



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



✕ 1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
- C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

✕ 2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.

? ✕ 3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

✕ 4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

? ✕ 5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.

? ✕ 6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если A — четырехзначное число, сост. из одинаковых цифр, это значит, что $A = 1111k$, где $1 \leq k \leq 9$. Число $A \cdot B \cdot C$ было полным квадратом, $A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot k \cdot B \cdot C$, $B \cdot C$ должно быть равно $1111m^2$, где $m \in \mathbb{Z}$ (k не может быть равен 11 или 101, k — не точн. кв.). Поскольку C — двузначное число, то оно не может делиться на 101, след., $C:11$, а если 1 или 9, то ~~тогда~~ $C=11$. Значит, $B:101$, а раз. 7 есть в B , но $B=707$.
Итак, $B \cdot C = 7777 \equiv 1111 \cdot 7m^2$, $7m^2 \equiv 7$ — не имеет реш.
Значит, $A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot k \cdot 7777 = 1111^2 \cdot 7k$,
 $7k$ — точн. квадрат только при $k=7$, или $1 \leq k \leq 9$. Значит $A=7777$.
Ответ: $A=7777$; $B=707$; $C=11$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \quad 1 \text{ случай:}$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{x-4+y+4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{y+x+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$xy = (x-4)(y+4)$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$4x - 4y - 16 = 0$$

$$x - y = 4, \quad x = y + 4$$

$$M = (y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) = 4((y+4)^2 + y^2 + (y+4)y) - 12y^2 - 48y =$$

$$= 4(y^2 + 8y + 16 + y^2 + y^2 + 4y) - 12y^2 - 48y = 4(3y^2 + 12y + 16) - 12y^2 - 48y = 64$$

~~Ответ: M = 64~~

~~Ответ: M = 64~~

2 случай:

$$x = -y - 3$$

$$M = (-y-3)^3 - y^3 + 12y(y+3) = -(y+3)^3 + y^3 + 12y(y+3) = -(y^3 + 27y^2 + 27y + 27) + y^3 + 12y^2 + 36y =$$

если y — полож., то x — отриц. в таком случае, значит, такое не может быть, значит, $M = 64$

Ответ: $M = 64$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Теперь рассмотрим случаи, ^{когда} $3x - y$ явл. кес. числом.

Заметим, что если x - кес., y - земн., то $3x - y$ явл. кес.,
а если x - земн., y - кес., то $3x - y$ тоже явл. кес.

Итак, всего пар ^{целых} чисел (x, y) , удовлетв. данному неравенству, будет 67.

Ответ: а) чтобы числа x и y , удовлетв. хотя бы ~~одному~~ из

условий: 1) $x + y$ - кес. число

2) ~~$3x - y$~~ - кес. число
 $3x - x$

б) 67 пар.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1. Пусть m - к-во учеников в классе, k - к-во билетов, тогда всевозможных исходов - C_m^k , а благоприятных - C_{m-2}^{k-2} .

(кто-то, кроме Дени и Васи, к-во способов распред. $k-2$ билета на $m-2$ человек). Итого, вероятность события $P = \frac{C_{m-2}^{k-2}}{C_m^k} = \frac{(m-2)!}{(k-2)!(m-k+2)!} \cdot \frac{m!}{k!(m-k)!} =$

$$= \frac{(m-2)! \cdot k! \cdot (m-k)!}{(k-2)!(m-k)! \cdot m!} = \frac{k(k-1)}{m(m-1)}$$

Изначально было 4 билета, след. вероятность попасть на концерт в нач. месяца была $\frac{12}{m(m-1)}$. В кон. месяца вероятность

увеличилась в 11 раз, следовательно, вероятность стала равна $\frac{132}{m(m-1)}$

$$k^2 - k - 132 = 0$$

$$D = 1 + 528 = 23^2$$

$$k_1 = \frac{1+23}{2} = 12$$

$$k_2 = \frac{1-23}{2} = -11 < 0$$

То есть, при 12 билетах могла быть такая вероятность. Значит, всего k кон. месяца было выдано 12 билетов.

Ответ: 12 билетов

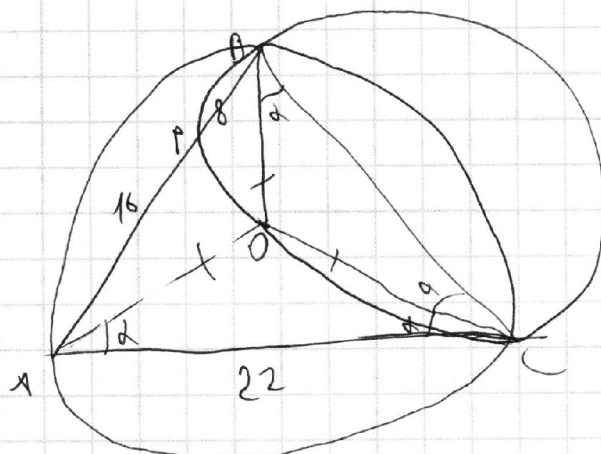


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Дано:

O — у. сф. W_1

$W_2 \cap AB = P$

$AP = 16$

$BP = 8$

$AC = 22$

$S_{ABC} = ?$

Решение:

Пусть $\angle OBC = \alpha$, тогда по теореме об угле между касательными, $\angle OCA = \alpha$, тогда $\angle OCB = \angle OAC = \angle OCA = \angle OAC = \alpha$, $\alpha = \angle OBC = \angle OCA$

$\triangle AOC = \triangle BOC \Rightarrow AC = BC = 22$

$$\cos \angle BAC = \frac{22^2 + 22^2 - 24^2}{2 \cdot 22 \cdot 22} = \frac{4}{11}$$

$AB = 24 \Rightarrow$ по теореме

$AB = AP + BP = 24 \Rightarrow$ по теореме косинусов

$$\cos \angle BAC = \frac{24^2 + 22^2 - 22^2}{2 \cdot 24 \cdot 22} =$$

$$= \frac{24}{44} = \frac{6}{11} \Rightarrow \sin \angle BAC = \frac{\sqrt{85}}{11}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 22 \cdot \frac{\sqrt{85}}{11} = 24\sqrt{85}$$

Ответ: $24\sqrt{85}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

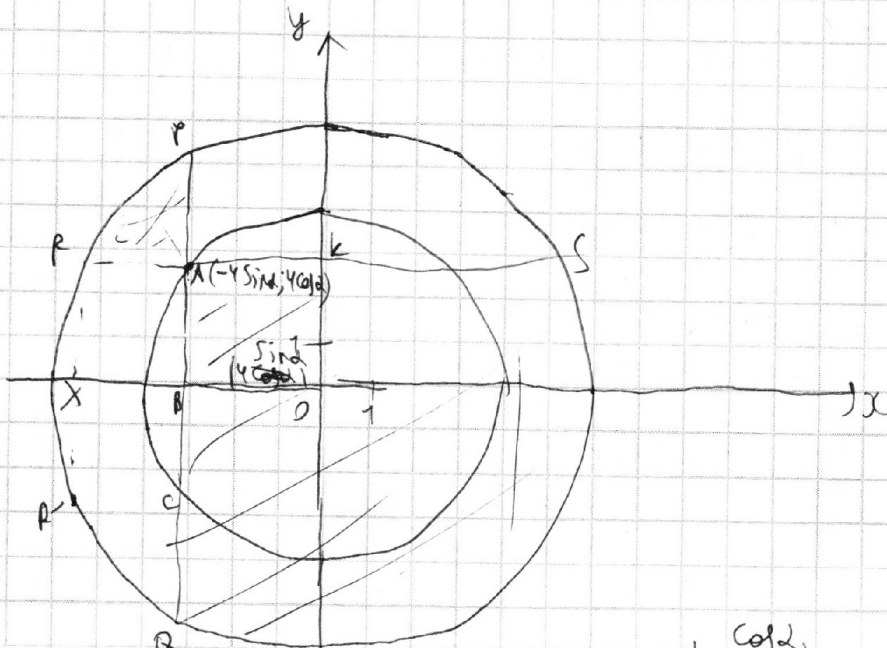
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 36$$

1. Первое уравнение
задает область
Второе уравнение — окружность
задает круг радиусом 6, а

Первое уравн. — система задает 2 области, заданные
системами $\begin{cases} x \leq -4 \sin \alpha \\ y \geq 4 \cos \alpha \end{cases}$ и $\begin{cases} x \geq -4 \sin \alpha \\ y \leq 4 \cos \alpha \end{cases}$



Поск. $AO = OC = 4$, $BO = 4 \sin \alpha$, но $AB = BC = 4 \sin \alpha$, а

$$BQ = \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}, \text{ так как } BP = BQ, \text{ так как } PK = \sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha}, \text{ так как } KS = PK.$$

$$\text{Тогда } PQ + RS = 2(\sqrt{36 - 16 \cos^2 \alpha} + \sqrt{36 - 16 \sin^2 \alpha}) \text{ Пусть } P' - \text{сим.}$$

точки P относительно BO, а X — пересек. PP' и BO.

$$\text{Заметим, что } XP = XP' = AB = BC = 4 \sin \alpha, \text{ а } PK = XO,$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

тогда $R \in R'$ принадле. большей окр., и $R'O = 6$, значит,
 $\Delta VPP = \Delta R'Q$, $\Delta RP + \Delta QS = \Delta R'S = PR = 6\pi$.

Найдем макс. значение функции $f(\alpha) = 2(\sqrt{36-16\sin^2\alpha} +$

$$+ \sqrt{36-16\cos^2\alpha}) = \text{пусть } t = 16\cos^2\alpha, \quad g(t) = \sqrt{36-t}$$

$$\text{пусть } t = 16\cos^2\alpha, \quad g(t) = \sqrt{36-t} + \sqrt{36-16\cos^2\alpha}, \quad \text{тогда } g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{36-t}} - \frac{1}{2\sqrt{36-16\cos^2\alpha}} = 0$$

$$\sqrt{36-t} = \sqrt{36-16\cos^2\alpha}, \quad t = 8, \quad \text{значит, } t \text{ принимает макс. знач. при } \frac{1}{2}\cos^2\alpha = 0,$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}, \text{ и оно будет равно } 2(\sqrt{28} + \sqrt{28}) = 4\sqrt{28} = 8\sqrt{7}, \text{ а}$$

макс. периметр фигуры $P = 8\sqrt{7} + 6\pi$, и он достигается при $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$,

$$\text{т.е., при } \cos 2\alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: макс. $M = 8\sqrt{7} + 6\pi$, достигается при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$2 \sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \sin \pi y = 2 \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cos \frac{\pi y - \pi x}{2} \cos \pi y$$

$$2 \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \left(\sin \frac{\pi y - \pi x}{2} \sin \pi y - \cos \frac{\pi y - \pi x}{2} \cos \pi y \right) = 0$$

$$2 \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} \cos \frac{3\pi y - \pi x}{2} = 0$$

$$\begin{cases} y+x=1+k \\ 3y-x=1+k \end{cases} \quad \begin{cases} y=1+k-x \\ y=\frac{1+k+x}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{pmatrix} x_0; \frac{1+k-x_0}{3} \\ x_0; \frac{1+k+x_0}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+x=0 \\ 3y-x=0 \end{cases}$$

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{7} + \arcsin \frac{y}{4} < \pi$$

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin \frac{x}{7} + \arcsin \frac{1+k+x}{4} < \pi$$

$$\begin{cases} -7 \leq x \leq 7 \\ -4 \leq 1+k-x \leq 4 \\ x \neq 7 \\ 1+k-x \neq 4 \end{cases}$$

$$\frac{C_4^2 \cdot 11}{C_2 \cdot 12} = \frac{C_4}{12}$$

$$\frac{1}{C_4^2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{3}{m} = \frac{12}{m^2}$$

$$\frac{4}{10} = \frac{0,4}{4}$$

$$\frac{C_{m-2}^2}{C_m^2} = \frac{(m-2)!}{2! \cdot (m-4)!} = \frac{m!}{m!} = 1$$

$$= \frac{(m-2)!}{2! \cdot (m-4)!} \cdot \frac{2! \cdot (m-2)!}{m!} =$$

$$\frac{C_{m-2}^2}{C_4^4} = \frac{(m-2)!}{2! \cdot (m-4)!} = \frac{(m-4)! \cdot m!}{4! \cdot (m-4)!} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(m-2)!^2}{m! \cdot (m-4)!} = \\ &= \frac{(m-3)(m-2)(m-2)!}{m!} = \frac{(m-3)(m-2)}{m(m-1)} \\ &= \frac{(m-2)!}{2! \cdot (m-4)!} \cdot \frac{(m-4)! \cdot 4!^2}{m!} = \frac{12}{(m-1)m} \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111k$$

$$A \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot k \cdot B \cdot C$$

$$707 \cdot 11 \cdot 11$$

$$B: 101$$

$$k \cdot B \cdot C = 11 \cdot 101 \cdot m^2$$

$$\begin{pmatrix} 7777 \\ 707 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-y} + \frac{1}{y+y} + \frac{3}{(x-y)(y+y)}$$

$$xy = (x-y)(y+y)$$

$$\frac{y+x+3}{xy} = \frac{y+y+x-y+3}{(x-y)(y+y)}$$

$$xy = xy + 4x - 4y - 6$$

$$4x - 4y = 6$$

$$x = y + 4$$

$$\frac{1}{y+4} + \frac{1}{y} + \frac{3}{y(y+4)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{y}$$

$$(y+4)^3 - y^3 - 12y(y+4) =$$

$$= 4(y^2 + 4y + 16 + y^2 + 2y(y+4)) - 12y^2 - 48y =$$

$$= 4(3y^2 + 12y + 16) - 12y^2 - 48y = 64$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y - \cos^2 \pi y - \cos \pi x \cos \pi y = 0$$

$$-\cos 2\pi y - \cos(\pi x - \pi y) = 0$$

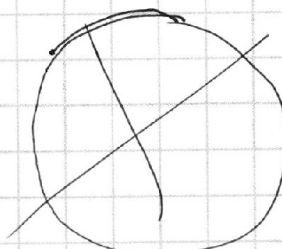
$$\cos 2\pi y + \cos(\pi y - \pi x) = 0$$

$$2 \cos \frac{3\pi y - \pi x}{2} \cos \frac{\pi y + \pi x}{2} = 0$$

$$y = 1 + k - x$$

$$\frac{1}{-y-3} + \frac{1}{y} = \frac{3}{y(y+3)}$$

$$\frac{1}{-y-3} +$$





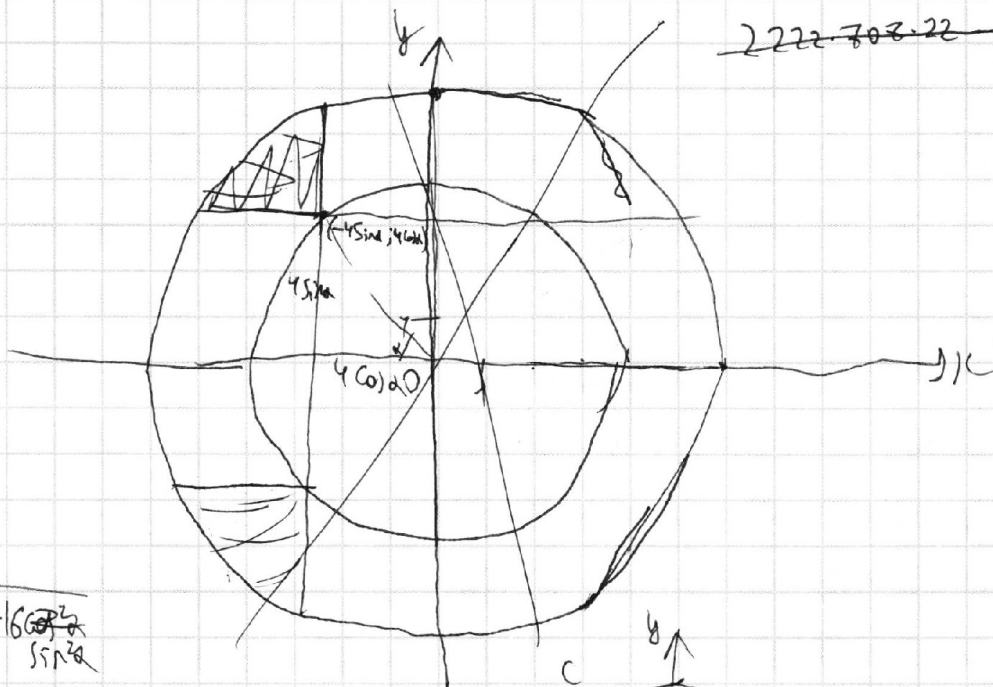
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~~2222-708-22~~

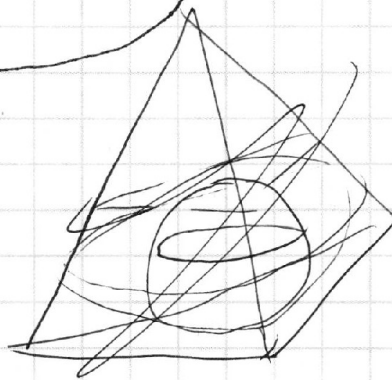
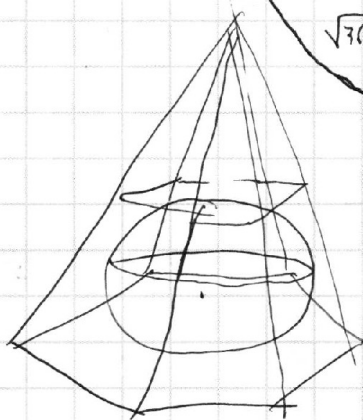
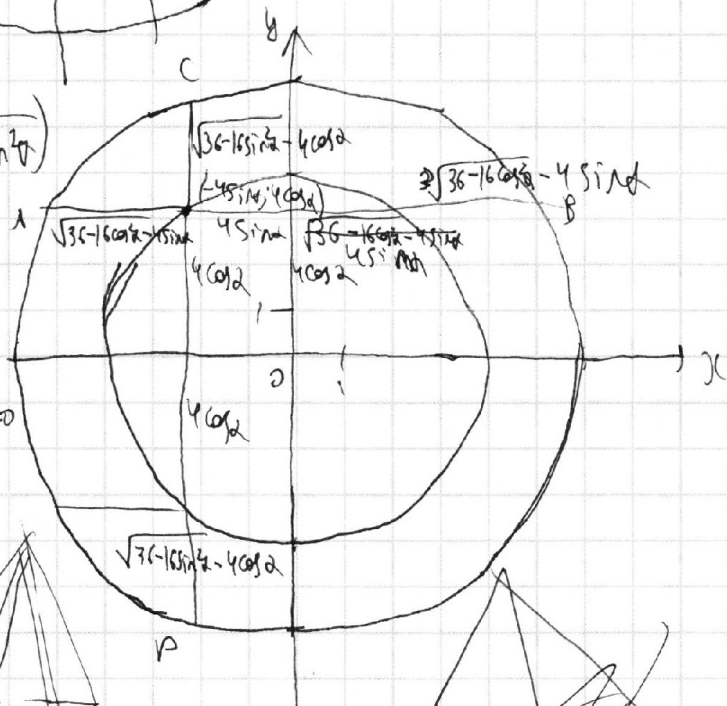


$$\sqrt{36-16\cos^2\alpha}$$

$$AB+CP=2(\sqrt{36-16\cos^2\alpha}+\sqrt{36-16\sin^2\alpha})$$

$$\sqrt{36-16\cos^2\alpha}+\sqrt{20+16\cos^2\alpha}$$
$$b=16\cos^2\alpha$$

$$f(b)=\sqrt{36-b}+\sqrt{20+b}$$
$$f'(b)=-\frac{1}{2\sqrt{36-b}}+\frac{1}{2\sqrt{20+b}}=0$$
$$\Rightarrow b=8$$
$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$$



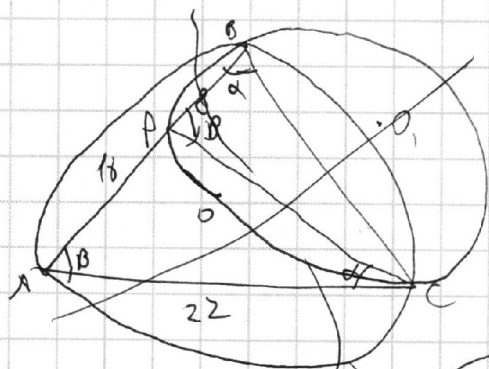
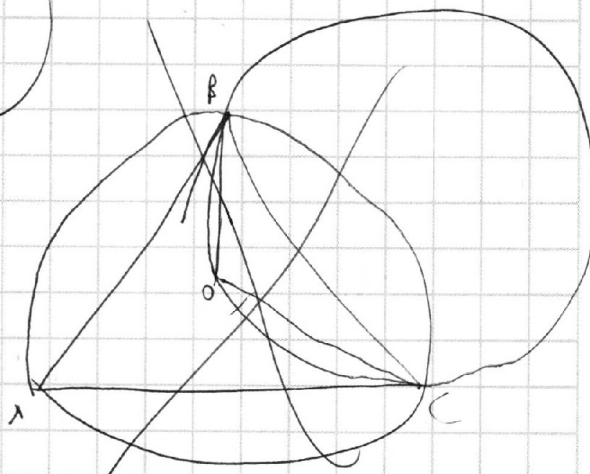
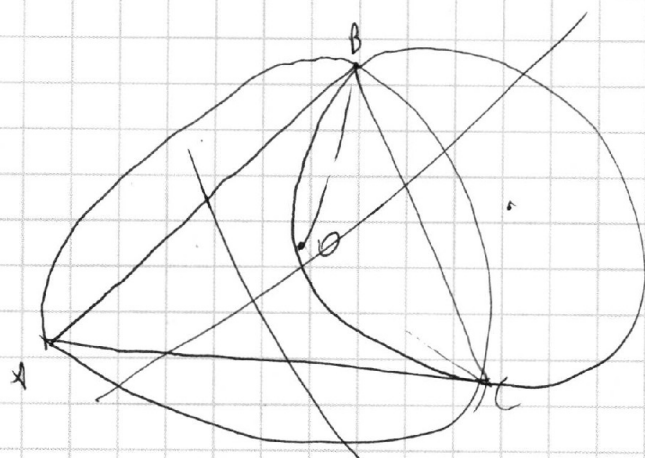


На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

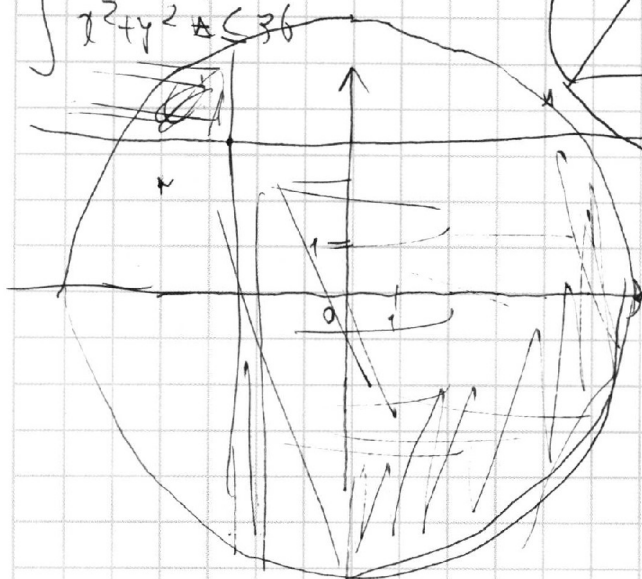
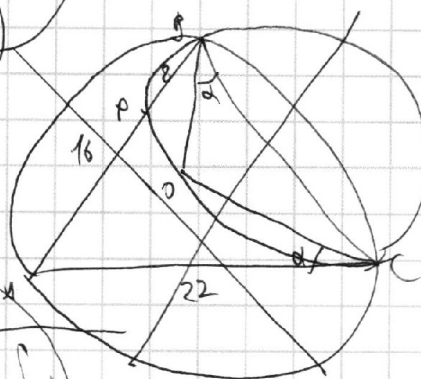
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

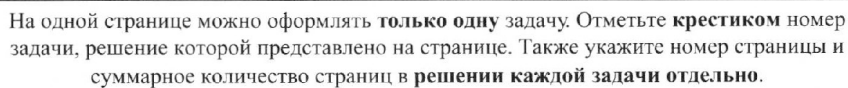
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$x(-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$$

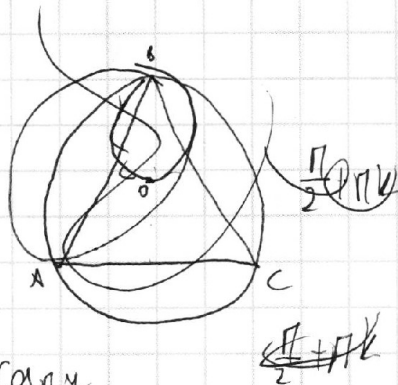
$$\int (x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha) \leq 0$$
$$\int x^2+y^2 \leq 36$$





СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \sin \pi y - \cos^2 \pi y - \cos \pi x \cos \pi y = 0$$

$$2 \cos \frac{3\pi + \pi}{2} \cos \frac{\pi + \pi}{2} = 0$$

$$\begin{cases} 3y - x = 1 + 2u, & \text{662} \\ 2y + x = 1 + 2v, & \text{662} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1+2k+x}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ y = 1+2l-x, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$