



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha) (y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = \overline{aaaa} = 10^3a + 10^2a + 10a + a = 1111 \cdot a, \text{ где } a - \text{цифра от } 1 \text{ до } 9.$$

Заметим, что $A:1111$ ~~нельзя~~, но $1111 = 11 \cdot 101 \Rightarrow A:101$

$A \cdot B \cdot C = x^2$, т.к. произведение чисел A, B и C равно квадрату нек. числа, то все простые числа должны входить в число x в чётных степенях. ~~Тогда~~ $x^2 = B \cdot C \cdot 11 \cdot 101 \cdot a$

Раз у нас есть простое число 101 , то должно быть ещё одно простое 101 в произведении, т.е. либо $a:101$, либо $B:101$, либо $C:101$, но a - цифра, а C - двузначное число, а ~~значит~~ значит именно $B:101$. B - трёхзначное число, а значит $B = 101, 202, 303, 404, \dots, 808, 909$. Из условия необходимо, чтобы B имело у себя цифру 2 , а значит подходит только $B = 202 = 2 \cdot 101$. Теперь $x^2 = 11 \cdot 101 \cdot a \cdot 2 \cdot 101 \cdot C =$

$= (aC \cdot 2 \cdot 11) \cdot 101^2$. Видно, что также $a:11$ или $C:11$, но a - цифра $\Rightarrow C:11$. С учётом условия подходит только $C = 33$.

$$x^2 = (a \cdot 2 \cdot 3) \cdot 11^2 \cdot 101^2. \text{ Аналогично предыдущим рассуждениям}$$

$a:2$ и $a:3 \Rightarrow$ т.к. a - цифра, то $a = 6$

Итого единственная тройка $(A; B; C) = (6666; 202; 33)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)} \quad \begin{cases} x, y > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right) + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) + 2\left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-1)(y+1)}\right) = 0$$

$$\frac{x-1-x}{x(x-1)} + \frac{y+1-y}{y(y+1)} + 2 \cdot \frac{xy+x-y-1-xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{1}{y(y+1)} - \frac{1}{x(x-1)} + 2 \cdot \frac{x-y-1}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{x^2-x-y^2-y+2x-2y-2}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$x^2+x-y^2-3y-2=0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(y+\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$(x-y-1)(x+y+2) = 0$$

Т.к. $x > 0$ и $y > 0$, то $x+y+2 > 0 \neq 0 \Rightarrow x-y-1=0$

Мы знаем формулу $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

Подставим $a=x, b=-y, c=-1$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = x^3 + (-y)^3 - 3 \cdot x(-y)(-1) + (-1)^3 + 1 =$$

$$= (x-y-1)(x^2+y^2+xy-y+x) + 1 = 1 \Rightarrow \underline{M=1}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x = -(\cos \pi x \cos \pi y - \sin \pi x \sin \pi y)$$

$$\cos(2\pi x) = -\cos(\pi x + \pi y)$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi - \pi x - \pi y)$$

$$\begin{cases} 2\pi x = \pi - \pi x - \pi y + 2\pi k; k \in \mathbb{Z} \\ 2\pi x = -\pi + \pi x + \pi y + 2\pi n; n \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 1 - x - y + 2k; k \in \mathbb{Z} \\ 2x = -1 + x + y + 2n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3x + 2k; k \in \mathbb{Z} \\ y = 1 + x - 2n; n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

а y находится из совокупности

Итого, ~~каждое~~ x -любое действ. число,

~~наша задача~~ ~~удовлетворяющие~~ ~~совокупности~~

$$b) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

~~арксинус~~ Арксинус и арккосинус принимают в качестве аргумента числа от -1 до $1 \Rightarrow -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$ и $-1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$ и $-4 \leq y \leq 4$.

Заметим, что по опр. арксинуса $\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}$, а

$$\arccos \frac{y}{4} \leq \pi \Rightarrow \forall x \text{ и } y \quad \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

Получается, что нас устраивают все такие подходящие



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

под ур-ие ~~нужно~~ целые пары, что одновременно не выполняются
условие:
$$\begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2} & \frac{x}{5} = 1 & | x = 5 \\ \arccos \frac{y}{4} = \pi & \frac{y}{4} = -1 & | y = -4 \end{cases}$$

Заметим, что при $x = \{-5; -3; -1; 1; 3\}$ ~~и~~ y пробегает все чётные числа в обоих решениях, т.к. чётность числа $(1-3x)$ равна чётности числа $(1+x) \forall x$, а прибавили мы какое-то целое кон-во двоек (или убавили).

Итак, если $x = \{-5; -3; -1; 1; 3\}$, то для каждого x из этого ^{мн-ва} подходит $y = \{-4; -2; 0; 2; 4\}$ Таких пар $5 \cdot 5 = 25$

Если $x \in \{-4; -2; 0; 2; 4\}$, то аналогично y пробегает все неч. зн-ия, а значит нам подходит ~~и~~ $\neq$ все $y \in \{-3; -1; 1; 3\}$ Таких пар $5 \cdot 4 = 20$

Теперь рассмотрим какие ~~нужно~~ пары нам подходят, если $x = 5$. В данном случае $y = -14 + 2k$ или $6 - 2k$; $k, n \in \mathbb{Z}$, т.е. все чётные числа, а значит подходит пар: $(5; -2); (5; 0); (5; 2); (5; 4)$. Таких ещё 4 штуки.

Итого нам подходит $25 + 20 + 4 = 49$ пар целых чисел x и y под оба условия (ур-ие и пер-ва).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В начале месяца 4 билета. Посчитаем вероятность того, что Пете и Васе попадут вдвоем на концерт в начале месяца. Благоприятные исходы ~~из тех где~~ это те, где Вася и Пете на одном концерте. Тогда пусть мы дадим им уже по билету и выбираем среди оставшихся $(n-2)$ одиннадцатиклассников кому дать еще 2 билета. Таких вариантов C_{n-2}^2 , где n - кол-во всех одиннадцатиклассников. Но помем, что всего вариантов ~~да~~ выдать 4 билета и учтем $\uparrow$ это C_n^4 . Итог вероятности в начале месяца ~~это~~ $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} =$

$$= \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot \frac{24}{n(n-1)(n-2)(n-3)} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Аналогично посчитаем вероятность в конце месяца.

Пусть в конце месяца стало x билетов. Тогда вероятность попасть Пете и Васе на один концерт равна $\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_n^x} =$

$$= \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} \cdot \frac{x!(n-x)!}{n!} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$x(x-1) = 30$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x = -5 \text{ - не подходит} \end{cases}$$

По условию $\frac{12}{n(n-1)} \cdot 2,5 = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$ То есть в конце месяца было 6 билетов.

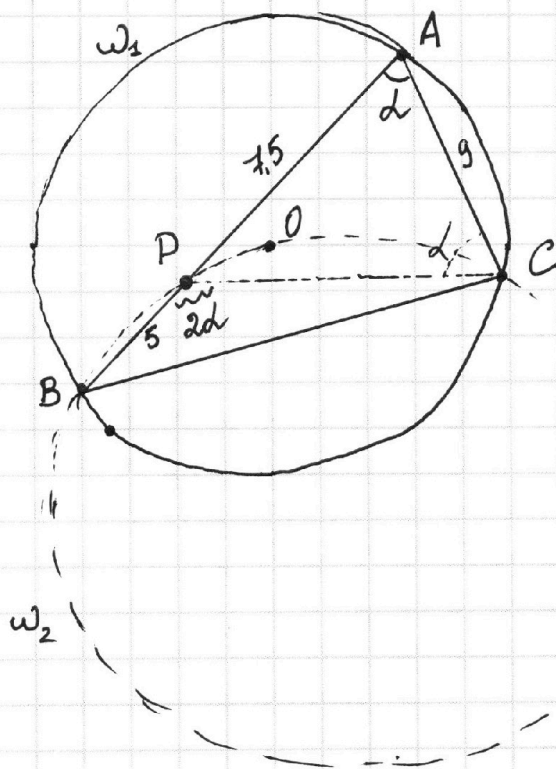


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$AC=9; AP=7.5; BP=5$$

Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда т.к.

O - центр опис. окр. $\triangle ABC$, то

$$\angle BOC = 2\alpha.$$

$BPOC$ - впис. четырёх. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \angle BOC = \angle BPC = 2\alpha.$$

$\angle BPC$ - внешний угол

$$\triangle APC \Rightarrow \angle PAC + \angle ACP = \angle BPC,$$

$$\text{т.е. } \angle ACP = \alpha.$$

Тогда получается, что $\angle PAC = \angle ACP = \alpha \Rightarrow \triangle APC$ - р/б, а

$$AP = PC = 7.5. \text{ И также } \angle APC = 180^\circ - 2\alpha.$$

Из теоремы синусов для $\triangle APC$ имеем: $\frac{7.5}{\sin \alpha} = \frac{9}{\sin(180^\circ - 2\alpha)}$

$$\frac{15}{2 \sin \alpha} = \frac{9}{\sin 2\alpha} \quad \frac{\sin 2\alpha}{2 \sin \alpha} = \frac{9}{15} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

~~тогда~~ ~~получается~~ ~~что~~ ~~sin alpha > 0~~ ~~т.к.~~ ~~alpha - угол~~
 $\triangle$ -ка, а значит $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ из ОТТ.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} = 45$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$(1) \quad \begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \end{cases} \quad \text{или}$$

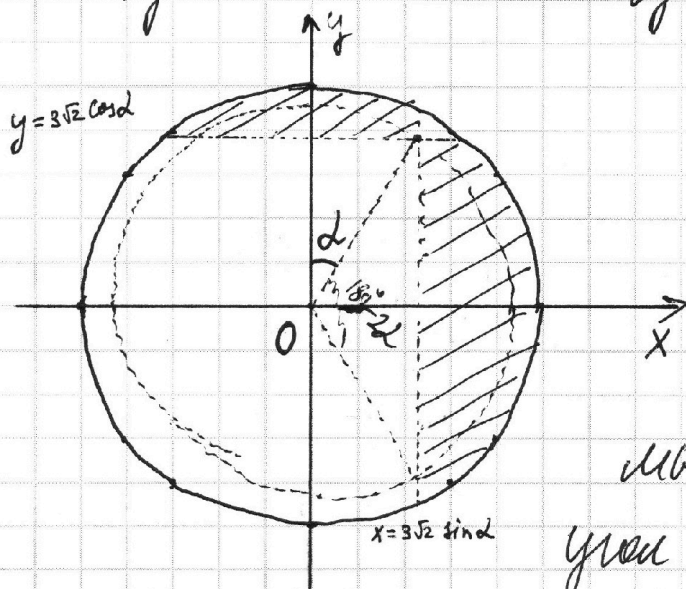
$$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$



Заметим, что точка с координатами $A(3\sqrt{2} \sin \alpha; 3\sqrt{2} \cos \alpha)$ — это такая точка, что

мы отложим от оси Oy

угол α и отметим пересече-

ние ~~этой точки с окружностью радиуса 5~~ ~~этой точки с окружностью радиуса 5~~

луча OA с окр. радиусом $3\sqrt{2}$.

Теперь пусть координата ^{по x} некоторой точки A это $3\sqrt{2} \sin \alpha$.

Найдем координаты ~~этой точки~~ ~~этой точки~~ точки с такой же абсциссой, но меньшей на окружности рад. 5

$$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha \quad x^2 + y^2 = 25 \quad y^2 = 25 - 18 \sin^2 \alpha$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y^2 = 25 - 18 + 18 \cos^2 L = 7 + 18 \cos^2 L$$

Значит с координатой x подходит 2 точки на окр.

С ординатами $\pm \sqrt{7 + 18 \cos^2 L}$. А значит часть ^{периметра} "внутри" нашей области это $2 \cdot \sqrt{7 + 18 \cos^2 L}$.

Аналогично, если мы посчитаем точки на окр.

с одинаковой ординатой, то получим расстояние $2 \cdot \sqrt{7 + 18 \sin^2 L}$

Итого периметр фигуры $\Phi(L)$ складывается из двух отрезков длины $2 \cdot \sqrt{7 + 18 \sin^2 L}$ и $2 \cdot \sqrt{7 + 18 \cos^2 L}$, и двух частей дуг окр. с радиусом 5.

~~Угол, опирающийся на одну дугу это $180^\circ - 2L$, а на другую это $2L$. То есть в сумме они дают дугу окр. с углом 180° , а это половина длины всей окр., т.е. $2\pi \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 5\pi$~~

~~$$\text{Итого } P = 2 \cdot \sqrt{7 + 18 \sin^2 L} + 2 \cdot \sqrt{7 + 18 \cos^2 L} + 5\pi$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

A B C

$$A = \overline{aaaa} = 1111 \cdot a$$

$$B =$$

$$C = 3C$$

$$A \cdot B \cdot C = x^2$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \times 11 \\ \hline 1111 \end{array}$$

$$A = \frac{1111}{101} a$$

где $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$

$$A = 1111,2222, \dots, 8888,9999$$

$$\begin{array}{r} 1111 \overline{) 1111} \\ \underline{11} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101 \overline{) 101} \\ \underline{101} \\ 0 \end{array}$$

$$1) A = a \cdot 11 \cdot 101$$

$$C = 30 + C$$

$$A \cdot C \cdot B = 11 \cdot 101 a (30 + C) \cdot B =$$

$\approx$

$$2, 3, 5, 7 \times B: 101$$

$$101, \boxed{202}, 303, 404, 505, \dots, 909$$

$$B = 202$$

$$\cancel{2}, \cancel{3}, \cancel{5}, \cancel{7}$$

$$101 \overline{) 7}$$

$$\begin{array}{r} 101 \overline{) 7} \\ \underline{7} \\ 0 \end{array}$$

$$7 \cdot 10 = 70$$

$$A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot C \cdot 2 \cdot 101 = (aC \cdot 11 \cdot 2) \cdot 101^2 =$$

$$\Rightarrow \boxed{C: 11}$$

$$11 \ 22 \ \boxed{33} \ 44 \dots 99$$

$$\boxed{C = 33}$$

$$= a \cdot 33 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 101^2$$

$$= a \cdot 3 \cdot 2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 6}$$

$$A = 6666 \quad C = 33$$

$$B = 202$$

$$\cancel{6} \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{101} \cdot \cancel{33} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{101}$$

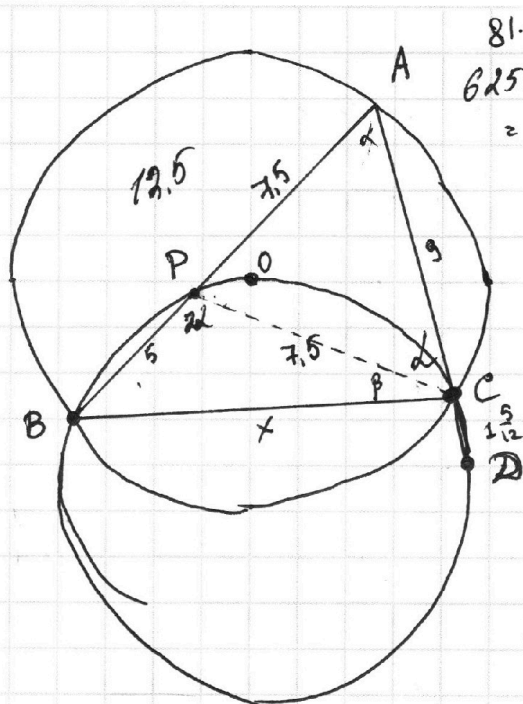


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$81 \cdot 4 = 320 + 4 \quad \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha =$$

$$625 + 320 = 949 \quad 120^\circ - 2\alpha - \beta$$

$$120^\circ - \alpha - 180^\circ + 2\alpha + \beta = 3$$

$$\frac{15}{2} + \frac{50}{2} = \frac{25}{2} = 2 \quad \frac{15}{2}$$

$$x^2 = 81 + \frac{625}{4} - 2 \cdot 25 \cdot 9 \cdot \cos \alpha$$

$$x^2 = 25 + \frac{225}{4} - 2 \cdot 15 \cdot 5 \cdot \cos 2\alpha$$

$$x^2 = \frac{325}{4} - 75(4 \cos^2 \alpha - 1)$$

$$x^2 = \frac{949}{4} - 225 \cos 2\alpha$$

$$225 \cos 2\alpha = \frac{949}{4} - x^2$$

$$75 \cdot 4 =$$

$$75 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 300$$

$$t = x^2 \quad x^2 = \frac{325}{4} - 150 \cos^2 \alpha + 75 = \frac{625}{4} - 150 \left(\left(\frac{949}{4} - x^2 \right) \cdot \frac{1}{225} \right)^2$$

$$4t = 625 - 4 \cdot 150 \left(\frac{949}{4 \cdot 225} - \frac{t}{225} \right)^2$$

$$4 \cdot 225^2 - 300 \cdot 949$$

$$4t = 625 - 4 \cdot 150 \cdot \left(\frac{949^2}{4^2 \cdot 225^2} - 2 \cdot \frac{949}{4 \cdot 225^2} \cdot t + \frac{t^2}{225^2} \right)$$

$$4 \cdot 225^2 t = 625 \cdot 225^2 - 4 \cdot 150 \left(\frac{949^2}{4^2} - \frac{949}{2} \cdot t + \frac{t^2}{225} \right)$$

$$600 t^2 + 4 \cdot 225^2 t - 4 \cdot 150 \cdot \frac{949}{2} t - 625 \cdot 225^2 - \frac{75}{2} \cdot \frac{949^2}{2} = 0$$

$$600 t^2 + 4(225^2 - 75 \cdot 949) t -$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\Phi(2)$

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin 2)(y - 3\sqrt{2} \cos 2) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3\sqrt{2} \sin 2 \leq 0 \\ y - 3\sqrt{2} \cos 2 \geq 0 \end{cases}$$

или

$\sin 2$

$$x \leq 3\sqrt{2} \sin 2$$

$$y \geq 3\sqrt{2} \cos 2$$

$$x \leq 3\sqrt{2} \sin 2$$

$$-y \leq -3\sqrt{2} \cos 2$$

$$x - y \leq 3\sqrt{2}(\sin 2 - \cos 2)$$

$$4 \leq 3\sqrt{2} \sin 2$$

$$\sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{18}$$

$$\approx 4 \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} x \leq 3\sqrt{2} \sin 2 \\ y \geq 3\sqrt{2} \cos 2 \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} x \geq 3\sqrt{2} \sin 2 \\ y \leq 3\sqrt{2} \cos 2 \end{cases}$$

$$9 \cdot 2 \sin^2 2 + y^2 \leq 25$$

$$y^2 = 25 - 18(1 - \cos^2 2)$$

$$y^2 = 25 - 18 + 18 \cos^2 2$$

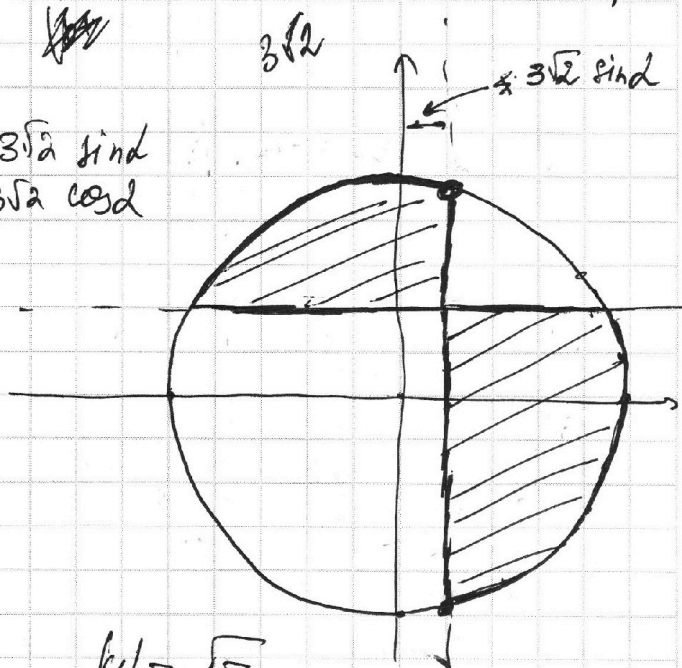
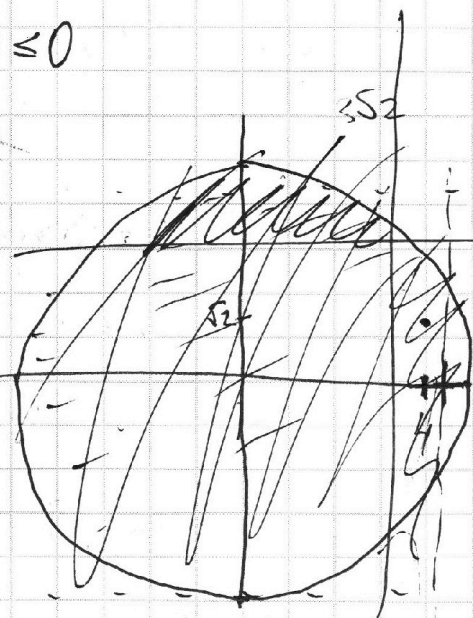
$$y^2 = 7 + 18 \cos^2 2$$

$$x^2 + 18 \cos^2 2 = 25$$

$$x^2 = 25 - 18 + 18 \sin^2 2$$

$$|y| \geq \sqrt{7}$$

$$x^2 = 7 + 18 \sin^2 2$$



$$2 \sqrt{7}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$4(225^2 - 75 \cdot 945)$$

~~80625~~

$$\frac{15}{\sin \alpha} = \frac{9}{\sin 2\alpha}$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{9 \cdot 2}{15}$$

$$2 \cos \alpha = \frac{18}{15}$$

$$\cos \alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

$$\sin \alpha = 1 - \frac{9}{15} = \frac{6}{15}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$(\sin a + \sin b) \cdot \sin a = (\cos a + \cos b) \cos a$$

$$2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \cdot \sin a = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} \cdot \cos a$$

$$1) \cos \frac{a-b}{2} = 0$$

$$\sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin a = \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos a$$

$$\operatorname{tg} \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{tg} a = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \quad \boxed{3x + y = 1}$$

$$\frac{a+b}{2} + a = \frac{\pi}{2}$$

$$a+b+2a=\pi \quad 3a+b=\pi \quad y=1-3x$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ \times 225 \\ \hline 1125 \\ + 450 \\ \hline 4500 \\ + 50625 \\ \hline \end{array}$$

$$15 \cdot 15 = 225$$

$$(200+25)^2 = 40000 + 200 \cdot 50 +$$

$$+ 625 =$$

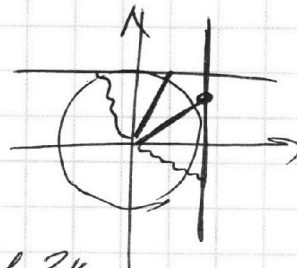
$$\sin \alpha = 1 - \frac{9}{15} = \frac{6}{15}$$

$$\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$

$$\cos \frac{a+b}{2} = 0$$

$$\sin a = 0$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

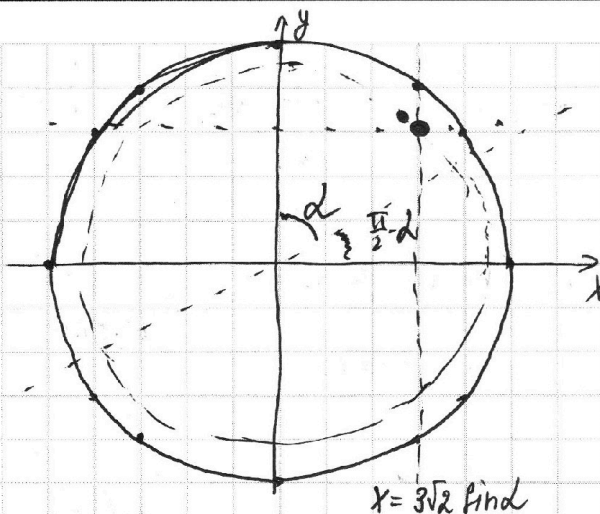
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x^2 + y^2 \leq 25$$

$$\frac{x}{y} = \operatorname{tg} \alpha$$

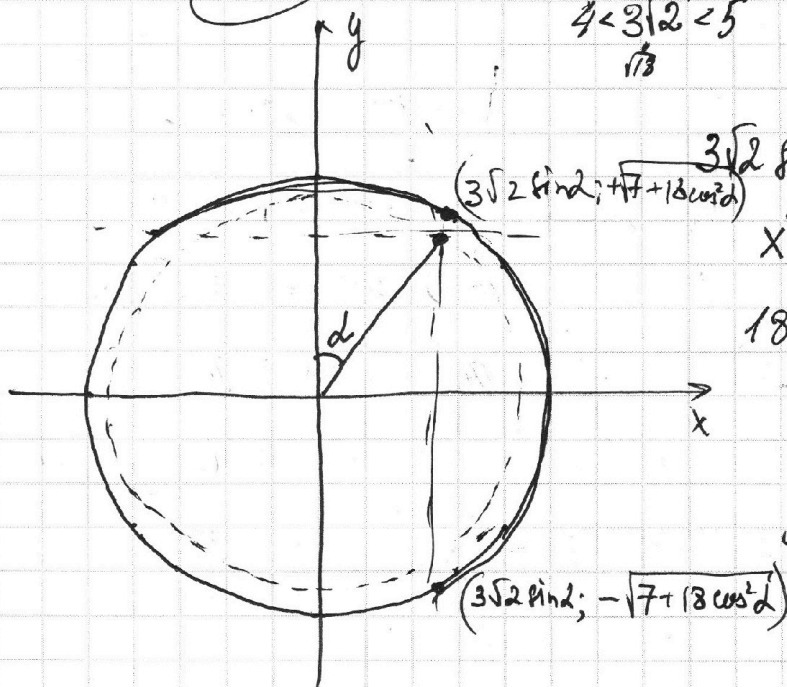
$$y = \operatorname{ctg} \alpha \cdot x$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$$



$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad 18 \sin^2 \alpha + 18 \cos^2 \alpha = 18$$

$$4 < 3\sqrt{2} < 5$$



$$3\sqrt{2} \sin \alpha; 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$18 \sin^2 \alpha + y^2 = 25$$

$$18 - 18 \cos^2 \alpha + y^2 = 25$$

$$y^2 = 7 + 18 \cos^2 \alpha$$

$$x^2 + 18 \cos^2 \alpha = 25$$

$$x^2 = 25 - 18 + 18 \sin^2 \alpha$$

$$2\sqrt{7+18 \cos^2 \alpha} + 2\sqrt{7+18 \sin^2 \alpha}$$

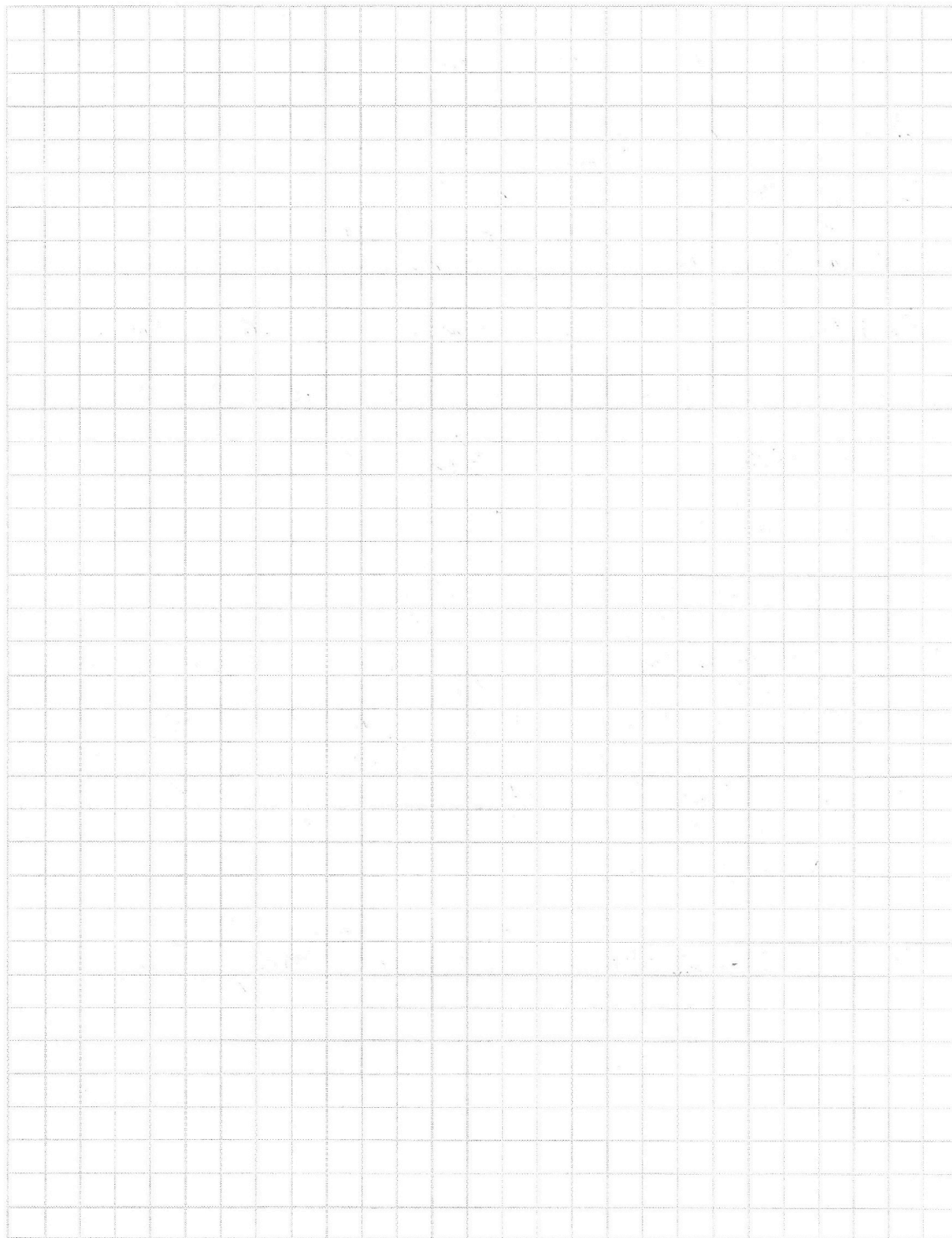


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$x=25$~~ ~~-4~~ ~~-3~~ ~~-2~~ ~~-1~~ ~~0~~ ~~1~~ ~~2~~ ~~3~~ ~~4~~

$x=5$

$y=1-3x+2k$

$y=1+x-2n$

~~y~~ $x=-4$

$y=1+2+2k$

$y=-14+2k$

$y=6-2n$

$-4 \leq y \leq 4$

$13+2k$

$1-3x = 1+x$
 2

~~$y=1+2k$~~

~~$x=2$~~

$y=16+2k$

$y=-4+2n$

$y=13+2k$

$y=10+2k$

$y=-3+2n$

$-4 -2 0 2 4$

$y=-2$

11 чисел

5 чисел
6 чисел

>4 чисел

y : 9 чисел

$x > 4$

5 чисел

4 чисел

~~$x(-1) = \frac{2 \cdot 2}{5} \frac{21}{5}$~~

$5 \cdot 4 + 6 \cdot 5 - 1 = 20 + 30 - 1 = 49$

4 числа

x чисел

49

n чисел n $\frac{n}{2}$ $\frac{n-2}{2}$

n $\frac{C_{n-2}^{x-2}}{C_{n-2}^{x-2}} \cdot \frac{C_n^x}{C_n^x}$

$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^2} \cdot 2,5 =$

$n-2-x+2$

$\frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot 2,5 = \frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!} \cdot \frac{n!}{x!(n-x)!}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{(n-2)(n-3)}{n(n-1)} \cdot \frac{5}{2} = \frac{(n-2)!}{(x-2)!} \cdot \frac{x!}{n!} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$(n-2)(n-3) \cdot 5 = 2x(x-1)$$

$$x > 4$$

$$1) x = 5 \pm$$

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362880$$

$$10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

$$2 \pm (5 \pm 1)$$

$$1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm 5$$

$$2) x = 5k + 1$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$x^2 - x = 30$$

$$x^2 - x - 30 = 0$$

$$\frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{x(x-1)}{n(n-1)}$$

$$12 \cdot \frac{5}{2} = 30$$

$$x = 6$$

$$(x-6)(x+5)$$

$$x(x-1) = 5 \cdot 6$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$x, y > 0 \quad K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$M = x^3 y^3 - 3xy$$

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) + 2\left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{(x-1)(y+1)}\right) = 0$$

$$\frac{x-1-x}{x(x-1)} + \frac{y+1-y}{y(y+1)} + 2 \frac{(x-1)(y+1)-xy}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$\frac{1}{y(y+1)} - \frac{1}{x(x-1)} + 2 \cdot \frac{x-y-1}{xy(x-1)(y+1)} = 0 \quad (x+1)(y+1) = xy + x + y + 1$$

$$\frac{x^2 - x - y^2 - y + 2x - 2y - 2}{xy(x-1)(y+1)} = 0$$

$$(2x+1)(y+1) = 2xy + 2x + 2y + 2$$

$$x \neq 0 \quad x \neq 1 \\ y \neq 0$$

$$\frac{x^2 + x - y^2 - y}{xy(x-1)(x+1)} = 0$$

$$\frac{(x+\frac{1}{2}-y-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2}+y+\frac{1}{2})}{(x-y)(x+y+1)} = 2$$

$$x^2 + x = y^2 + y + 2$$

$$\boxed{x > y} \quad \frac{4}{(x-y)^2}$$

$$\frac{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{(x-y)^2} = \frac{(y+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}}{(x-y)^2} + 2 - \frac{9}{4}$$

$$(x+y+1)^2 = x^2 + y^2 + 1 + 2x + 2y + 2xy$$

$$x^2 + y^2 + xy = \frac{4}{(x-y)^2} - 2x - 2y - 1 - xy$$

$$M = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy$$

$$(x+\frac{1}{2}-y-\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2}+y+\frac{3}{2}) = 0$$

$$(x-y)\left(\frac{4}{(x-y)^2} - 2x - 2y - 1 - xy\right) - 3xy \quad (x-y-1)(x+y+2) = 0$$

$$(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = (y+\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 2 - \frac{9}{4}$$

$$(x+\frac{1}{2})^2 - (y+\frac{3}{2})^2 = 0$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$~~

~~$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c)$$~~

~~$$x^3 - y^3 - 3xy =$$~~

~~$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) =$$~~

~~$$= a^3 + a^2b + ac^2 - ab^2 - abc - a^2c + b^3 + b^2a + b^2c - ab^2 - b^2c - abc +$$~~

~~$$+ ka^2 + c^3 - abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$~~

~~$$x^3 + (-y)^3 - 3 \cdot x \cdot (-y) \cdot (-1) =$$~~

~~$$= (x-y-1)(x^2+y^2+1 - x(-y) - (-y)(-1) - x(-1)) =$$~~

~~$$= (x-y-1)(x^2+y^2+x-y+xy+1) = 1$$~~

~~$$(x-y-1)(x^2+y^2+x-y+xy+1) = (x-y-1)(2y^2+xy+3) =$$~~

~~$$\frac{2-x-y-x}{x+y+1} = \frac{1+x-y}{1+x+y}$$~~

~~$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{(x-1)(y+1)}$$~~

~~$$y(x-1)(y+1) + x(x-1)(y+1)$$~~

~~$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$$~~

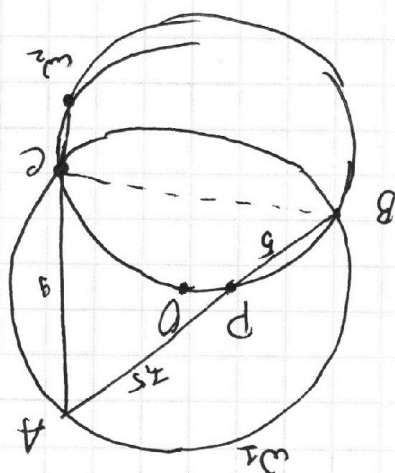
[Handwritten scribbles]

$$AP \cdot AB = \frac{15}{2} \cdot \left(\frac{2}{15} + \frac{10}{2} \right) = \frac{15 \cdot 95}{2} = 9 \cdot AD$$

$$AD = \frac{515 \cdot 95}{4 \cdot 83} = \frac{125}{12}$$

$$AD = 10 \frac{5}{12}$$

AP=7.5 BP=5 AC=9





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~ответ~~ В числах:

$$\begin{cases} y = \pm(x-1) + 2k \\ y = 1-3x \end{cases}$$

$$x, k \in \mathbb{Z}$$

$$x=11$$

$$y = \pm 10 + 2k$$

$$y = -32$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \arccos \frac{y}{4} \leq \pi$$



Подумаю все, кроме $\arcsin \frac{x}{5} = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{x}{5} = 1$$

$$\arccos \frac{y}{4} = 0$$

$$\frac{y}{4} = -1$$

$$\begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases}$$

$$\sin \pi \cdot (-1+0) = -1$$

$$\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = \cos^2 \pi x + \cos^2 \pi y$$

$$\cos(2\pi x) = -\cos(\pi x + \pi y)$$

$$-\cos 2 = \cos(\pi - 2)$$

$$\cos(2\pi x) = \cos(\pi - (\pi x + \pi y))$$

$$2\pi x = \pi - \pi x - \pi y + 2\pi k$$

$$3\pi x = -\pi + \pi y + 2\pi k$$

$$3x = 1 - y + 2k$$

$$x = -1 + y + 2k$$

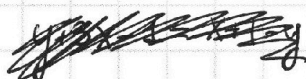
$$k=5 \text{ (X)}$$

$$k=-5 \text{ (X)}$$

$$\begin{cases} y = 1-3x+2k \\ y = 1+x+2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-4 = 1 - 15 + 2k$$

$$-4 = 1 + 5 + 2k$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

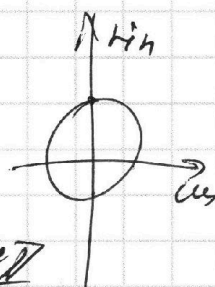
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\sin \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cdot \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2}(x-y) \right) \left(\sin \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) \cdot \sin \pi x - \cos \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) \cdot \cos \pi x \right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2}(x-y) = 0 \quad \frac{\pi}{2}(x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x-y = 1+2k \quad y = x-1-2k; k \in \mathbb{Z}$$



$$2) \sin \frac{\pi}{2}(x+y) \cdot \sin \pi x = \cos \frac{\pi}{2}(x+y) \cdot \cos \pi x$$

$$\cos \frac{\pi}{2}(x+y) = 0$$

$$\frac{\pi}{2}(x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x+y = 1+2k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \pi x = 0$$

$$\pi x = \pi n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = n; n \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 - n + 2k$$

$$y = 1 - n + 2k$$

$$y = 1 - n + 2k$$

$$y = 1 - n + 2k$$

$$\lg a = \lg b$$

$$x = n$$

$$y = 1 - n + 2k$$

$$; n, k \in \mathbb{Z}$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\lg a = \lg b$$

$$\lg a = \lg b$$

$$\lg a = \lg b$$

$$1 - 1$$

$$\lg \left(\frac{\pi}{2}(x+y) \right) = \lg(\pi x)$$

$$\lg a = \lg b$$

$$\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2}y + \pi x = \frac{\pi}{2}$$

$$y = 1 - 3x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + x = \frac{1}{2}$$

$$3x + y = 1$$

$$y = x - 1 + 2k \quad x \in \mathbb{Z}$$

$$y = 1 - x + 2k$$

$$y = 1 - 3x$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} = \frac{3\pi}{2}$$