



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☒

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$A \cdot B \cdot C = k^2, \text{ где } k \in \mathbb{N}$$

$$A = 1111 \cdot a, \text{ где } a \in [1; 9]$$

B - трехзначное $C \geq 1$ двузначное

C - двузначное $C \geq 1$ трехзначное

$$\text{Тогда: } 1111 \cdot a \cdot B \cdot C = k^2$$

$$101 \cdot 11 \cdot a \cdot B \cdot C = k^2$$

Значит, чтобы было полным квадратом, то степень вхождения каждого множителя : 2. Значит так B трехзначное, то B : 101, так 101 простое. Все трехзначные числа : 101 : 101, 202, 303, 404, 505, 606, 707, 808, 909

$$\Rightarrow B = 202. \text{ Тогда: } 101^2 \cdot 11 \cdot 2 \cdot a \cdot C = k^2$$

Так $a \in [1; 9]$, а C двузначное, то C : 11. Все двузначные числа : 11 : 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99

$$\Rightarrow C = 33. \text{ Тогда } 101^2 \cdot 11^2 \cdot 6 \cdot a = k^2$$

$$\text{Итак } a \in [1; 9], \text{ то } a = 6$$

Значит ед. возм. тройка $(A; B; C) = (6666; 202; 33)$

Или $(6666; 202; 33)$.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy = (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 3xy.$$

Тогда:

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+x+x+1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\text{Тогда: } \begin{cases} y+x+2=0, \text{ но так } x, y > 0, \text{ то } y+x+2 > 2 \\ xy = (x-1)(y+1) \end{cases}$$

$$\text{Значит } xy = xy + x - y - 1$$

$$y = x - 1.$$

$$\begin{aligned} M &= x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 - 3x(x-1) = \\ &= \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - \cancel{x} + \cancel{x^2} - 2x + 1 = -3x^2 + 3x = 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☒4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) - \sin \pi x =$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) - \cos \pi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) - \cos \pi x - \cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) \right) \cdot \cos \pi x \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) \cdot \cos \left(\pi x + \frac{\pi}{2} (x+y) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{\pi}{2} (3x+y) \right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} (x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} (3x+y) = \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 + 2k \\ y = -3x + 1 + 2h \end{cases} \quad k, h \in \mathbb{Z}$$

$$\delta) 1) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x - (1+2k)}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Тога!} \begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{x - (1+2k)}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ (1+2k) - 4 \leq x \leq 4 + (1+2k) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z}, \text{ то } k = \{1, 0\}$$

$$1. k = -1: \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x+1}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Еще } x \in [-1, 0] \text{ то } \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x+1}{4} < \frac{3\pi}{2}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Если $x \leq -1$, то $\arccos \frac{x}{5} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$; $\arccos \frac{x+1}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$

$$\arccos \frac{x+1}{4} \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$$

т.е. $x \in [-5; -1]$ не подходит.

Если $x \in [0; 3]$, то $\arccos \frac{x}{5} \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$$\arccos \frac{x+1}{4} \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

т.е. $x \in [0; 3]$ подходит.

Тогда 9 пар подходит.

$$2. k=0: \arccos \frac{x}{5} + \arccos \frac{x-1}{4} \in [\frac{3\pi}{2}]$$

Аналогично получаем, что $x \in [-3; 5]$

подходит.

$$2) \arccos \frac{x}{5} + \arccos \frac{-3x + (1+2n)}{4} \in [\frac{3\pi}{2}]$$

$$\begin{cases} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ 4 \leq -3x + 1 + 2n \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq x \leq 5 \\ 4 - (1+2n) \leq -3x \leq 4 - (1+2n) \end{cases}$$

$$\frac{(1+2n)+4}{3} \geq x \geq \frac{(1+2n)-4}{3}$$

$$n = \{-1; 0; -2; -3; -4; -5; -6; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Примечание: 3 числа 3 числа 3 числа 3 3 3 4 числа 3 числа 3 3 3

$$\Rightarrow 11 \cdot 3 + 4 = 37 \text{ пар.}$$

$$\text{Тогда всего } 37 + 18 = 55 \text{ пар. } (x; y) \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Примечание: } a(x; y) = \{ (x; x - (1+2k)); (x; -3x + (1+2k)) \}$$

где $k; k \in \mathbb{Z}; 5) 55 \text{ пар}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

7 из 7

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1/4

Дважды поименно следующие:
составим списком можно выбрать
васю и пеню, чтобы они вошли оба в
четверку и поименно вер-ить:

$$P_1 = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{C_x^1 \cdot C_{x-1}^1} = \frac{4! \cdot (x-1)!}{3! \cdot x!} \cdot \frac{3! \cdot (x-2)!}{2! \cdot (x-1)!} =$$

$$= \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} \quad (\text{Внимание! месяц}), \text{ где } x -$$

- кол-во учащихся

Тогда $P_2 = \frac{k}{x} \cdot \frac{k-1}{x-1}$, где k кол-во билетов > 4 .

Значит из условия:

$$2,5 P_1 = P_2$$

$$2,5 \frac{4}{x} \cdot \frac{3}{x-1} = \frac{k}{x} \cdot \frac{k-1}{x-1}; \quad x \neq 1, \text{ тк } \text{учетных} > 4.$$

$$\Leftrightarrow 30 = k^2 - k$$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

$$D = 1 + 120 = 121$$

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2} = 6.$$

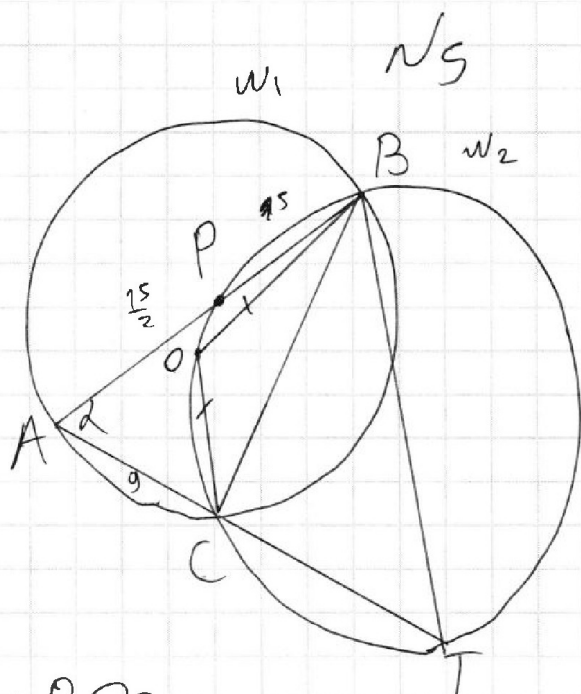
Ответ: 6.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☒6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



[ABC] - ?

1) Из свойства Точек:

$$AP \cdot AB = AC \cdot AT$$

$$AT = \frac{15}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{125}{12}$$

$$\Leftrightarrow CT = \frac{125}{12} - 9 = 10 + \frac{5}{12} - 9 = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$$

2) Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда

$\angle BOC = 2\alpha$, как центральный. Тогда $\angle BTA = 180 - 2\alpha$, тк B, O, T лежат на одной прямой.

$$\text{Тогда } \angle ABT = 180^\circ - \angle BTA - \angle BAT = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \triangle ABT \text{ равноб.} \Leftrightarrow BT = AT = \frac{125}{12}$$

$$3) \text{ По Т. кос } \triangle ABT: \cos \alpha = \frac{AB^2 + AT^2 - BT^2}{2AB \cdot AT} = \frac{AB}{2AT} = \frac{25 \cdot 12 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 125 \cdot 5} = \frac{3}{5} \text{ Тогда } \sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$4) [ABC] = \frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{25}{2} \cdot 9 = 45$$

Ответ: 45.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено болсе одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$(1) \begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

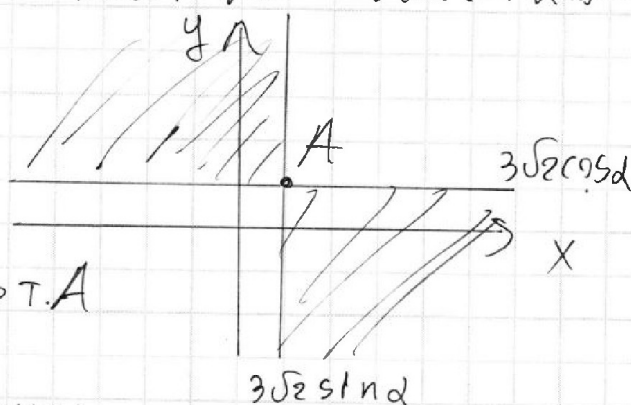
(1) Попробуем понять, почему так получилось. Это неравенство можно переписать так:

$$a \cdot b \leq 0, \text{ когда } \begin{cases} a \leq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

Тогда $(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$

$$\begin{cases} x < 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y > 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x > 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y < 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$

То есть графиком неравенства являются две области, взятые вместе от двух точек.

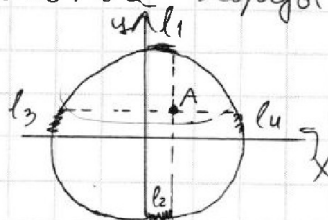


Пусть пересечение $x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$ и $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha \rightarrow T.A$

(2) Это неравенство для круга.

2) Тогда: Попробуем, что P нашей фигуры состоит из двух дуг и двух хорд. Давайте же поймем, что независимо от положения T.A сумма двух дуг не меняется.

Решим так: Возьмем два диаметра и две произвольные хорды и нарисуем: $l_1 = l_2, l_3 = l_4$



Тогда если $P_{\text{круга}} = L$, то периметр круга $\frac{L}{4} \Rightarrow$ для диаметров нет на Ox и Oy одна дуга $\rightarrow \frac{L}{2}$, а для произвольных хорд $\rightarrow \frac{L}{4} - l_3 + l_1 + \frac{L}{4} - l_2 + l_4 = \frac{L}{2}$
 $\Rightarrow$ Сумма дуг (или) const.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

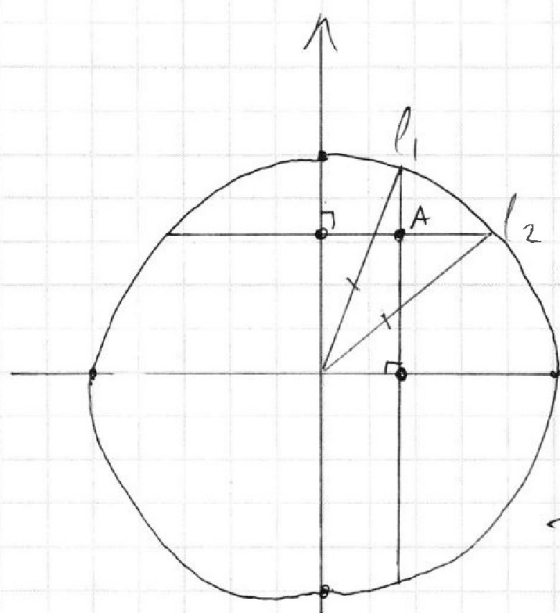
1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐

СТРАНИЦА

2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

3) Зная длину радиуса, максимальная, если сумма длин двух хорд max.



l_2 - длина хорды от A до C

$$y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$l_1 : y = 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

Нужно симметрично, потому что если хотим max функции хорд от A до C относительно OA , то max функции OA хорд. радиус OA

$$l_1 \rightarrow t_1, l_2 \rightarrow t_2$$

Тогда по Т. Пифагора:

$$t_1^2 + t_2^2 = 32$$

По неравенству Коши:

$$\begin{cases} 25 - 18 \sin^2 \alpha = t_1^2 \\ 25 - 18 \cos^2 \alpha = t_2^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 25 - 18 \sin^2 \alpha = t_1^2 \\ 25 - 18 \cos^2 \alpha = t_2^2 \end{cases}$$

$$\frac{t_1 + t_2}{2} \leq \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}} = 4 \Leftrightarrow t_1 + t_2 \leq 8$$

$$\Leftrightarrow l_1 + l_2 \leq 16.$$

Соответственно μ -во достигается когда $t_1 = t_2 = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{Тогда } \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Значит } M = \frac{2\sqrt{r}}{2} + (l_1 + l_2)_{\max} = 5\sqrt{2} + 16$$

$$\text{Ответ: } 5\sqrt{2} + 16; \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$



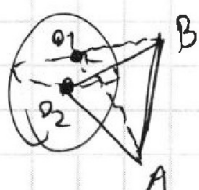
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☒

СТРАНИЦА
 __ ИЗ __

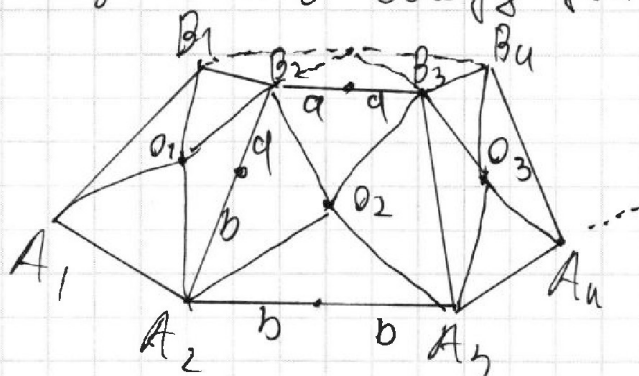
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Давайте найдем, что нам даёт вписанность
 шара в угол



По св-ву касат. к шару: сфера:
 $[O_2AB] = [O_1AB]$.

Тогда в нашей правильной осн. пирамиде
 можно записать следующее: во первом



её боковые
 грани равност.
 треугольн. с
 осн. правильной
 n-угольником.

Во внешних: $\triangle B_1O_1B_2 = \triangle B_2O_2B_3 = \dots$ и $\triangle O_1B_2A_2 =$
 $\triangle A_1O_1A_2 = \triangle A_2O_2A_3 = \dots$

В силу симметрии, где $O_1, O_2, O_3 \dots O_n$
 точки касания
 граней с осн.

Тогда: $S_{\text{верх. осн}} = [O_1B_1B_2] + [O_2B_2B_3] + \dots =$
 $= n[O_2B_2B_3]$

$S_{\text{нижн. осн}} = [A_2O_1A_2] + [A_2O_2A_3] + \dots =$
 $= n \cdot [A_2O_2A_3]$

$S_{\text{бок}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{верх. осн}} + 2n[A_2O_2B_2]$

Тогда: $S_{\text{полн. осн}} = S_{\text{верх. осн}} + \cos \varphi S_{\text{бок}}$, где φ угол между боковой гранью и осн.

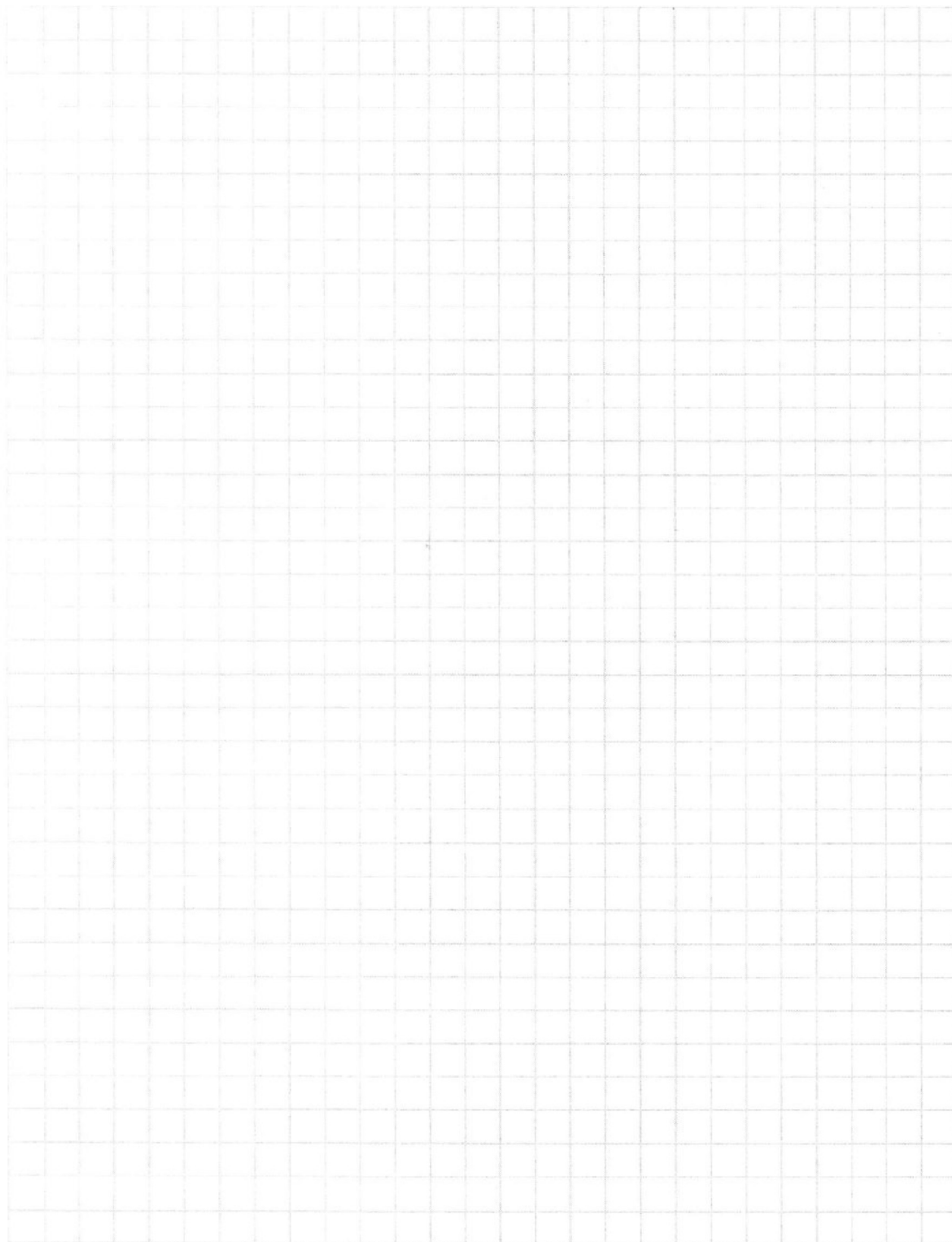


На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$S_{\text{осн.мн}} = [A_1 A_2 O_1] + [A_2 A_3 O_2] + [A_3 A_4 O_3] + \dots + [A_n A_1 O_n] =$$

$$= n \cdot [A_1 O_1 A_2]$$

$$S_{\text{осн.верн}} = [B_1 O_1 B_2] + [B_2 O_2 B_3] + \dots + [B_n O_n B_1] =$$

$$= n \cdot [B_1 O_1 B_2]$$

$$S_{\text{бок}_1} = [A_1 O_1 A_2] + [B_1 O_1 B_2] + 2[A_2 O_1 B_2]$$

$$S_{\text{бок}} = S_{\text{осн.мн}} + S_{\text{осн.верн}} + 2n[A_2 O_1 B_2]$$

$$A_2 B_2 B_3 A_3 - B_2 O_2 B_3 - A_2 O_2 A_3$$

$$S_{\text{осн.мн}} = S_{\text{осн.верн}} + S_{\text{бок}} \cdot \cos \varphi$$

$$S_{\text{бок}}(1 + \cos \varphi) = 2S_{\text{осн.мн}} + 2n[A_2 O_1 B_2]$$

$$\cos \varphi = \frac{b+a}{b+a} = \frac{S_{\text{осн.мн}}}{S_{\text{осн.верн}}} = \frac{[A_1 O_1 A_2]}{[B_1 O_1 B_2]} = \frac{h_1 \cdot b}{h_2 \cdot a}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4) 4 выбираем из X

из 2
5

$$2,5 \cdot \frac{4}{X} \cdot \frac{3}{(X-1)} = \frac{K}{X} \cdot \frac{K-1}{X-1}$$

$$K^2 - K - 30 = 0$$

$$K = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{2} = \frac{1+11}{2} = 6.$$

~~4 из 3~~

4 из 6

2 из 3

$$= \frac{4! \cdot (X-1)!}{3! \cdot X!} \cdot \frac{3! \cdot (X-2)!}{2! \cdot (X-1)!} = \frac{C_4^1}{C_X^1} \cdot \frac{C_3^1}{C_{X-1}^1} = \frac{4}{X} \cdot \frac{3}{X-1}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{AB^2 + AT^2 - BT^2}{2AB \cdot AT} = \dots$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N6

а) $(x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 25, \\ \sin \alpha, \cos \alpha \in [-1; 1] \end{cases}$

в) — ~~не выполняется~~

(1) Рассмотрим случаи:

1. $x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha$ и $y \geq 3\sqrt{2} \cos \alpha$
2. $x \geq 3\sqrt{2} \sin \alpha$ и $y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha$

$x = 3\sqrt{2} \sin \alpha$
 $y = 3\sqrt{2} \cos \alpha$

$t_1^2 + t_2^2 = 32$

$\frac{t_1 + t_2}{2} \leq \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}}$

$t_1 + t_2 \leq 8$

$25 - 18 \sin^2 \alpha = t_1^2$
 $25 - 18 \cos^2 \alpha = t_2^2$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$
$$M = x^3 - y^3 - 3xy.$$

$x, y > 0$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$\Rightarrow \frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)}$ или $(x-1)(y+1) = xy$
не можем делить ~~$xy + x - y - 1 = xy$~~
тк $y+x+2 > 0$ $x = y+1$
 $y = x-1$

$$M = x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1)$$

$$\begin{aligned} & (x-y)(x^2+xy+y^2) - 3xy = \\ & = x^2 + x(x-1) + (x-1)^2 - 3x(x-1) = \\ & = x^2 + x^2 - x + x^2 - 2x + 1 - 3x^2 + 3x = \\ & = 1. \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$N_1(A; B; C) = ?$$

$$A = \overline{aaaa}$$

$$B = \overline{2bc}; \overline{b2c}; \overline{bc2}$$

$$C = \overline{3x}; \overline{x3}$$

$$A \cdot B \cdot C = k^2$$

$$A = 1111 \cdot a, \text{ где } a \in [1; 9]$$

$$1111 \cdot a \cdot B \cdot C = k^2; \quad \begin{array}{r} 1111 \overline{) 11} \\ 11 \\ \hline 01 \end{array}$$

$$101 \cdot 11 \cdot a \cdot B \cdot C = k^2$$

$$\text{Тоже если } k \in \mathbb{N}, \text{ то } B : 101, \text{ тк}$$

Трёхзначные числа : 101:

101 кратное
101, 202, 303,
404, 505, 606, 707,
808, 909

$$\Rightarrow B = 202$$

$$\text{Тоже } 101^2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot a \cdot C = k^2$$

$$\text{Тоже тк } a \in [1; 9], \text{ то } C : 11$$

$$\Rightarrow C = \cancel{33} 33$$

$$101^2 \cdot 2 \cdot 11^2 \cdot 3 \cdot a = k^2$$

$$101^2 \cdot 11^2 \cdot 6 \cdot a = k^2 \Leftrightarrow a = 6$$

$$\text{Тоже: } A = 6666$$

$$B = 202$$

$$C = 33$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 _ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N 3

$$(\sin \frac{\pi}{2} x + \sin \frac{\pi}{2} y) \sin \frac{\pi}{2} x = (\cos \frac{\pi}{2} x + \cos \frac{\pi}{2} y) \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$2 \sin \frac{\pi}{2} (x+y) \cdot \cos \frac{\pi}{2} (x-y) \cdot \sin \frac{\pi}{2} x = 2 \cos \frac{\pi}{2} (x+y) \cos \frac{\pi}{2} (x-y) \cos \frac{\pi}{2} x$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) \left(\sin \frac{\pi}{2} (x+y) \cdot \sin \frac{\pi}{2} x + \cos \frac{\pi}{2} (x+y) \cos \frac{\pi}{2} x \right)$$

$$\Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} (x+y) + \frac{\pi}{2} x \right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} (x-y) \right) = 0$$

$$\cos \frac{\pi}{2} (x-y) = 0$$

$$\frac{1+\pi}{3} - 4 > -5$$

$$\frac{\pi}{2} (x-y) = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$1+2\pi - \pi > -18$$

$$x-y = 1 + 2k$$

$$2\pi > -12$$

$$x = y + (1 + 2k)$$

$$\pi > -6$$

$$3x+y = 1 + \dots$$

$$\frac{1+2\pi}{3} > -1$$

$$\pi > 5$$



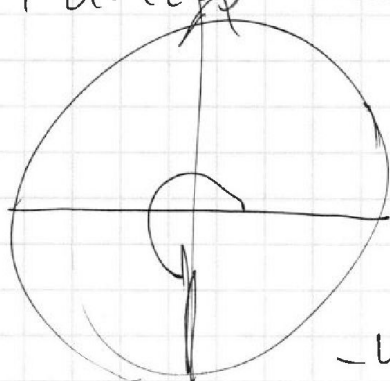
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x - (1+2k)}{4} < \frac{3\pi}{2}$$



$$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$-4 \leq x - (1+2k) \leq 4$$

$$-4 + (1+2k) \leq x \leq 4 + (1+2k)$$

$$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\text{Together } k \in \{ -1, 0 \}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{x+1}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{Case } x \leq -1, \text{ i.e.}$$

$$\frac{x}{5} < 0 \Leftrightarrow \arcsin \frac{x}{5} > \pi$$

$$\frac{x+1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \arccos \frac{x+1}{4} \geq \frac{\pi}{2} \quad \left. \vphantom{\frac{x+1}{4} \leq 0} \right\} > \frac{3\pi}{2}$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

$$x \geq$$

$$-5 \leq x \leq -\frac{4}{3}$$

$$-5 \leq x \leq -2$$

$$\frac{5}{3} \geq x \geq -1$$

$$1 \geq x \geq -\frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{3} \geq x \geq -\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \geq x \geq -\frac{4}{3}$$

$$0 \geq x \geq -2$$

$$2 \geq x \geq 0$$