



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

- ✓ 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- ✓ 2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
- ✓ 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
- $$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$
- ✓ 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- ✓ 5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
- ✓ 6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- ✓ 7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
Ч ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned}
 A &= \underline{\quad} \quad :1111 \rightarrow :11 \text{ и } :101 : A_0 - (\text{некая цифра}), т.к. \text{ имеет вид } \underset{x=0}{XXX} \\
 B &= \underline{\quad} \quad :101 \rightarrow \text{ имеет вид } \underset{\text{"ноль"} }{X0X}, \text{ тогда очевидно, что } X=2 \\
 C &= \underline{\quad} \quad :101 \rightarrow B : 101 \\
 B \not\equiv 11, \text{ т.к. } B \not\equiv 1 \cdot B : 101 \text{ и } B \not\equiv 1111, \text{ т.к. } B \leq 999 &\rightarrow \text{ Т.к. } A \cdot B \cdot C = k^2 \rightarrow \\
 \rightarrow C : 11 \rightarrow \text{ имеет вид } \underset{\text{"ноль"} }{YY} &\rightarrow C = 33 \\
 B = 202 = 2 \cdot 101 : 3 &\rightarrow A : 3 \\
 C = 33 = 3 \cdot 11 : 2 &\rightarrow A : 2 \\
 A : (2 \cdot 3 \cdot 101 \cdot 11) \rightarrow A : 6666 - \text{ единственный вариант: } A = 6666 &\quad \begin{matrix} 101 - \text{простое} \\ 11 - \text{простое} \end{matrix} \\
 \text{Утог: } A = 6666 ; B = 202 ; C = 33 &
 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
3 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$\frac{1}{xy}(y+x+2) = \frac{1}{(x-1)(y+1)}(y+1+x-1+2)$. Можно сократить, т.к.

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{(x-1)(y+1)} \quad (\text{с учётом } \cancel{\text{области определения переменных}})$$

$$xy = (x-1)(y+1) \quad xy = xy - y + x - 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - y - 1 = 0 \quad \rightarrow x = y + 1 \quad x \neq 1 \rightarrow y \neq 0 \quad \text{очевидно}$$

ПРОВЕРКА:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{y(y+1)} = \frac{1}{y+1} + \frac{1}{y} + \frac{2}{y(y+1)} \quad - \text{ тождество}$$

$$(y+1)^3 = x^3$$

$$y > 0 \\ x = y + 1 > 1$$

$$M = (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) =$$

$$= \underline{y^3} + \underline{3y^2} + \underline{3y} + 1 - \underline{y^3} - \underline{3y^2} - \underline{3y} = (1) \leftarrow \text{единиц-}\right.$$

твейной ответ! (при $x \in (1; +\infty)$)

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
6 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \cdot \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cdot \cos \pi x \quad @$$

$$\cos^2 \pi x + \cos \pi x \cdot \cos \pi y - \sin^2 \pi x - \sin \pi y \cdot \sin \pi x = 0$$

$$\cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y) = 0$$

$$-\cos(2\pi x + \pi) = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos(2\pi x + \pi) = \cos(\pi x + \pi y)$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\pi x + \pi = \pi x + \pi y + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x + \pi = -\pi x - \pi y + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi x = 2\pi n - \pi + \pi y \\ 3\pi x = 2\pi l - \pi - \pi y \end{array} \right. \quad n, l \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = y + 2n - 1 \\ 3x = -y + 2l - 1 \end{array} \right. \quad n, l \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = y + 2n - 1 \\ x = \frac{-y}{3} + \frac{2l-1}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{Oмбем: a)} \quad x \in \{y + 2n - 1; n \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ -\frac{y}{3} + \frac{2l-1}{3}; l \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{5} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} \rightarrow \frac{x}{5} \in [-1; 1]$$

$$x \in [-5; 5]$$

$$\arccos \frac{y}{5} \rightarrow y \in [-4, 4]$$

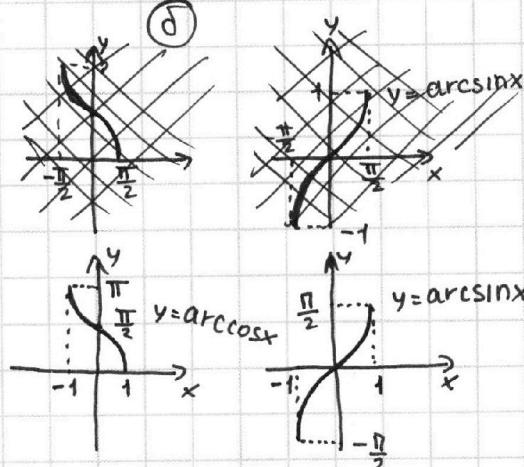
$$① -5 \leq y + 2n - 1 \leq 5$$

$$-4 \leq y \leq 4$$

$$-5 + 2n \leq y + 2n - 1 \leq 3 + 2n$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -5 \leq 3 + 2n \\ -5 + 2n \leq 5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} n \geq -4 \\ n \leq 5 \end{array}$$

...





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

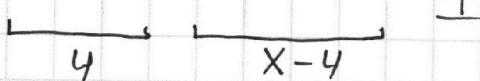
- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input checked="" type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
5 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Есть два возможных исхода для 1^{го} человека: попал на кон. не попал.

$$P(A) = \frac{4}{x}$$



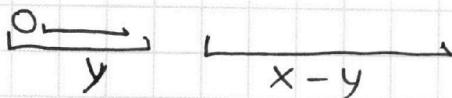
Пусть x - всего один-ков оставивших после 1 билета

$$P(\text{обоих на концерт}) = \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \rightarrow P(\text{один попал})$$

P(1 попал) P(2 попал)

↓ Y - количество свободных мест
если 1 попал на концерт в
конце месяца

II



$$\frac{y}{x} \cdot \frac{y-1}{x-1} = 2,5 \cdot \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1}$$

P(1 попал) P(2 попал)
если 1 попал

Или же $y(y-1) = 30$

$$\begin{cases} y=6 \rightarrow \text{единственная ответ} \\ y<0 \end{cases}$$

Ответ: 6 билетов

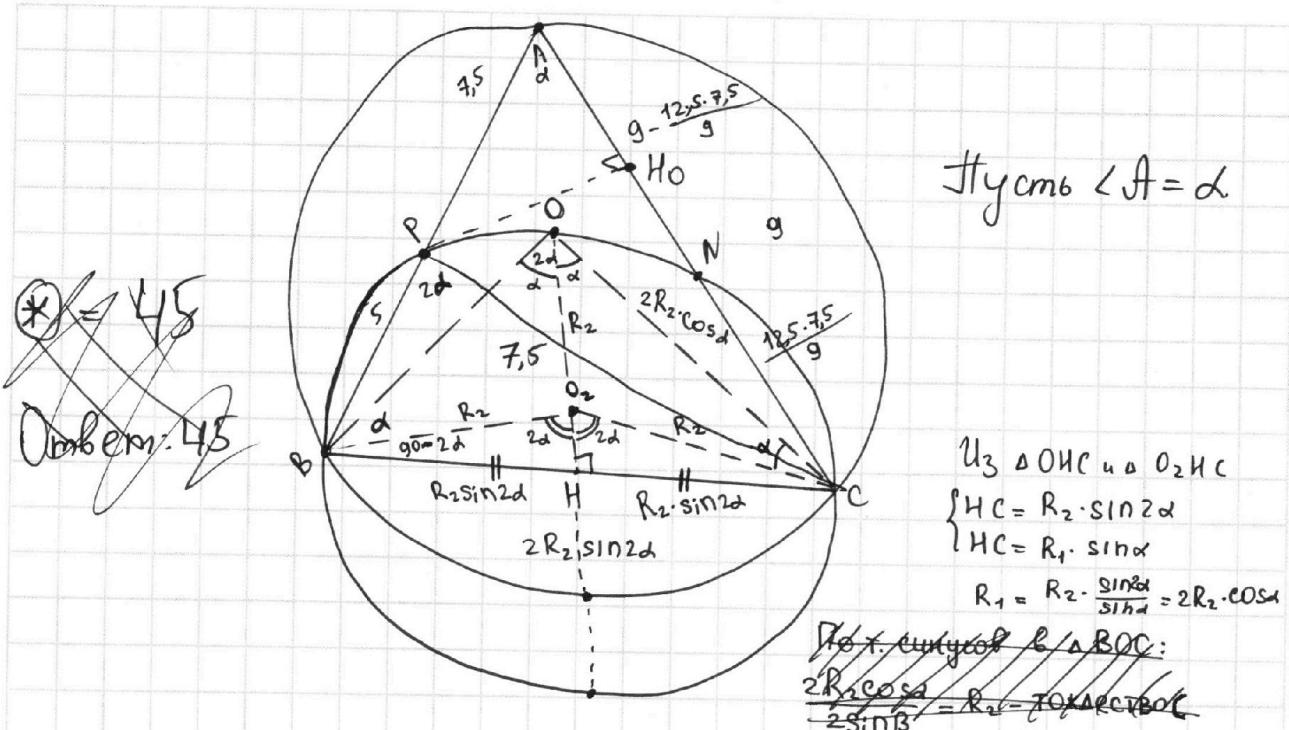


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



По Т/косинусов: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$$12,5^2 + g^2 - 2 \cdot 12,5 \cdot g \cdot \cos \alpha = 4R_2^2 \cdot \sin^2 2\alpha$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 12,5 \cdot g \cdot \sin \alpha$$

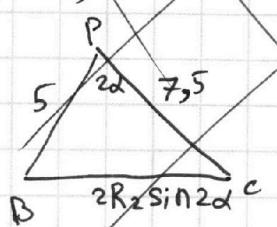
$$2R_2 \cdot \cos \alpha = \frac{12,5 \cdot g \cdot 2R_2 \sin^2 \alpha}{4S}$$

$$8R_2 \sin \alpha \cos \alpha$$

ДОП. ПОСТРОЕНИЕ \ PC:

~~POCB - описаний $\rightarrow \angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$, $\angle BPC$ - внешний угол $\triangle APC \rightarrow \angle PCA = \alpha \rightarrow \triangle APC$ - равнобедренный.~~

~~$P_C = 7,5$~~



~~Hypresia~~

$$2R_2 \cdot \sin 2\alpha = \sqrt{409} = \sqrt{5^2 + 7,5}$$

$$R_1 = \frac{2R_2 \cdot \cos\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{409}}{2 \cdot 4} = \frac{5\sqrt{409}}{8}$$

$$Be = \sqrt{409}$$

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{\sqrt{409} \cdot 12,5 \cdot 9}{4 \cdot 5 \cdot \sqrt{409}} \dots$$

$$\cos \alpha = \frac{A_{H0}}{A_P} =$$

$$= \frac{4,5}{7,5} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2d = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2\cos^2 \alpha - 1$$

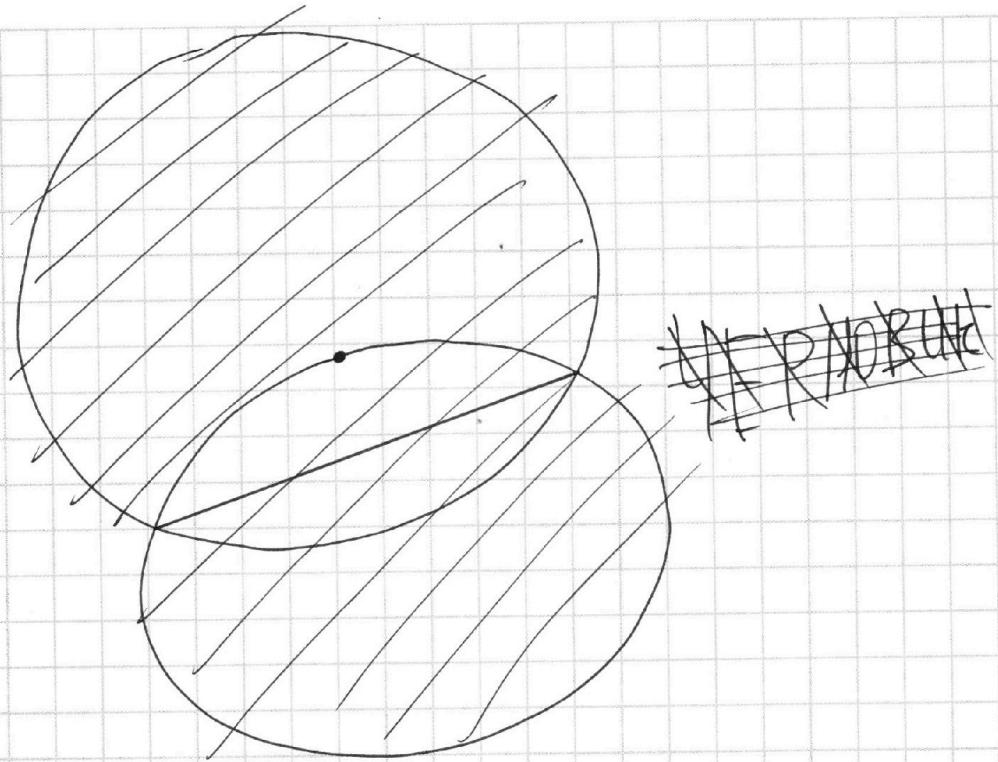
$$= -\frac{7}{25}$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



~~ЧЕРНОВИК~~

Решение:

1) Доп. построение PC → BPOC - вписаный $\rightarrow \angle BPC = 2\alpha \rightarrow$
т.к. $\angle BPC$ - внешний, то $\angle PAC = \alpha \rightarrow \triangle APC$ - равнобедренный
 $AP = PC = 7,5$.

2) Опустим высоту APAC из Т.П $\rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{7,5}$, т.к. $\alpha < 90^\circ$ (усл.).

$$\cos \alpha = \frac{AH_0}{AP} = \frac{4,5}{7,5} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{7}{25}$$

По т. косинусов в $\triangle ABC$:

$$5^2 + 7,5^2 + 2 \cdot 7,5 \cdot \frac{7}{25} = (2R_2 \cdot \frac{24}{25})^2 \cdot 4$$

$$100 + 225 + 300 \cdot \frac{7}{25} = (2R_2 \cdot \frac{24}{25})^2 \cdot 4$$

$$\frac{\sqrt{409}}{4} = 2R_2 \cdot \frac{24}{25}$$

$$R_2 = \frac{\sqrt{409} \cdot 25}{4 \cdot 2 \cdot 24}$$

$$BC = 2R_2 \cdot \sin 2\alpha$$

$$R_1 = 2R_2 \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{409} \cdot 25}{4 \cdot 2 \cdot 24} \cdot \frac{3}{5}$$

$$S_{ABC} = \frac{abc}{4R_1} = \frac{2R_2 \cdot \sin 2\alpha \cdot 12,5 \cdot 9}{4 \cdot 2R_2 \cdot \cos \alpha} = \frac{25 \cdot 9 \cdot \sin 2\alpha}{8 \cos \alpha} = \frac{50 \cdot 9 \cdot \sin \alpha}{8} = \frac{50 \cdot 9 \cdot 4}{8 \cdot 8} =$$

= 45

Отв. бем: 45

$$a = BC = 2R_2 \sin 2\alpha$$

$$b = 12,5$$

$$R_1 = 2R_2 \cos \alpha$$

$$c = 9$$

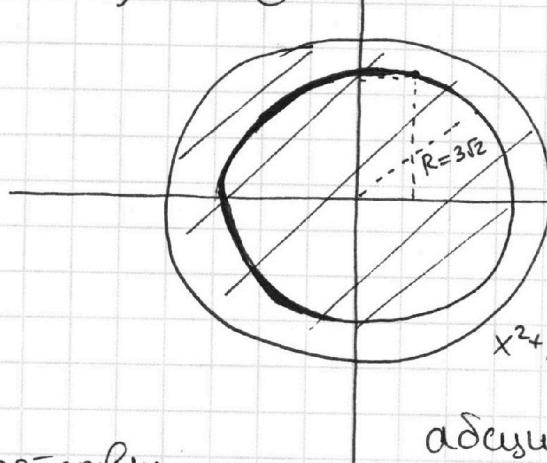
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
9 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} N^{\circ} 6 \quad & \left\{ \begin{array}{l} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{array} \right. \quad \text{①} \\ & \text{②} \end{aligned}$$



$$\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 5$$

Для решения берем точку из 1 четверти.
При выборе из другой четверти:

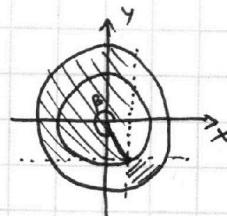
Роды - Роды \Rightarrow не изменяется
А Роды - Роды \Rightarrow не изменяется
 $x^2 + y^2 = 25$ - окружность

$$R = 5$$

модули разностей
абсцисс ; ординат
Пусть $\alpha = 90^\circ - \beta$

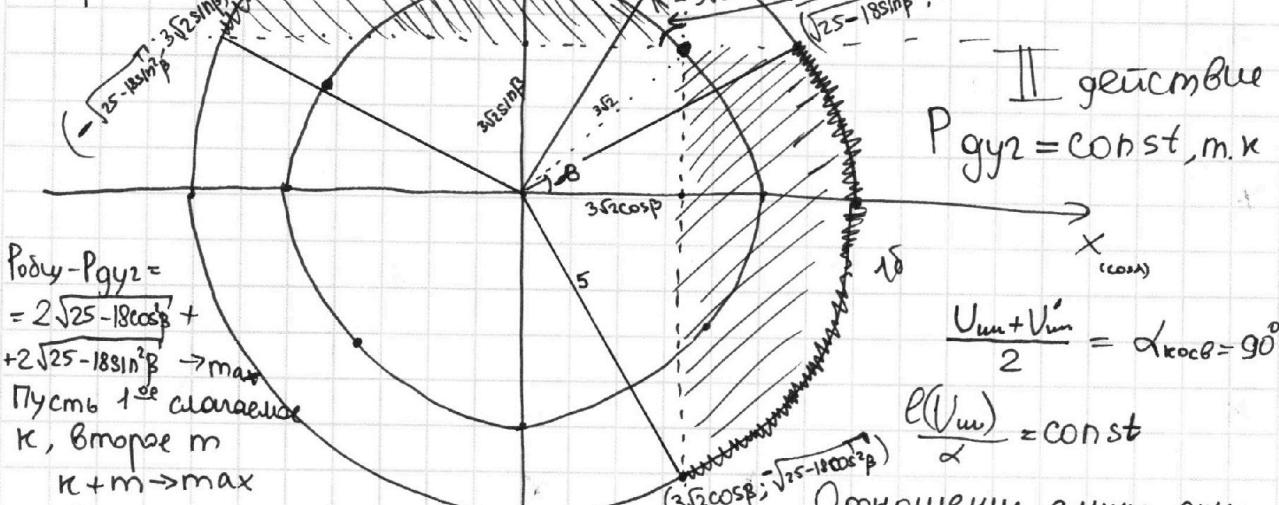
$$\textcircled{1} \quad \textcircled{a} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \leq 3\sqrt{2} \cdot \cos \beta \\ y \geq 3\sqrt{2} \sin \beta \end{array} \right.$$

$$\textcircled{b} \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y < 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 3\sqrt{2} \cos \beta \\ y < 3\sqrt{2} \sin \beta \end{array} \right.$$



III действие

$$\frac{25 - 18\cos^2\beta}{3\sqrt{2}\cos\beta} = \frac{5\sqrt{2}(8\cos^2\beta - 18)}{3\sqrt{2}\cos\beta}$$



Роды - Роды =

$$= 2\sqrt{25 - 18\cos^2\beta} +$$

$$+ 2\sqrt{25 - 18\sin^2\beta} \rightarrow \max$$

Пусть 1st слагаемое

K, второе m

$$K + m \rightarrow \max$$

$$k^2 + m^2 = 128$$

$$\frac{k+m}{2} \leq \sqrt{\frac{k^2+m^2}{2}} \rightarrow \frac{k+m}{2} \leq 8 \quad K + m \leq 16$$

$$\max(K+m) = 16 \text{ при } k = m = 8$$

$$\text{ПУ } \sin^2\beta = \cos^2\beta \quad \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

II действие
Роды = const, т.к

$$\frac{U_{\min} + U_{\max}}{2} = \alpha_{\text{косинус}} = 90^\circ$$

$$\frac{l(U_{\min})}{\alpha} = \text{const}$$

отношение длины дуги
на угол, стягивающий её, постоян-
но для одной окружности, т.к
 $l(U_{\min}) = \frac{2\pi R \cdot \text{центр.угол}(\alpha)}{360^\circ} \neq \text{const}$

Ответ: $5\pi + 16$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}$

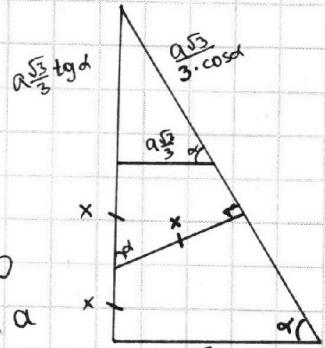
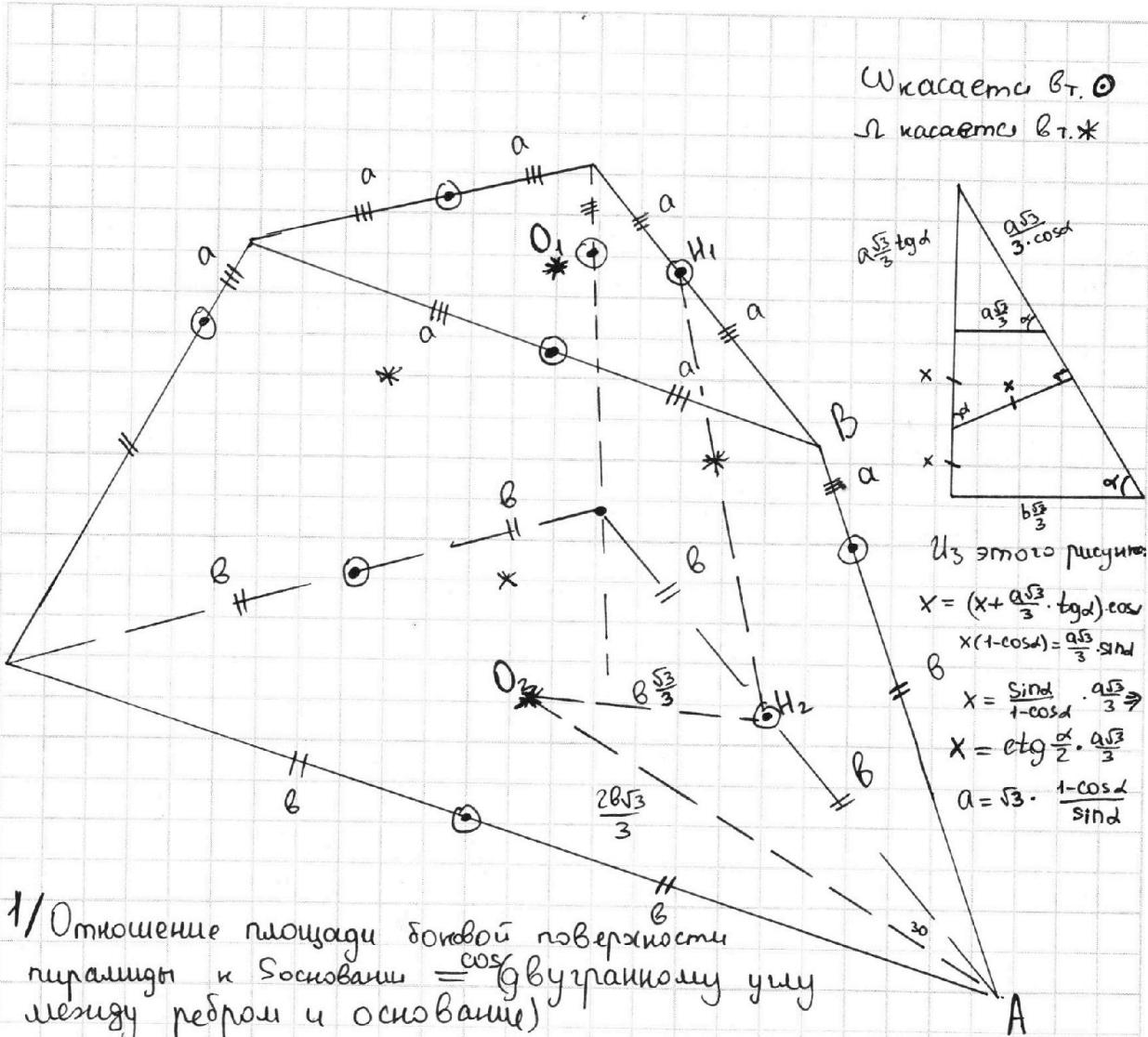
$$\sum l(U_{\min}) = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 5 = 5\pi$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
7 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Из этого рисунка:

$$x = \left(x + \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{tg}\alpha\right) \cos$$

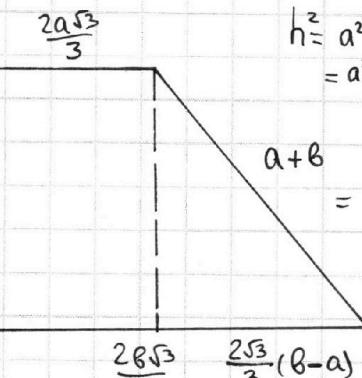
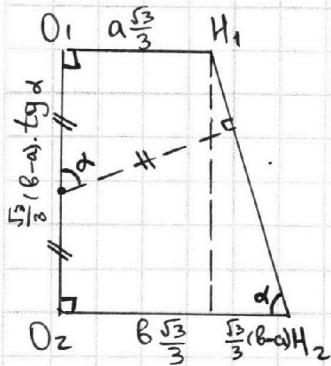
$$x(1 - \cos\alpha) = \frac{a\sqrt{3}}{3} \sin\alpha$$

$$x = \frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$x = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = \sqrt{3} \cdot \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

1/ Отношение площади боковой поверхности пирамиды к основанию = $\frac{\cos\alpha}{\sqrt{3}}$ (уграному уму между ребром и основанием)



$$h^2 = a^2 + b^2 + 2ab - \frac{4}{3}(a^2 - 2ab + b^2) =$$

$$= a^2 + b^2 + 2ab - \frac{4}{3}a^2 + \frac{8ab}{3} - \frac{4}{3}b^2 =$$

$$= \frac{14ab}{3} - \frac{1}{3}(a^2 + b^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(14ab - \frac{4}{3}a^2 - b^2)$$

$$= \frac{1}{3}(b-a)^2 \cdot 4g^2 \alpha$$

$$\frac{b\sqrt{3}}{3} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg}\alpha + 2 \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{ctg}\alpha$$

$$b = (a \operatorname{tg}\alpha + 2a \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}) \operatorname{ctg}\alpha = a + 2a \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = a + 2a \cdot \frac{\cos\alpha}{1 - \cos\alpha}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
8 из 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$14ab - a^2 - b^2 = (a^2 + b^2 - 2ab) \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$$

~~$$14a \cdot a \left(1 + 2 \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right) = a^2$$~~

$$b = a + 2a \cdot \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

~~$$b = a(1 + 2 \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha})$$~~

$$b = a \underbrace{\left(1 + 2 \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}\right)}_{\varphi}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} + \frac{2 \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} &= \\ &= \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \end{aligned}$$

$$14a^2 \varphi - a^2 - b^2 \varphi^2 = (a^2 + a^2 \varphi^2 - 2a^2 \varphi) \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$14\varphi - 1 - \varphi^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha + \varphi^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - 2\varphi \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{14\varphi - 1 - \varphi^2}{1 + \varphi^2 - 2\varphi} =$$

$$= \frac{14 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} - 1 - \frac{(1 + \cos \alpha)^2}{(1 - \cos \alpha)^2} \cdot \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha)^2}}{14 \cdot \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{(1 + \cos \alpha)^2 - 1}{(1 - \cos \alpha)^2} \cdot \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{(1 + \cos \alpha)^2}} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\sqrt{\cos \alpha} = c \quad \sin \alpha = s$$

$$\frac{14(1+c)(1-c) - (1-c)^2 - (1+c)^2}{(1+c - 1-c)^2} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$\frac{14 \cdot s^2 - 1 + 2c - c^2 - 1 - 2c - c^2}{4} = \frac{s^2}{\cancel{4}}$$

$$14s^2 - 2c^2 - 2 = 4s^2$$

$$10s^2 - 2c^2 - 2 = 0$$

$$5s^2 - c^2 - 1 = 0$$

$$5s^2 - 1 + s^2 - 1 = 0$$

$$6s^2 = 2$$

$$s^2 = \frac{1}{3} \quad c^2 = 1 - s^2 = \frac{2}{3}$$

$$s = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{S_{\text{ноб}}}{S_{\text{окн}}} = \frac{1}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Umform: } \sqrt{\frac{3}{2}}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
 - 6
 - 7

СТРАНИЦА
10 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
11 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
12 ИЗ 12

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\cos(2\pi x + \pi) + \cos \sqrt{(12,5)^2 + g^2 - 2 \cdot 12,5 \cdot g \cdot \cos \alpha} = 2R \sin \alpha$$

$$= 2 \cdot \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0$$

$$\frac{\cancel{2} \sin 2d \cdot 12,5 \cdot 9}{4 \cdot \cancel{2} \cos d} = \frac{2 \cancel{8} \cdot 12,5 \cdot 9}{4 \cancel{4}}$$

$$R \cdot (x+R) = 3\pi x + \pi y = \pi + 2\pi c$$

$$\frac{x}{xs+r} = \frac{c}{r}$$

$$\frac{81.4}{36} - \frac{25 \cdot 15}{94}$$

1928-325

7.5

104

1

$$R_i \cos^2 \theta \cdot \cos^2 \theta = R_i \cos^2 \theta$$

$$2 R_i \cos \theta = 2 R_i \cos \theta$$

$$\cos^2 \theta = \frac{25x^2 + 125}{25x^2 + 50x + 25}$$

$$\cos S = \frac{PQ}{PS}$$

\mathbb{C}^n

$$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$$

25
18

625 + 324 - 30 . 18.0505
28.050 . 125.9

949-50.18.003d

~~949-3018~~