AC = 4$

$S_{ABC} = ?$

Решение:



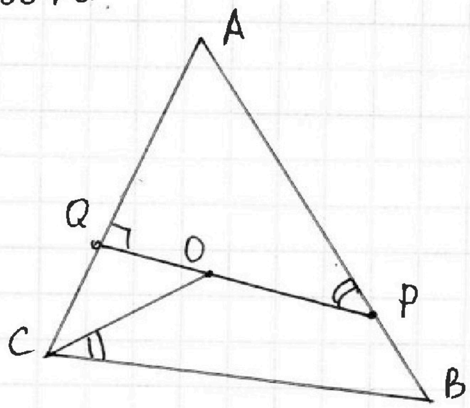
1) Т.к. O - центр опис. ок-ти $ABC \Rightarrow$ $\angle COB = 2\angle CAB = 2\alpha$

2) $OB = OC = OA \Rightarrow \Delta OCB$ - р/б по определению ($OC = OB$) $\Rightarrow \angle OCB = 90 - \alpha = \angle CBO$

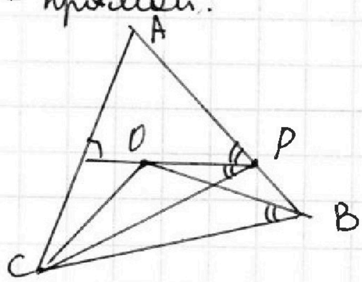
3) Так как P - пересечение AB и $\omega_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow OPBC$ - вписанный $\Rightarrow \angle OPB + \angle OCB = 180° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle OPB = 180 - 90 + \alpha = 90 + \alpha$

4) $\angle APO + \angle OPB = 180°$ как дополняющие друг друга $\Rightarrow \angle APO = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle APO = \angle OCB$

5) Продолжим OP до пересечения с AC: $OP \cap AC = \{Q\}$.



6) $\angle AQP = 180° - \angle CAB - \angle APQ$ по сумме углов треугольника $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AQP = 180° - \alpha - 90° + \alpha = 90° \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle AQP$ - прямой.



7) Т.к. $OPBC$ - впис. $\Rightarrow$ $\angle OPC = \angle OBC = 90° - \alpha = \angle APQ$ следовательно OP - биссектриса в APC, она же и высота т.к. AQP - прямой $\Rightarrow \Delta APC$ - равнобедренный т.к. высота

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

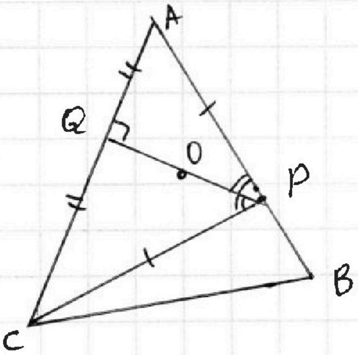
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

совпадает с биссектрисой. $\Rightarrow$

$AP = PC = \frac{16}{5}$ и Q – середина AC

8) Тогда $AQ = \frac{1}{2} AC = 2$

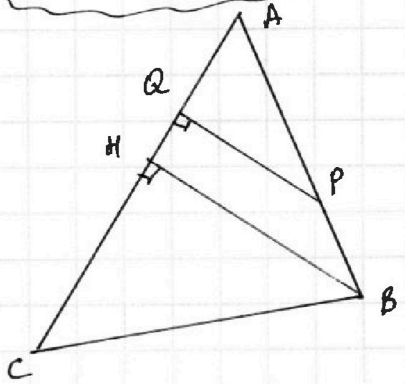
9) Из теоремы Пифагора найдем PQ:



$$PQ = \sqrt{AP^2 - AQ^2} = \sqrt{\frac{256}{25} - 4} =$$

$$= \sqrt{\frac{156}{25}} = \frac{2}{5}\sqrt{39}$$

~~$156 = 4 \cdot 39 = 4 \cdot 3 \cdot 13$~~



10) Проведём BH – высоту в ABC

11) $\triangle APQ \sim \triangle ABH$ по 2м углам

$\angle BAC$ - общий $\angle AQP = 90° = \angle AHB$

12) $QP : HB = \cancel{AB}\ AP : AB \Rightarrow$

$$\Rightarrow HB = QP \cdot \frac{AB}{AP} = \frac{2}{5} \cdot \frac{26}{16}\sqrt{39} = \frac{26\sqrt{39}}{40} \ominus$$

$$AB = AP + BP = \frac{16}{5} + 2 = \frac{26}{5}$$

$$\ominus\ HB = \frac{13\sqrt{39}}{20}$$

13) Наконец найдём $S_{ABC} = \frac{HB \cdot AC}{2} = \frac{4 \cdot 13\sqrt{39}}{40} = \frac{13}{10}\sqrt{39}$

Ответ: $S_{ABC} = \frac{13}{10}\sqrt{39}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 6

$$\Phi(\alpha):\ \begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha)\geq 0 \quad (1) \\ x^2+y^2\leq 9 \quad (2) \end{cases}$$

~~$P(max)=?$~~

M - периметр Φ => $M(max)=?$; $\alpha=?$

Решение:

1) Начнем с (2) - оно задает нам ур~~-ние~~ние круга с центром в начале координат и радиусом 3 => => все точки лежащие внутри него будут удовлетворять (2)

2) (1) выполняется, когда ~~$x-2\cos\alpha$~~ $x-2\cos\alpha$ и $y-2\sin\alpha$ имеют один знак (или одно из них равно нулю).
Тогда рассмотрим 2 случая:

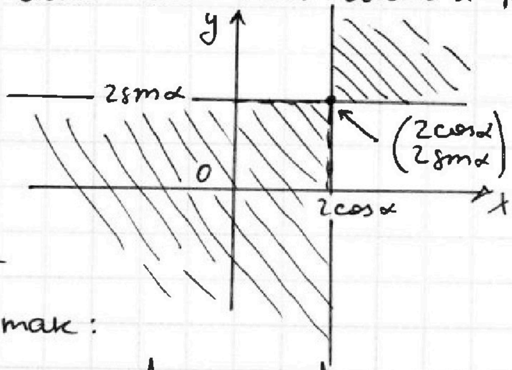
$$\begin{cases} x-2\cos\alpha\geq 0 \\ y-2\sin\alpha\geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x-2\cos\alpha\leq 0 \\ y-2\sin\alpha\leq 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad\qquad \Downarrow$$

$$\begin{cases} x\geq 2\cos\alpha \\ y\geq 2\sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq 2\cos\alpha \\ y\leq 2\sin\alpha \end{cases}$$

Точкой равенства является $\begin{matrix} x=2\cos\alpha \\ y=2\sin\alpha \end{matrix}$ и все точки, удовлетворяющие (2) лежат ~~выше и левее или ниже~~ выше и правее либо ниже и левее

Примерно так выглядит область подходящих точек



Зависимость положение точки $\begin{pmatrix} 2\cos\alpha \\ 2\sin\alpha \end{pmatrix}$ от α можно описать так:

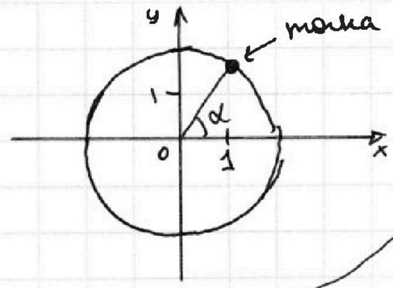
это точка, лежащая на аналоге триг. окр-ти с радиусом 2 и отстоящей от OX на угол α. (см рисунок на следующем листе)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

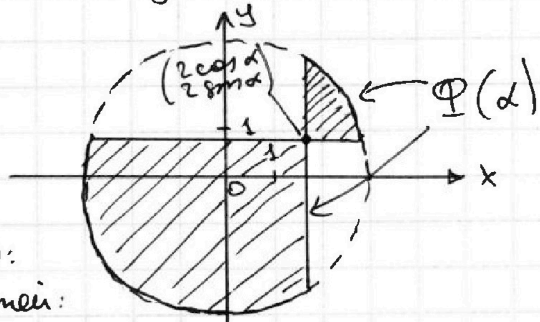
СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



Теперь ~~обобщим~~ "соединим" ограничение:

$\Phi(\alpha)$ выглядит примерно так:



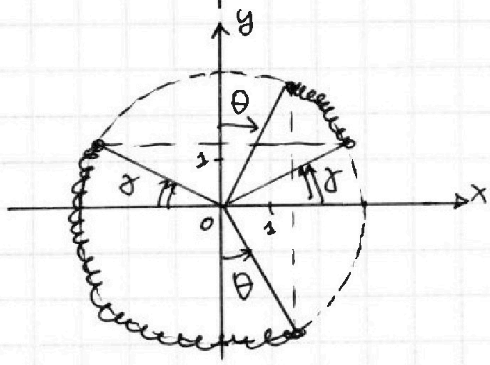
Попробуем посчитать периметр:

1) Периметр участков окружностей:

$П_{окр} = \cancel{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\theta+\gamma+\frac{\pi}{2}-\theta-\gamma\right)R =$

$= \pi R = const$ и он не зависит от α (введение θ и γ см. на рисунке)

~~θ и γ направлены т.е. если точка~~



2) Периметр прямых ~~отрезков~~:

Найдем из теоремы Пифагора:

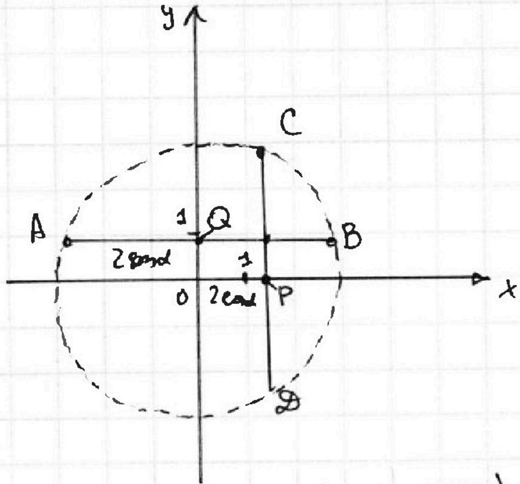
$OC = 3 = OB = OD = OA$

$OP = 2\cos\alpha$

$OQ = 2\sin\alpha$

$AB = 2AQ \quad ; AQ^2 = OA^2 - OQ^2$

$CD = 2CP \quad ; CP^2 = OC^2 - OP^2$



$П_{прям} = AB + CD = 2(\cancel{AB} + AQ + CP) =$

$= 2\left(\sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}\right) = 2\left(\sqrt{5 + 4\sin^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha}\right)$

нам нужно максимизировать эту функцию от $t = 4\sin^2\alpha$, $t \in [0;4]$:

$f(t) = \sqrt{5+t} + \sqrt{9-t} \to max$ $\quad t\in[0;4] \Rightarrow t \neq -5, \ t \neq 9$

$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{5+t}} - \frac{1}{2\sqrt{9-t}} = 0 = \frac{\sqrt{9-t} - \sqrt{5+t}}{2\sqrt{(9-t)(5+t)}} = 0 \Rightarrow \sqrt{9-t} = \sqrt{5+t}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц **в решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Под корнями у нас положит. ~~ф-ции~~ величины т.к. $t \in [0; 4]$:

$\Rightarrow$ ~~...~~

$9 - t = 5 + t \Rightarrow 4 = 2t \Rightarrow t = 2$ – экстремум

~~Теперь поймем, где ул.~~ Сравним значение $f(t)$ на границах отрезка и в точке нуля производной:

$f(0) = \sqrt{5} + 3$

$f(2) = 2\sqrt{7} = \sqrt{28}$

$f(4) = 3 + \sqrt{5}$

~~$5 < f(0) = f(4) < 6$~~ $\quad$ ~~$2 < \sqrt{5} < 3$~~

~~$5 < f(2) < 6$~~

$\sqrt{5} + 3 \vee \sqrt{28}$

$5 + 6\sqrt{5} + 9 \vee 28$

$6\sqrt{5} \vee 14$

$3\sqrt{5} \vee 7$

$45 \vee 49 \Rightarrow \sqrt{5} + 3 < \sqrt{28} \Rightarrow t = 2$ - точка максимума.

$45 < 49$

$t = 2 = 4\sin^2\alpha \Rightarrow \frac{1}{2} = \sin^2\alpha \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos^2\alpha \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m \\ \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2\pi l \end{array}\right.$ $\quad m; n; k; l \in \mathbb{Z}$

точки максимума.

Найдем М при $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$:

$M = M_{круг} + M_{прям} = \pi \cdot 3 + 2(2\sqrt{7}) = \boxed{3\pi + 4\sqrt{7} = M(max)}$

Ответ: $M(max) = 3\pi + 4\sqrt{7}$

α при кот. достигается $M(max)$ –: $\left\{ \begin{array}{l} ~~\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi n~~ \\ \alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

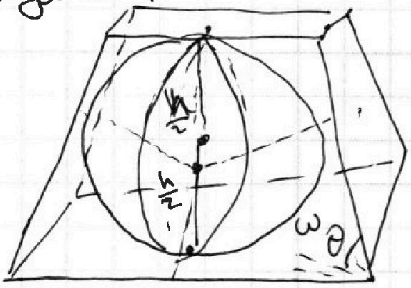
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 1 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Задача 7



прав. усечённая пирамида.

Ω ; ω

всех рёбер — Ω; всех граней — ω

θ – угол между основанием и бок. ребром.

Решение:

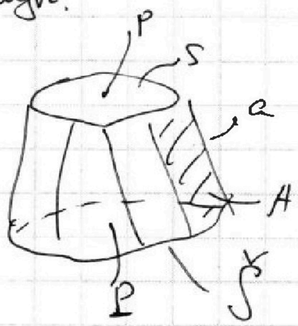
1) Так как пирамида правильная и усечённая ⇒ её основани- два $\underbrace{\text{параллельных}}_{\text{плоскости оснований параллельны.}}$ правильных многоугольника. ~~плоско осн~~

при этом все её ~~гра~~ боковые грани тоже одинаковы

2) Поймем, что ситуация симметрична относительно линии, соединяющей центры оснований.

3) Следовательно центры шаров Ω и ω лежат на этой линии ⇒ $r_\omega = \frac{h}{2}$ – радиус ω, h – высота пирамиды.

4) Введем следующие обозначения



S – меньшее основание

$\check{S}$ – большее основание

a – случ. бок. ребро

A – ~~б~~ случ. боковая грань

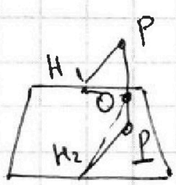
O – центр Ω $\quad$ o – центр ω

~~5)~~ P – центр $\check{S}$ $\quad$ $\underline{P}$ – центр S

5) Поймем, что ~~o~~ O лежит ближе к $\check{S}$, чем к S т.к. ~~они можем~~ расстояние до O отн. середин рёбер, принадлежащих $\check{S}$ или S одинаковы, однако расст. $H_1P < H_2\underline{P}$ ⇒

⇒ $PO > \underline{P}O$ (из Th. Пифагора)

Также я знаю, что $H_1O = H_2O$

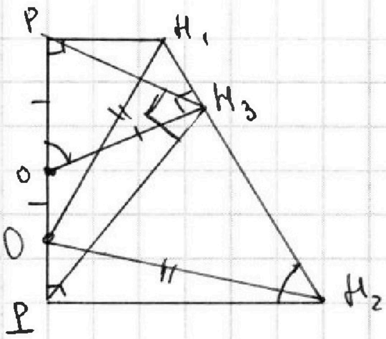


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 3

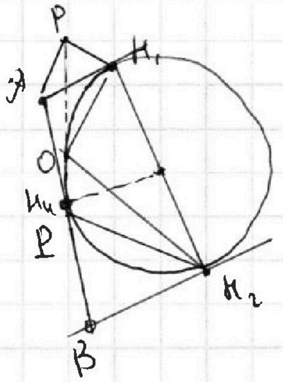
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Нарисуем сечение проведенное через $\underbrace{P;P}_{\text{центры } S \text{ и } S}$ $\underbrace{H_1 \text{ и } H_2}_{\text{середины ребер } S \text{ и } S}$

$PH_1 = H_1H_3$; $H_3H_2 = PH_2$

$PH_2 + PH_1 = H_1H_2$

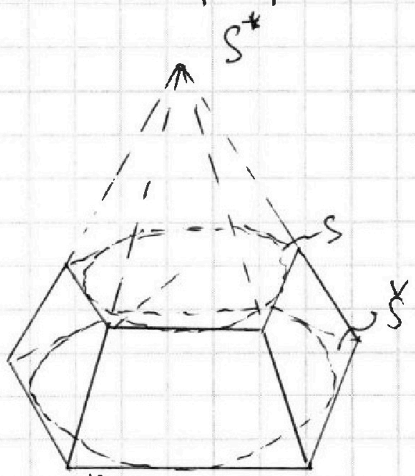


Тогда построим ГМТ H_4 - точек кас. Ω и боковых ребер. это окр-ть.
~~Причем мы сечем ее так, как будто чтоб~~

$PABP$ – плоскость т.к. мы работаем с прав. пирамидой

$H_1A = AH_4$ & $H_2B = H_4B \Rightarrow AB = AH_1 + BH_2$

Пусть есть точка S^* в которой пересекаются продолжение всех ребер:



Тогда попытаемся построить пирамиду и шары удовлетворяющие условию.

Для этого построим произвольный ω касающийся каждой грани полученного "раструба".

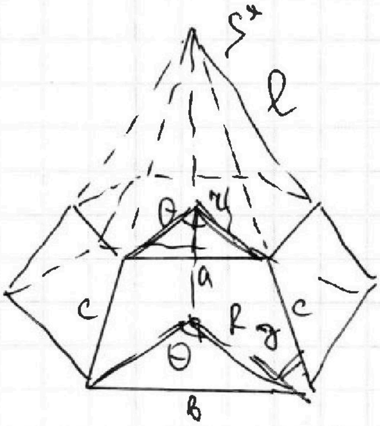
ω единственным образом задает положение S и $\check{S}$ (оснований нашей пирамиды).

~~S и $\check{S}$~~ вписанные окружности в S и $\check{S}$ - сечение плоскостями S и $\check{S}$ Ω по 2м таким сечением Ω задается единственным образом, однако вписанные окружности в боковые ребра тоже сечение Ω и они в свою очередь тоже задают Ω единственным образом

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



$2c = a + b$ (св-во опис. 4х угольника)

$r = l\cos\gamma$

$R = (l+c)\cos\gamma$

$a = 2r\sin\frac{\theta}{2}$

$b = 2R\sin\frac{\theta}{2}$

$2c = 2\sin\frac{\theta}{2}(2l+c)\cos\gamma$

$c = 2l\sin\frac{\theta}{2}\cos\gamma + c\cos\gamma$

$c(1-\cos\gamma) = 2l\cos\gamma\sin\frac{\theta}{2}$

Чего не может быть $\Rightarrow$

$\Rightarrow S^*$ либо не сущ либо она на бесконечности $\Rightarrow$ угол между основанием и

Ответ: $90°$ — угол между бок. ребрами и основанием