

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



- [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
- [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
- [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

- [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
- [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
- [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

- [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

11; 22; 33; 44; 55; 66; 27; 88; 99. Гдеих

3 присутствует только 8 33 \Rightarrow C = 33 \Rightarrow

$$7777n - 606 \cdot 33 = m^2$$

$$2n \cdot 11(3333)^2 = m^2 \Rightarrow 2n - \text{квадрат}. : 2 \Rightarrow \text{чёткий}$$

$2n = \left(\frac{m}{3333}\right)^2$ чётное число

квадрат. $n < 10 \Rightarrow 2n < 20$, чётные квадраты <

$$< 20: 4; 16 \Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ n=8 \end{cases}$$

Ост.: $(2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

$A = \overline{nnnn}$, где n - цифра, не равная 0. Тогда
 $A = n \cdot 1111 = n \cdot 101 \cdot 11$ (числа 101, 11 - простые)

$ABC : A : (11 \cdot 101) \Rightarrow ABC$ - полный квадрат \Rightarrow
~~ABC делится на 101~~ \Rightarrow простые входят в четных степенях $\Rightarrow ABC : (11 \cdot 101)^2 \Rightarrow n \cdot BC : 11 \cdot 101$.

$$n < 11 \Rightarrow (n, 11 \cdot 101) = 1 \Rightarrow BC : 11 \cdot 101$$

$$C < 100, (C, 101) = 1 \Rightarrow B : 101.$$

Трёхзначные числа, делящиеся на 101:

101; 202; 303; 404; 505; 606; 707; 808; 909.

Также в одном из них есть 6 $\Rightarrow B = 606 \Rightarrow$

$$ABC : B : 606 \Rightarrow 6 \Rightarrow ABC : 6, ABC : (2 \cdot 3)$$

2 и 3 простые $\Rightarrow B$ ABC она входит в четных степенях: $ABC : 6^2 \Leftrightarrow 1111n \cdot 606 \cdot C : 6^2 \Leftrightarrow$

$$1111n \cdot 606 \cdot C : 6$$

$$(1111n \cdot 606, 6) = 1 \Rightarrow n(C : 6)$$

$$ABC : 606^2 \Leftrightarrow (n \cdot 606 \cdot C) : (11 \cdot 101) \Rightarrow$$

$$6n(C : 11) \cdot (6, 11) = 1 \quad n < 10 \Rightarrow (n, 11) = 1 \Rightarrow$$

$= C : 11$. Двухзначные числа, делящиеся на 11:



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 2

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)}$$

$$(x \neq 2), (x, y > 0)$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{y+2+x-2+5}{xy+2x-2y-4} = \frac{x+y+5}{xy+2x-2y-4} \quad | : (x+y+5) > 0$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy+2x-2y-4} \Rightarrow xy = xy + 2x - 2y - 4 \Rightarrow x = y + 2 > 0 + 2 = 2$$

$$M = (y+2)^3 - y^3 - 6(y+2)y = (y^3 + 6y^2 + 12y + 8) - y^3 - 6y^2 - 12y = \\ = 8$$

Ответ: 8

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$k = \frac{x_0 + y_0}{2} \in \mathbb{Z}, \text{ так } y_0 = -x_0 + 2 \cdot \frac{x_0 + y_0}{2}$$

Для $y = -2$; \emptyset - чётных x : $-6; -4; -2; 0; 2; 4; 6$

7 вариантов, для $y = \pm 1$ - нечётных x : $-5; -3; -1; 1; 3; 5$ - 6 вариантов; для $y = 2$ - все чётные x кроме

6 , т.к. тогда не выполнено первое условие.

$$\Rightarrow \text{всего вариантов } 2^4 \cdot 7 + 2^{12} \cdot 6 + 1 \cdot 6 = 32$$

Ответ: 32.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 3

$$a) \sin^2(\pi x) + \sin(\pi x)\sinh(\pi y) = \cos^2(\pi x) - \cos(\pi x)\cos(\pi y)$$

$$\cos(\pi x)\cos(\pi y) + \sin(\pi x)\sinh(\pi y) = \cos^2(\pi x) - \sinh^2(\pi x)$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos(2\pi x)$$

$$\begin{cases} \pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi y - \pi x = -2\pi x + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2k \\ y = -x + 2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Orbit: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (x; 3x+2k); (-x; -x+2k)$

Д) Заметим, что $\arcsinh a = -1 \leq a \leq 1, \arcsinh a \leq \frac{\pi}{2}$, равенство достигается $\Leftrightarrow a = 1$.

Если при x_0, y_0 определены $\arcsinh \frac{x_0}{6}, \arcsinh \frac{y_0}{2}$ то

нельзя не выполняется такое когда $\begin{cases} \frac{x_0}{6} = 1 \\ \frac{y_0}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6 \\ y_0 = 2 \end{cases}$
ограничение \arcsinh : $\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \leq 6 \\ |y| \leq 2 \end{cases}$

Заметим, что $y = 3x + 2k \equiv x, -x + 2k \equiv x \Rightarrow x \text{ и } y$

одной чётности без решений

Придём для любой пары (x_0, y_0) однозначной чётности пары $\begin{cases} x_0 = 6 \\ y_0 = 2 \end{cases}$ подсчитываю целое k , например



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

✓ 4

Пусть n - кол-во одноклассажек классиков, k - кол-чество билетов в начале месяца.

Все разные варианты распределения билетов равновероятны. Таких вариантов C_n^k в начале месяца и C_{n-2}^k в конце.

Как выходит исходы, когда у Пети и Васи оказались билеты. Значит оставшиеся распределены между их одноклассниками. C_{n-2}^2 и C_{n-2}^{k-2} следовательно соответственно в начале и в конце месяца.

Тогда вероятность условия на выигрышности записывается так:

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^k} \cdot 6 = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k}$$

$$6 \cdot \frac{4!(n-2)(n-3)}{h \cdot (n-1)(n-2)(n-3) \cdot 2!} = \frac{k!(n-2)(n-3)\dots(n-k+1)}{h(n-1)\dots(n-k+1)(k-2)!}$$

$$\frac{6 \cdot 12}{h \cdot (n-1)} = \frac{k \cdot (k-1)}{n \cdot (n-1)} \quad | \cdot (n(n-1))$$

$$k^2 - k - 72 = 0$$

$$(k-9)(k+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=9 \\ k=-8 \end{cases}$$

$k=-8$ - не подх., $k > 4$

Ответ: 9.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{Th sin } \Delta ABC: \angle AOB = \frac{AB}{\sin \delta} = \frac{AO \cdot AC}{\sin \beta} \Rightarrow AO \sin \beta = \frac{AC}{2};$$

$$AO \sin \delta = \frac{AB}{2}$$

$$AO \sin \beta = AP \sin(90^\circ - \alpha) = \frac{AB}{2} \Rightarrow \cancel{AO} \cos \alpha = \frac{AB}{2AP} = \frac{30}{2 \cdot 25} = \frac{3}{5}$$

~~$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5}$$~~

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AO \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot 35 \cdot 30 = 4 \cdot 35 \cdot 3 = 840$$

Ответ: 840.



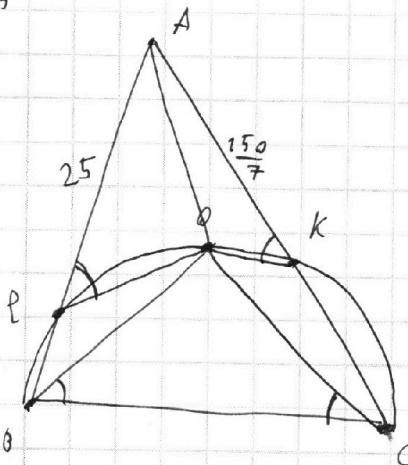
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input checked="" type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

✓ 5



Пусть $K \neq C$, $K = \omega_2 \cap AC$

По теореме секущих из 1 т.

$$AB \cdot AP = AK \cdot AC$$

$$\frac{30 \cdot 25}{35} = AK = \frac{150}{7}$$

$$\angle BDC - \text{п-д.} \Rightarrow \angle OBC = \angle OCB.$$

$$\angle BOC = 2 \cdot \angle BAC - \text{центальний} \beta \text{ вр.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle OBC = 90^\circ - \angle BAC.$$

$$\angle BAC = \alpha$$

$$\angle BDC - \text{внеш.} \Rightarrow \angle OPB = 180^\circ - \angle OBC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle APO = \angle OBC = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{аналогично } \angle AKO = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle AOB = 2 \angle ACB \Rightarrow \angle BAO = 90^\circ - \angle ACB$$

$$\angle AOC = 2 \angle ABC \Rightarrow \angle CAO = 90^\circ - \angle ABC$$

$$\angle ACD = \gamma; \angle ABC = \beta$$

$$\text{Th sin qua } \triangle APO: \frac{AO}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{AP}{\sin(180^\circ - \angle BAO - \angle APO)} = \\ = \frac{AO}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{AP}{\sin(\beta)}$$

$$\text{Th sin qua } \triangle AKO: \frac{AO}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{AK}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AK}{\sin \gamma}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

Аналогично для отрезка CD — его длина $= 2|x_c| =$

$$= 2 \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha}$$

$$M = 2 \left(\sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha} \right) + 13\pi$$

~~При $\alpha = 13\pi$ длина не будет зависеть от α , т.к. зависеть~~

$$\bullet P(\alpha) = \sqrt{169 - 50 \sin^2 \alpha} + \sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$

$$M = 2P(\alpha) + 13\pi \Rightarrow M \xrightarrow{\text{max}} \Leftrightarrow P(\alpha) \rightarrow \max \Leftrightarrow P^2(\alpha) \rightarrow \max$$

$$\begin{aligned} P^2(\alpha) &= 169 - 50 \sin^2 \alpha + 169 - 50 \cos^2 \alpha + 2 \sqrt{169^2 + 50^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - \\ &- (50 \sin^2 \alpha + 50 \cos^2 \alpha) \cdot 169 = 2 \cdot 169 - 50 + 2 \sqrt{169^2 - 169 \cdot 50 + 50^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - \\ &\text{т.к. надо максимизировать подквадратичное выражение} \\ &\text{то max достигается, когда } \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \rightarrow \max. \end{aligned}$$

$$\sin^2 2\alpha \rightarrow \max \Rightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha = 1 \\ \sin 2\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ 2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k \\ \alpha = \frac{7\pi}{4} + \pi k \\ \alpha = \frac{5\pi}{4} + \pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} P_{\max}(\alpha) &= \sqrt{\max_{\alpha} P^2(\alpha)} = \sqrt{288 + 2 \sqrt{169^2 - 2 \cdot 169 \cdot 25 + 25^2 \cdot 1^2}} = \sqrt{288 + 2 \cdot \sqrt{(169 - 25)^2}} = \\ &= \sqrt{288 + 2 \cdot 144} = \sqrt{4 \cdot 12^2} = 24 \end{aligned}$$

$$M_{\max} = 2 \cdot 24 + 13\pi = 48 + 13\pi$$

$$\text{Либо: } M = 48 + 13\pi, \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{5\pi}{4} + 2\pi k \\ \alpha = \frac{7\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой из задач** нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 6

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

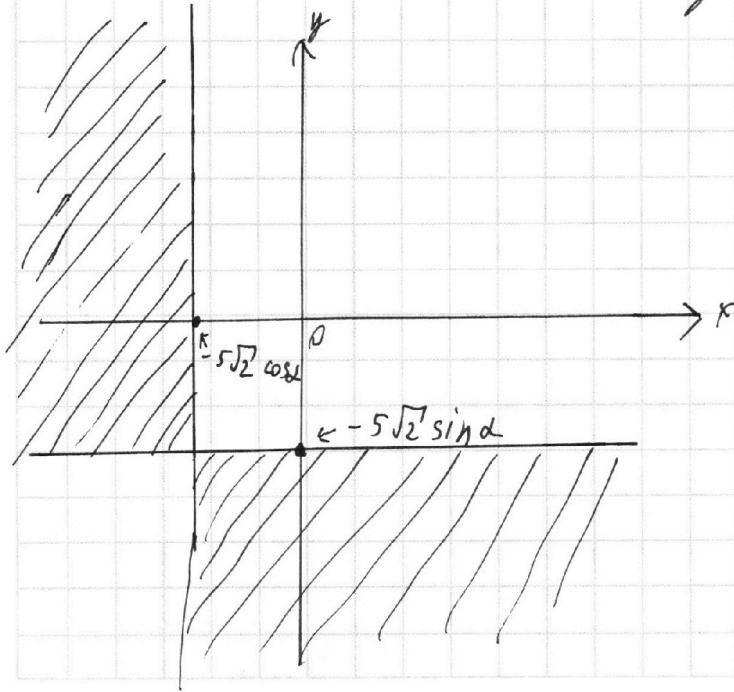
(2) - кир-бо, задающее круг радиуса 13 с центром в

$(0, 0)$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \leq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x + 5\sqrt{2} \cos \alpha \geq 0 \\ y + 5\sqrt{2} \sin \alpha \leq 0 \end{cases} \end{cases} \quad \begin{aligned} &x = -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ &y = -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \geq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ y \leq -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{cases} \end{cases} \quad \begin{aligned} &x = -5\sqrt{2} \cos \alpha \\ &y = -5\sqrt{2} \sin \alpha \end{aligned}$$

На плоскости эта совокупность изображалась так:



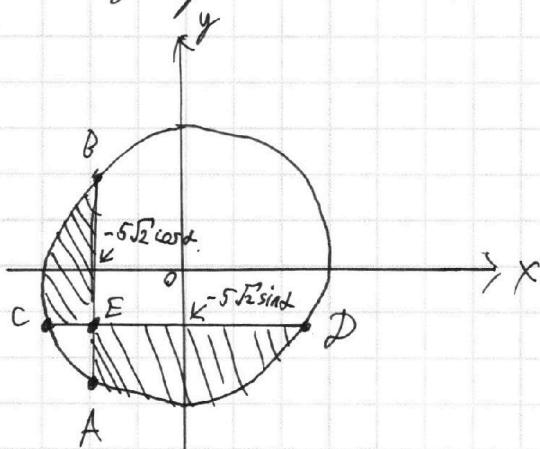
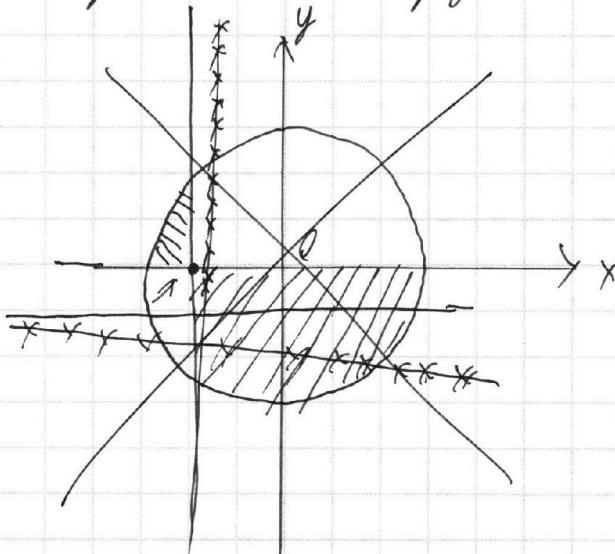
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

В пересечении с кругом полога изображается:



Более точн. т. кр. $\left\{ x = -5\sqrt{2} \cos \alpha \right. \atop \left. y = -5\sqrt{2} \sin \alpha \right\}$ и окружности за A и B
 $(x_A \leq x_B)$ и т. кр. $y = -5\sqrt{2} \sin \alpha$ и окружности за C и D.
 $(x_C \leq x_D)$

Периметр φ складывается из длины дуг BC и AD и AB + CD.

$$CD \wedge AB = E, \quad \angle PED = 90^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}) = 90^\circ \Rightarrow$$

$$\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD} = \pi \quad (\text{т. к. угол между дугами равен полуокруж. сим. дуг})$$

хордами

радиус окружности.

Сумма длин дуг BC и AD = $(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}) \cdot 13 = 13\pi$

$$x_A = -5\sqrt{2} \cos \alpha, \quad \text{т. кр.} \Rightarrow x_A^2 + y_A^2 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_A^2 = 169 - 50 \cos^2 \alpha$$

~~$$\therefore A \wedge B \text{ симметричны оси. } \Rightarrow AB = 2|y_A| = 2\sqrt{169 - 50 \cos^2 \alpha}$$~~



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

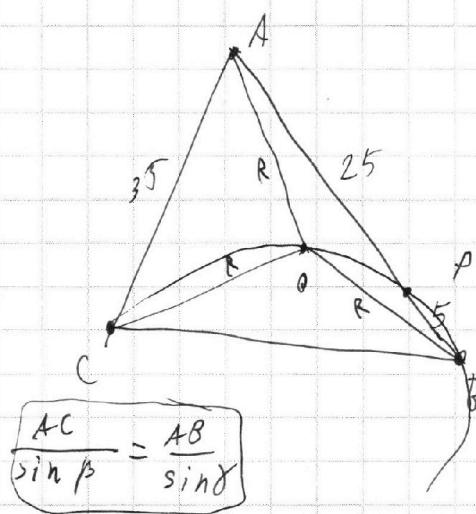
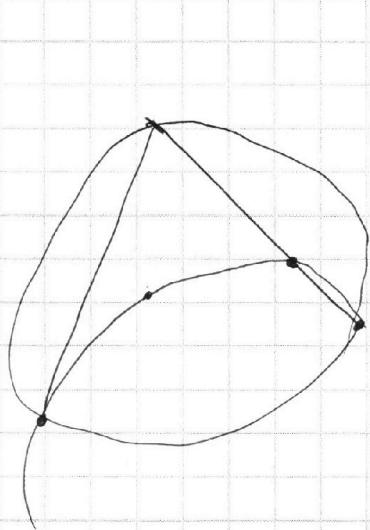
5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



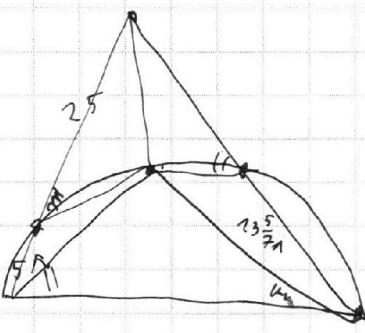
$$25 \cdot 30 = 35 \cdot (35 - x)$$

$$750 = 245 - 7x$$

$$7x = 95$$

$$x = 10 + \frac{25}{7} = 10 \frac{5}{7}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ \times 70 \\ \hline 25 \\ 420 \end{array}$$





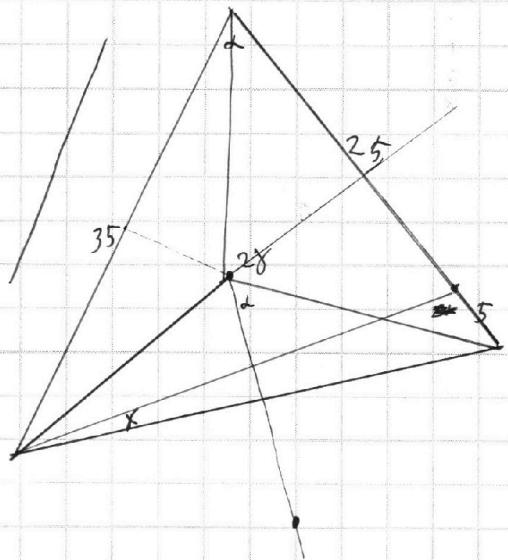
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$11 + 4 + 6 = (21)$$



$$2R \sin \alpha$$

$$2R' = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$25 \cdot 30 =$$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$$

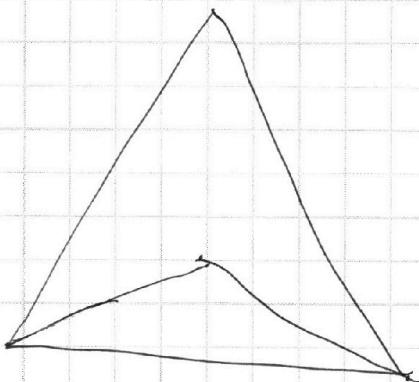
$$\frac{R}{\sin \alpha} = 2R'$$

$$R \sin \alpha = \frac{AB}{2}$$

$$R = \frac{30}{2 \sin \beta} = \frac{35}{2 \sin \gamma}$$

$$\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{30}{\sin 2\alpha} \Rightarrow \cancel{\sin 2\alpha} \\ \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos 2\alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin 2\alpha =$$



$$25 \cdot 30 = R^2 - 2RR' \cos(2\alpha + \beta) =$$

$$= R^2 \cdot \left(1 - \frac{\cancel{\sin 2\alpha}}{\sin 2\alpha} \cdot \cos \beta\right)$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} \cos 2\alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin 2\alpha$$

$$R^2 \left(1 - \cos 2\alpha + \frac{\sin \alpha \sin 2\alpha}{\cos \alpha}\right) =$$

$$= R^2 \left(2 \sin^2 \alpha + \frac{\sin \alpha \sin 2\alpha \cos \alpha}{\cos \alpha}\right) =$$

$$= R^2 \cdot \sin \alpha (2 \sin \alpha + \tan \alpha \cos \alpha) =$$

$$= R \cdot \frac{AB}{2} \cdot (2 \sin \alpha + \tan \alpha \cos \alpha) =$$

$$\frac{AB}{2} (AB + \tan \alpha \cdot R \cos \alpha)$$

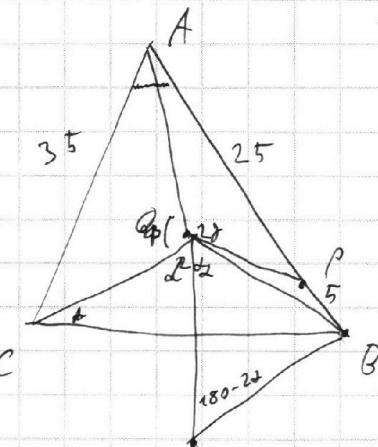


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin \alpha - ?$$

$$\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R$$

$$\frac{AC}{\sin \beta} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin \gamma} = 2R$$

$$\frac{R}{\cos \alpha} = 2R'$$

$$R^2 + R'^2 - 2RR' \cos A \alpha - R'^2 =$$

$$= 25 \cdot 30$$

$$R^2 - 2R \cdot \frac{R}{2 \cos \alpha} \cdot \cos(\alpha + 2\beta) =$$

$$= R^2 \left(1 - \frac{\cos(\alpha + 2\beta)}{\cos \alpha} \right) =$$

$$= R^2 \cdot \left(1 - \frac{\cos \alpha \cos 2\beta - \sin \alpha \sin 2\beta}{\cos \alpha} \right)$$

$$= R^2 (1 - \cos 2\beta -$$

$$|x| \leq 6$$

$$\arcsin \alpha \geq \frac{\pi}{2}$$

~~= 2 arcsin x~~

Нужен gen. x и y

Нужно не вынужденно

$$x = 6$$

$$y = 2$$

$$-\frac{\sin \alpha \sin 2\beta}{\cos \alpha}$$

$$\sin \pi y \sin \pi x + \cos \pi y \cos \pi x = \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi x$$

$$\cos(\pi y - \pi x) = \cos 2\pi x$$

$$\pi y - \pi x = 2\pi x + 2\pi k$$

$$\pi y - \pi x = -2\pi x + 2\pi k$$

$$y = 3x + 2k \quad y = -x + 2k, k \in \mathbb{Z}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$n \cdot 1111 \cdot \left[\begin{array}{r} 6 \\ -6 \\ -6 \end{array} \right] = n \cdot \left[\begin{array}{r} 3 \\ -3 \\ -3 \end{array} \right] : 101^2$$

$$1111 = \boxed{11 \cdot 101} : 101 \Leftrightarrow 1111 : 101 \Leftrightarrow 606$$

$$n \cdot 1111 \cdot 606 \cdot \left[\begin{array}{r} 3 \\ -3 \end{array} \right] = n \cdot 101 \cdot 11 \cdot 6 \cdot 101 \cdot \left[\begin{array}{r} 3 \\ -3 \end{array} \right]$$

$$n \cdot \left[\begin{array}{r} 3 \\ -3 \end{array} \right] \cdot 66 = m^2$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{y+2} + \frac{5}{(x-2)(y+2)} \quad n=1 - \text{нет}$$

$$(x-2)(y+2) \Leftrightarrow m \quad (n, 6) = 1 \Rightarrow \frac{3}{-3} : 66$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{(xy+2x-2y-4)}$$

$$n:2, n:3 \Rightarrow$$

$$2x - 2y - 8 = 0$$

$$n \cdot 33 \cdot 66 = m^2$$

$$x \neq 2 \quad x = y+2$$

$$n \cdot 2 = m^2$$

$$y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 - 6(y^2 + 2y) = 8$$

$$\boxed{\begin{array}{l} n=2 \\ n=8 \end{array}}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2 \sin \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi \frac{x-y}{2} \sin \pi x = -2 \sin \pi \frac{x+y}{2} \cos \pi \frac{x-y}{2} \cos \pi x$$

$$\sin \pi \frac{x+y}{2} = 0$$

$$\cos \pi \frac{x-y}{2} \sin \pi x =$$

$$\pi \frac{x+y}{2} = 2\pi k$$

$$= \cos \pi x \cdot \sin \left(\frac{\pi-x}{2} \right) \pi$$

$$\pi \frac{x+y}{2} = \pi + 2\pi k \Rightarrow \begin{cases} x+y = 4\pi k \\ x+y = 2 + 4\pi k \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

- | | | | | | | |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по **каждой** из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{4! \cdot (n-2)(n-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3) \cdot 2!} = \frac{12}{n \cdot (n-1)}$$

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)(n-3)\dots(n-k+1) \cdot k!}{n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot (k-2)!} = \frac{k \cdot (k-1)}{n(n-1)}$$

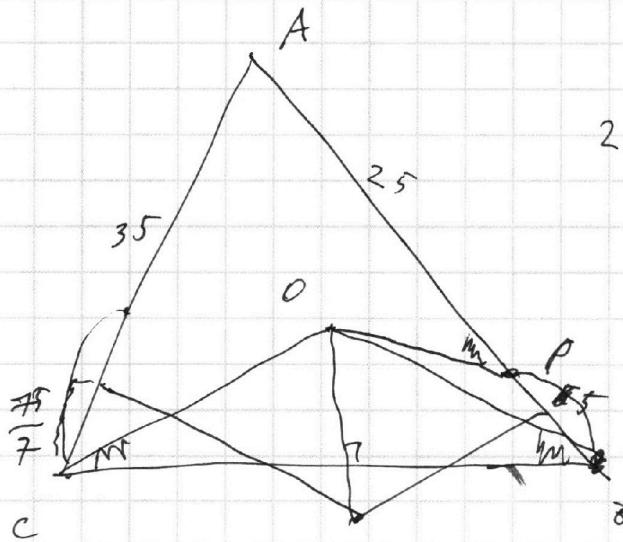
$$k \cdot (k-1) = 6 \cdot 12$$

$$k^2 - k - 6 \cdot 12 = 0$$

$$D = r + R \cdot 6 \cdot 12 = 289 = \cancel{R^2} 17^2$$

$$k_1 = \frac{1+17}{2} = 9$$

$$k_2 =$$



$$25 \cdot 30 = 75 \cdot (35 + x)$$

$$150 = 225 + 7x$$

$$x = \frac{150 - 75}{7}$$

$$\frac{R}{\sin 90^\circ - x} = \frac{R}{\cos x}$$

$$\frac{AB}{\sin 2x}$$

$$\frac{AB}{\sin 120^\circ} = R$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

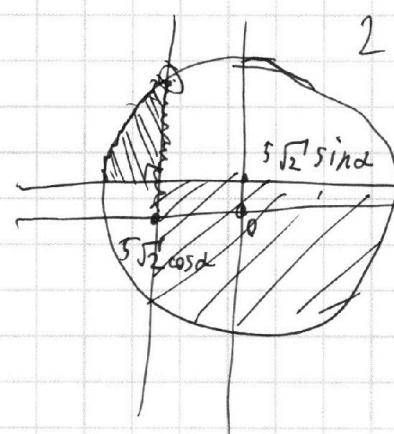
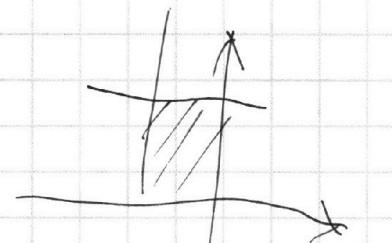
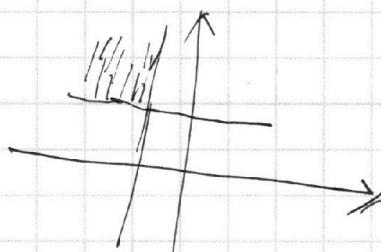
~~Задача~~

$$x \leq 5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$x \geq 5\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$y \geq 5\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$y \leq 5\sqrt{2} \sin \alpha$$



$$2 \cdot 169 - \frac{50}{5\sqrt{2}} \cos^2 \alpha$$

$$2 + \frac{50}{2\sqrt{169 - 50\cos^2 \alpha}}$$

$$2\pi \cdot \sqrt{169 \cdot 2 - 50 + \sqrt{169^2 + 50^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} - 169 \cdot 50}$$

