



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ



11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нашло A можно записать как $1111 \cdot n$ т.к. $n=11, 99$
т.к. число A·B·C - четвртий квадрат, то при
разложении на простые множители каждое
простое число будет встречаться четное коли-
чество раз. $A:11, A:101, A:11^2, A:101^2 \Rightarrow B \cdot C:11, B \cdot C:101$
т.к. сгруппировано $\Rightarrow B:101$. ~~и~~ т.к. B-трехзначное
и $B:101 \Rightarrow B:11 \Rightarrow C:11$. т.к. $B:101$ и B кратны
сумме из цифр 2 то $B=202$. ~~одного~~ самое большое $C=33$
 $A \cdot B \cdot C = 1111 \cdot n \cdot 202 \cdot 33 = 1111^2 \cdot n \cdot 2 \cdot 3 = n \cdot 2 \cdot 3 = x^2 \Rightarrow n:6 \Rightarrow$
 $\Rightarrow n=6$ (т.к. $n \leq 99$). $\Rightarrow A, B, C$ - однозначные.
Ответ: {6666, 202, 33}



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x > 0, y > 0 \Rightarrow K > 0$$

$$x \cdot y \cdot K = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}\right) \cdot xy = y + x + 2$$

$$(x-1)(y+1) \cdot K = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}\right) \cdot (x-1)(y+1) = y+1 + x-1 + 2 = y+x+2 = K \cdot xy$$

$$K(xy - y + x - 1) = K \cdot x \cdot y$$

$$K \cdot x \cdot y + K(x-y-1) = K \cdot x \cdot y \Rightarrow K \cdot (x-y-1) = 0 \Rightarrow x-y-1=0 \text{ при } K > 0$$

$$y = x - 1$$

$$x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 + 3x^2 + 3x = 1$$

Ответ: 1

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

6)

$$x \in \mathbb{Z}$$

$$y \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$y = 1 - 3x + 2n_1$$

$$y = x + 1 - 2n_2$$

$$y = 1 - 3x + 2n_1$$

$$y = x + 1 - 2n_2$$

- при необходимости можно x и y поменять местами.

если $x+y$ x, y разной четности то выполняется

меньшей n_2 что $y = x+1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 3x + 2n_1 \\ y = x + 1 - 2n_2 \end{cases} \Rightarrow x, y$ разной

четности. $\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow |x| \leq 5$

$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \arccos \frac{y}{4} \in [0, \pi] \Rightarrow |y| \leq 4$

$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$ примени равенство только при

$x=1$ и $y=-1 \Rightarrow$ если $\begin{cases} x=5 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$

но из суммы четности мы получаем

$$x \in \mathbb{Z}$$

$$y \in \mathbb{Z}$$

$$|x| \leq 5$$

$$|y| \leq 4$$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq 4 \end{cases}$$

x, y -разной четности

также у нас есть 2 случая

если

1) $x \geq 2$ и $y \geq 2 \Rightarrow \{y, 2, 0, -2, -4\} \cup \{3, 1, -1, -3\}$ $y \in \{3, 1, -1, -3\}$
 \Rightarrow таких случаев $5 \cdot 4 = 20$

2) $x \leq 2$ и $y \leq 2 \Rightarrow \{5, 3, 1, -1, -3, -5\} \cup \{4, -2, 0, 2, 4\}$
 \Rightarrow таких случаев $6 \cdot 5 = 30$

но случаи $(5, -4)$ -не подходит так как $y \neq 4$ потому $|y| = 4$

ответ: 49



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

 1 2 3 4 5 6 7СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

a)

$$\text{нужно } \bar{J}[\alpha] = \lambda \quad \bar{J}[\beta] = \beta$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \lambda = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \lambda$$

$$\sin^2 \lambda + \sin \alpha \sin \beta = \cos^2 \lambda + \cos \alpha \cos \beta$$

$$\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 0$$

$$\cos 2\lambda + \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\cos 2\lambda = -\bar{J}[\cos(\bar{J}[\alpha] + \beta)] \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = \bar{J}[\alpha] - \beta + 2\pi n_1 & n_1 \in \mathbb{Z} \\ 2\lambda = \alpha + \beta - \bar{J}[\beta] + 2\pi n_2 & n_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\beta = \bar{J}[(2n_1 + 1)\pi] - 3\lambda$$

$$\beta = \lambda + \bar{J}[(1 - 2n_2)\pi]$$

$$\begin{cases} \bar{J}[\beta] = \bar{J}[(2n_1 + 1)\pi] - 3\bar{J}[\alpha] \\ \bar{J}[\beta] = \bar{J}[\alpha] + \bar{J}[(1 - 2n_2)\pi] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 2n_1 + 1 - 3\alpha \\ \beta = \alpha + 1 - 2n_2 \end{cases} \Rightarrow$$

\Rightarrow если пара (x_1, y_1) удовлетворяет равенству $y = 3x + 1$

или $y = x + 1$ или $y = x + m$ ($y = x + m$ $(x_1, y_1 + 2m)$ бывают между собой. Такое выражение $L \Rightarrow (x_1, y_1)$ можно), то

$$(\sin \bar{J}[\alpha] + \sin \bar{J}[\beta]) \sin \bar{J}[\lambda] = (\cos \bar{J}[\alpha] + \cos \bar{J}[\beta]) \cos \bar{J}[\lambda]$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

н - количество однотипных предметов

к - количество людей в конфете Масяна ($n \geq 4$)

Найдём вероятность что обеим попадут на компьютер. Для этого найдём все четырёхмерные пары где есть Таня и Ваня и подсчитаем сколько из них попадают на обеих.

Если в четырёхмерной паре Таня и Ваня есть, то с ними могут быть ещё два человека \Rightarrow всего таких четырёхмерных $C_{n-2}^2 = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}$, а общее количество четырёхмерных $C_n^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!} \Rightarrow$ вероятность что обеим попадут в машину Масяна

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)!}{2!(n-4)!}}{\frac{n!}{4!(n-4)!}} = \frac{(n-2)! \cdot 4!}{n! \cdot 2!}$$

ищем общую вероятность что обеим попадут в конфете Масяна

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{\frac{(n-2)! \cdot k!}{(n-k)!(n-k-2)!}}{\frac{n!}{(n-k)!(k-2)!}} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot n!}$$

$$10 \text{ уч. } 2,5 \cdot \frac{4! \cdot (n-2)!}{2! \cdot n!} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot n!} \Rightarrow \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$30 = k(k-1)$$

$$k=6 \quad k=-5 - \text{не могу } k > 4$$

$$\text{Ответ: } k=6$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

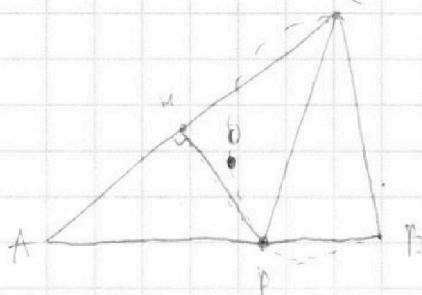
5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Решение:

О - центр отписанной окружности

$\triangle ABC$

$P O \perp AB$ - искомая высота окружности

$$AP = \frac{15}{2}; BP = 5; AC = 9$$

Найти: $S_{\triangle ABC}$

Решение: нужно $\angle COB = \angle CAB = 2d$

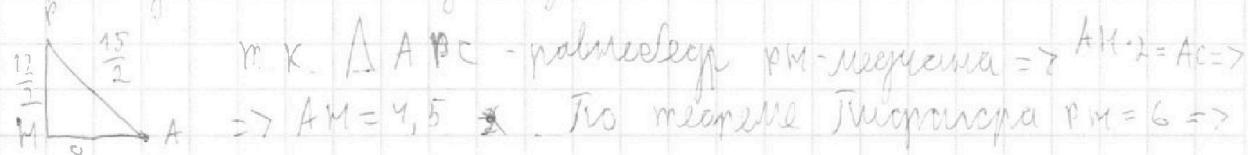
$$2\angle CAB = \angle COB \text{ (m.k. } O \text{ - центр окружности)} = 2d$$

$$\angle COB = \angle CPB \text{ (m.k. оба угла опираются на одну } CB) = 2d$$

$$\angle CAP + \angleACP = \angle CPB \Rightarrow d + \angle ACP = 2d \Rightarrow \angle ACP = d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle APC \text{ - равнобедренный с основанием } AC \Rightarrow AP = CP = \frac{15}{2}$$

находим высоту при вершине P над AC



m.k. $\triangle AMP$ - равнобедренный по-многим $\Rightarrow AM = MP = 7,5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin d = \frac{7,5}{15/2} = \frac{7,5}{7,5} = \frac{4}{5}, \quad AB = AP + PB = \frac{15}{2} + 5 = 12,5$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin d = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} = 9 \cdot 5 = 45$$

Ответ: 45.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

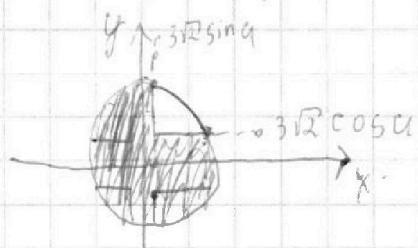
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$x^2 + y^2 \leq 15 \Rightarrow$ все點а притупа находятся в окружности с центром в начале координат и радиусом 5

$$(x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \end{cases}$$

и.e. круг будет ограничен тем множеством



будет ограничено множеством точек, для которых $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

$$3\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 3 \quad \text{получаем}$$

$$3\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{3}$$

Беззнаком $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ тогда $\sin\alpha = \cos\alpha$

тогда если мы α принимаем увеличение периода

мы будем получать $3\sqrt{2}$ т.е. $3\sqrt{2}\sin\alpha_2 \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha_1$!

но $3\sqrt{2}(\sin^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2)$ тогда получим $3\sqrt{2}\sin\alpha_2 = \sqrt{3}\sin\alpha_1 - K$

$$\alpha_2 3\sqrt{2}\sin\alpha_2 \cos\alpha_2 = 3\sqrt{2}\sin\alpha_1 \cos\alpha_1 + Z \quad (K > 0, Z > 0)$$

$$(\sin\alpha_1 - K)^2 + (\cos\alpha_1 + Z)^2 = \sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1$$

$$-2K\sin\alpha_1 + K^2 + 2Z\cos\alpha_1 + Z^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2K\sin\alpha_1 - 2Z\cos\alpha_1 > 0 \Rightarrow$$

L



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

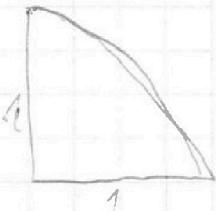
5

6

7

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



Участок описанного окружности между симметрическими радиусами

$$1 - \text{сектор радиуса } \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 25\pi/10\pi - \frac{\pi}{2} + 2$$

$$\text{Ответ } 10\pi/2 + 2$$

L

L

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!



$$\begin{aligned}
 & (n-2) - [k-2] = n-2-k+2 = \\
 & = (n-k) \quad \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \cdot \cancel{\frac{1!}{(n-4)!}} \quad \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \\
 & \cancel{\frac{1}{n}} \quad \cancel{\frac{2}{n-1}} \quad \cancel{\frac{3}{n-2}} \quad \cancel{\frac{4}{n-3}} \quad \cancel{\frac{5}{n-4}} \quad \cancel{\frac{6}{n-5}} \quad \cancel{\frac{7}{n-6}} \\
 & C_n^2 = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \\
 & C_n^4 = \frac{(n-4)!n!}{(n-4)(n-3)} \\
 & \frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)(n-3)}{2!(n-4)} = \frac{1}{2,5} \\
 & C_{n-2}^{k-2} = \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} \\
 & C_n^{n+k} = \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \cdot \frac{1}{C_n^4} \cdot \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \cdot \frac{n!}{n!} \\
 & \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot n!} \cdot \frac{(n-2)! \cdot k!}{n!} \\
 & 2,5 \cdot \frac{4! \cdot (n-2)!}{2! \cdot n!} = \frac{(n-2)! \cdot k!}{(k-2)! \cdot n!} \\
 & 30 = k(k-1) \cdot \frac{n!}{(n-4)!} = A_{k,n}^{n-k} \\
 & k^2 - k - 30 = 0 \quad \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \\
 & k = 5,6 \quad \cancel{k=-5} \\
 & \cancel{\frac{1}{n}} \quad \cancel{\frac{2}{n-1}} \quad \cancel{\frac{3}{n-2}} \quad \cancel{\frac{4}{n-3}} \quad \cancel{\frac{5}{n-4}} \quad \cancel{\frac{6}{n-5}} \quad \cancel{\frac{7}{n-6}} \\
 & \frac{(n-2)!}{n!} \quad \frac{(n-2)!}{(n-4)!} \\
 & \frac{(n-2)!}{(n-5)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} \\
 & n+1 \cdot 2,5 = n! \quad C_n^4 = \frac{n!}{(n-4)! \cdot 4!} \\
 & 34 \cdot 1,5 = n! \quad (n-2)(n-3)(n-4) \\
 & 51 = n! \\
 & \frac{(n-2)!}{(n-5)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} \\
 & \frac{(n-2)!}{(n-5)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} \\
 & \frac{(n-2)!}{(n-5)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!} \\
 & \frac{(n-2)!}{(n-5)!} \cdot \frac{(n-1)!}{n!}
 \end{aligned}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

- 1 2 3

- 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x + \frac{1}{y} + \frac{2x}{y} - xy + x^2 - x$$

$$y + x + 2 = xyK$$

$$x - 1 + y + 1 + 2 \cancel{(x-1)(y+1)} = K(x-1)(y+1)$$

$$x^3 - y^3 - 3xy$$

$$x + y + 2(xy - y + x - 1) = K(xy - y + x - 1)$$

$$x + y + 2xy - 2y + 2x - 2 = Ky - xy + Kxy$$

$$(x - y)(x^2 + 2xy + y^2) - 3xy$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - 3$$

$$2xy - 2y + 2x - y = Kx - Ky - K$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$x^2$$

$$x = y + 1$$

$$K - x = 1 + \frac{x}{y} + \frac{2}{y}$$

$$xy \cdot K = y + x + 2$$

$$K - y = 1 + \frac{y}{x} + \frac{2}{x}$$

$$K(x-1)(y+1) = x + y + 2x$$

$$\boxed{Kx - Ky - 1 = 0}$$

$$K(xy - y + x - 1) = x + y + 2$$

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} + \frac{2}{y} - \frac{2}{x} = 1$$

$$Kxy - Ky + Kx - K = x + y + 2$$

$$x^2 - y^2 + 2x - 2y = xy$$

$$\cancel{x-1}$$

$$K(x - y - 1) = 0$$

$$(x - y)(x + y) + 2(x - y) = xy$$

$$x^3 - (x-1)^3$$

$$x - y - 1 = 0$$

$$(x - y)(x + y + 2) = xy$$

$$x^3 - (x-1)^3 - 3x(x-1) = x^3 - (x^3 + 3x^2 + 3x - 1) - 3(x^2 - x)$$

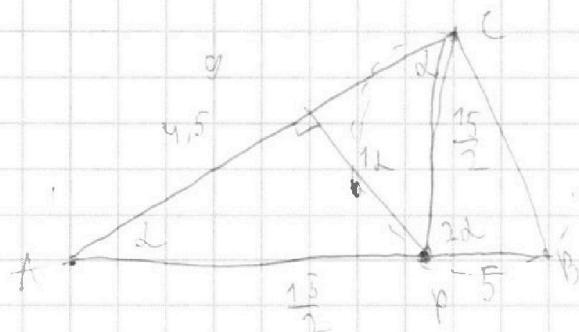
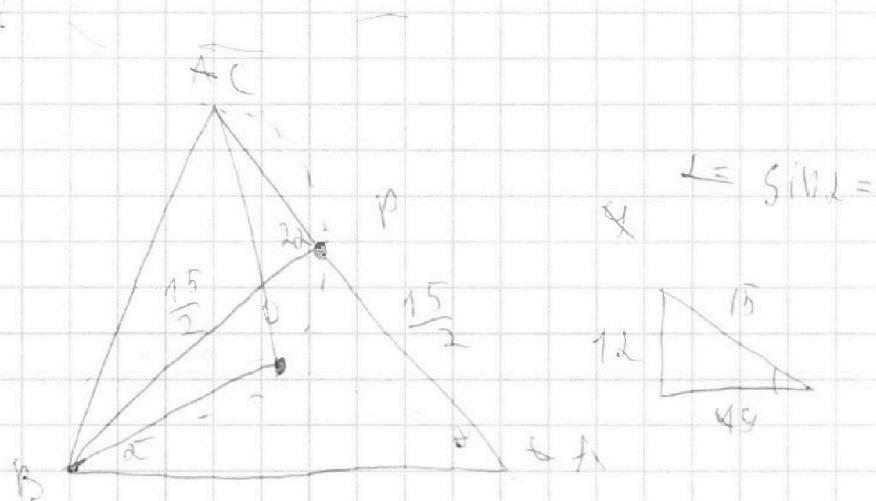
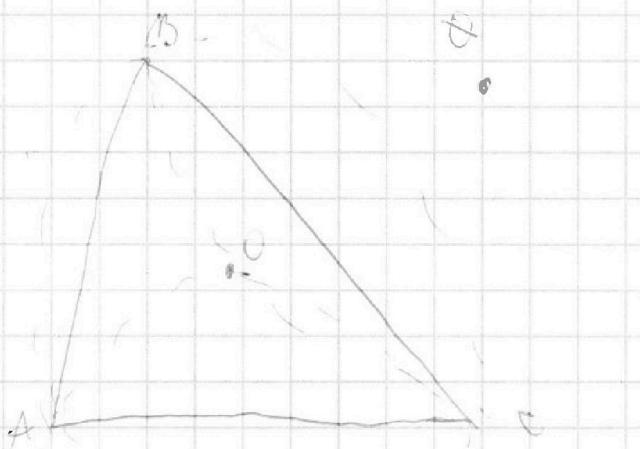
$$x^3 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 3x^2 + 3x$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

СТРАНИЦА
— ИЗ —

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ из _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

$$A = 1111 \cdot n$$

$$n \in [1, 9] \quad n \neq 1$$

$$1111 : 11 = 100 \text{ R} 80$$

$$\begin{array}{r} 1111 \\ \times 11 \\ \hline 10111 \end{array}$$

$$a \in [1, 9] \quad b \in [7, 9] \quad c \in [1, 9]$$

$$1111 \cdot n = 10111 - 11 \cdot c$$

$$a \cdot b \cdot c$$

$$\cancel{1}$$

$$10111 - 11 \cdot 3$$

$$\cancel{1} \quad 1111 \cdot n$$

$$n \cdot c = x^2$$

$$n \cdot 2 \quad n \cdot 3$$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(\sin \alpha x + \sin \beta y) \sin \frac{1}{2} \pi x = (\cos \alpha x + \cos \beta y) \cos \frac{1}{2} \pi x$$

$$(\sin \alpha + \sin \beta) \sin \alpha = (\cos \alpha + \cos \beta) \cos \alpha$$

$$\sin^2 \alpha + \sin \beta \sin \alpha = \cos^2 \alpha + \cos \beta \cos \alpha$$

$$\arcsin \frac{\alpha}{\beta} + \arccos \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos 2\alpha + \cos(\alpha + \beta) = 0$$

$$\cos 2\alpha = -\cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\pi - \alpha - \beta)$$

$$\cos 2\alpha = -\cos(\alpha + \beta) \quad \text{или} \quad \cos(\pi - 2\alpha) = \cos(\alpha + \beta)$$

$$\cos 2\alpha$$

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

$$2\alpha = \pi - \alpha - \beta + 2\pi n \quad \pi - 2\alpha = \alpha + \beta + 2\pi n \quad \alpha = \frac{1}{2}(\beta + 2\pi n)$$

$$2\alpha = \alpha + \beta - \pi + 2\pi n \quad \beta = \pi - 2\alpha$$

$$2\alpha = -\beta + \pi(2n+1) \quad 1 - 2\alpha = 2y + x + \pi(2n+1)$$

$$\alpha = \beta + \pi(2n+1)$$

$$\beta = \pi(2n+1) - 3\alpha$$

$$\alpha = \beta + \pi(2n+1)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$$

$$\cos 2\alpha$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 1 - 3x \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3x + 2n+1 - 3x \\ y = x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y + 3x = 2n+1 \\ x - y = \pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2\pi n \\ \alpha = -\beta + 2\pi n \end{cases}$$

$$y = 1 - 3x = 2n$$

$$\begin{cases} \pi y = \pi(2n+1) - 3\pi x = 7 \\ \pi x = \pi y + \pi(2n+1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2n+1 - 3x \\ x = y + 2n+1 \end{cases}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$y = 1 - 3x + 2n_1$$

$$y = x + 1 + 2n_2$$

$$|x| \leq 5 \quad |y| \leq 4$$

~~1-3x~~

$$1 - 4 = 1 - 3x + 2n_1$$

$$5 = 3x - 2n_1 \quad 3x - 2n_1 = 5$$

2

$$\frac{1}{2} \times 1 \times \alpha = \alpha(2m+1)$$

30

$$8 - 4(5, 3, 1, -1, -3, -5) \quad (-4, -2, 0, 1, 4)$$

$$(4, 2, 0, 2, 4) \cdot (-3, -1, 1, 3)$$

20

4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4

-5

-4

-3

-2

-1

0

1

2

3

4

5

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

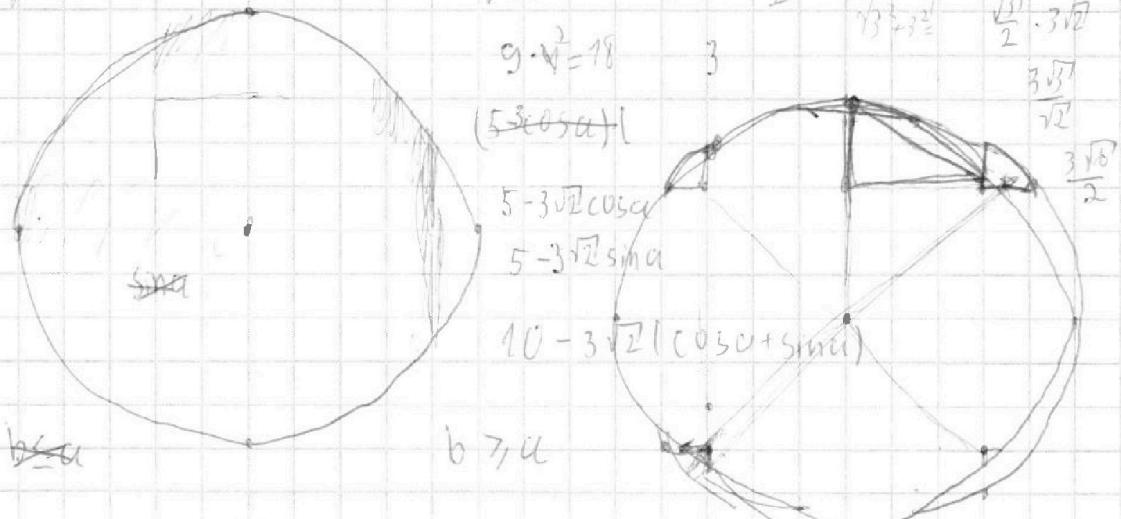
$$x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha \Rightarrow x \leq 3\sqrt{2}$$

$$y \leq 3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$3\sqrt{2}$$

$$3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{9+1}$$



~~b>a~~

$$x \leq 3\sqrt{2} \sin \alpha$$

$$2by - 2ax \geq 0$$

$$5(x-a)^2 + (y+b)^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + 2by + b^2$$

$$a^2 + b^2 + 2by - 2ax = 0$$

$$by \geq ax \quad x^2 + y^2 = 25$$

$$3^2 + y^2 = 5^2$$

$$2 - 2ax \geq 2by$$

$$a \geq b$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha$$

$$(3\sqrt{2} \sin \alpha)^2 +$$

$$(5 - 3\sqrt{2} \sin \alpha)^2 + (5 - 3\sqrt{2} \cos \alpha)^2$$

$$25 - 6\sqrt{2} \sin \alpha + 25 - 6\sqrt{2} \cos \alpha = 50$$

I-

I-



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$3(\sqrt{2} \sin \alpha + y^2) = 25$$

$$x^2 + (\sqrt{2})^2 \cos^2 \alpha = 25$$

$$\cancel{x \cos \alpha} \cancel{3\sqrt{2}}$$

$$x^2 = 25^2 - 3\sqrt{2}^2 \cos^2 \alpha$$

$$\cancel{x = 5\sqrt{2}}$$



$x =$