МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.

   б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$
4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} (x + 4\sin\alpha)(y - 4\cos\alpha) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 36. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.
7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1.

- Так как A состоит из четырех одинаковых цифр, то A представимо в виде $A = a \cdot 1111 = a \cdot 101 \cdot 11$
  101 и 11 — простые, a — цифра $\Rightarrow$ B или C $\vdots 11$, $\vdots 101$

- $C \leq 99$, так как двузначное $\Rightarrow$ C не может делиться на 101 $\Rightarrow B \vdots 101$. Очевидно, что единственное трехзначное число, кратное 101, в записи которого есть 7 это 707.

- $707 \not\vdots 11 \Rightarrow C \vdots 11$. В записи C есть 1 $\Rightarrow C = 11$.

- $B \vdots 7$, $C \not\vdots 7 \Rightarrow A \vdots 7 \Rightarrow a = 7$ $A = 7777$.

Их произведение $7777 \cdot 707 \cdot 11 = (11 \cdot 101 \cdot 7)^2$

Ответ: 7777; 707; 11.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$$k = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y+3}{xy} =$$

$$k = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x+4)(y+4)} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

x, y - положительные $\Rightarrow x+y+3>0$.

$\Rightarrow$ единственный вариант равенства этих выражений: $xy = (x-4)(y+4)$

$$xy = xy - 4y + 4x - 16.$$

$\underline{y = x-4}$ Подставим это в M.

$$M = x^3 - (x-4)^3 - 12\cdot x\cdot(x-4) =$$
$$= x^3 - (x^3 - 12x^2 + 48x - 64) - 12x^2 + 48x = 64.$$

$\Rightarrow \underline{M = 64}$

Ответ: 64.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 3

а) $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$

$\sin^2 \pi y - \sin \pi x \cdot \sin \pi y = \cos^2 \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$

$\cos \pi x \cdot \cos \pi y + \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos^2 \pi y - \sin^2 \pi y = 0$

$\cos(\pi x - \pi y) + \cos(2\pi y) = 0.$

$\cos(\pi x - \pi y) = -\cos(2\pi y)$

$\pm 2\pi y = \pi \pm (\pi x - \pi y) + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

$3\pi y = \pi x + \pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}$

$\pi y = -\pi x + \pi(2k+1)$

$$\left[\begin{array}{l} 3y = x + (2k+1), k \in \mathbb{Z} \\ y = -x + (2k+1), k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Итого: ~~Ответ~~ $y = \frac{x}{3} + \frac{2k+1}{3}, k \in \mathbb{Z}$

$y = -x + 2k + 1, k \in \mathbb{Z}.$

0

б) $\arccos \frac{x}{7} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\frac{y}{4}) \in$ ~~$[0; \pi]$~~ $\in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

$\Rightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$.

$\Rightarrow$ ~~это в~~

$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} \neq \frac{\pi}{2}.$

Найдем такие x и y, чтобы равенство выполнялось.

$\cos(\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0.$

$\cos(\arccos \frac{x}{7}) \cdot \cos(\arcsin \frac{y}{4}) + \sin(\arccos \frac{x}{7}) \cdot \sin(\arcsin \frac{y}{4}) = 0$

$\frac{x}{7} \cdot \sqrt{1 - \frac{y^2}{16}} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{49}} \cdot \frac{y}{4} = 0$

$\frac{x}{7} \cdot \frac{\sqrt{16 - y^2}}{4} + \frac{\sqrt{49 - x^2}}{7} \cdot \frac{y}{4} = 0$

$x\sqrt{16 - y^2} + y\sqrt{49 - x^2} = 0.$

Это неравносильность, это следствие $\Rightarrow$ потом будем подставлять корни.

$x^2(16 - y^2) = y^2(49 - x^2)$

$16x^2 - x^2y^2 = 49y^2 - x^2y^2$

$16x^2 = 49y^2.$

x, y – целые

$\Rightarrow y \vdots 4, x \vdots 7. \quad y \leq 4, x \leq 7$

$\Rightarrow$ Решение: $(0; 0), (\pm 7; \mp 4)$.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№3. Продолжение

Итого мы имеем,

нам удовлетворяют все $x \in [-7;7]$, $y \in [-4;4]$

кроме $0;\ \pm4;\ \pm7$.

$\Rightarrow x \in (-7;0)\cup(0;7)$ $\quad y \in (-4;0)\cup(0;4)$

Еще они должны удовлетворять первому уравнению.

$3y = x + (2k+1),\ k \in Z$.

y - целое $\Rightarrow x+(2k+1) \vdots 3$. Т.к. $|y| \le 4$, $|x| \le 7$:

у x и y разная четность.

$x = -7;\ y = 4$ - не подходит под второе

$x = -7;\ y = -2;\ y = 0;\ y = 2;\ y = -4$.

$x = -6,\ y = -3;\ -1;\ 1;\ 3$.

~~$x=-5$, $y=$ 4 вар.~~ На каждый

четный x кроме уже 4 вар.

На каждый нечетный кроме ±7

у нас 5 вар. с ±7 - 4ыре.

Итого $6\cdot5+2\cdot4+7\cdot4 = 38+26 = \underline{64}$.

$y = -x+(2k+1),\ k \in Z$. Все то же самое, четность разная, пары те же, вариантов столько же $\underline{64}$.

Но это те же пары $\Rightarrow$

$\underline{64 \cancel{+64=128}}$. Второй раз их не учитываем.

Ответ: а) $3y = x+2k+1,\ k \in Z$

$y = -x+2k+1,\ k \in Z$.

б) ~~128 вар.~~ 64 пары.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4.

Если билетов 4: количество вариантов раздать билеты: C_n^4, где n – количество одиннадцатиклассников.

количество вариантов раздать билеты, чтобы Пете и Васе вместе попали: C_{n-2}^2.

Вероятность: $\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \cdot \frac{4!(n-4)!}{n!} = \frac{12}{n!}$

Если билетов $x+4$: кол-во вар. раздать: C_n^{4+x}

кол-во вар. раздать чтобы П и В вместе: C_{n-2}^{2+x}

Вероятность: $\frac{C_{n-2}^{2+x}}{C_n^{4+x}} = \frac{(n-2)!}{(2+x)!(n-4-x)!} \cdot \frac{(4+x)!(n-4-x)!}{n!} = \frac{(4+x)(3+x)}{n!}$

По условию, вторая вероятность в 11 раз больше первой

$$\frac{(4+x)(3+x)}{n!} = \frac{11 \cdot 12}{n!}$$

$(4+x)(3+x) = 121$

$x^2+7x-120=0$

$(x+15)(x-8)=0$. Так. как. количество билетов увеличилось, $x>0$

$\Rightarrow \underline{x=8}$

$\Rightarrow$ Всего было выдано $8+4=12$ билетов

$\boxed{\text{Ответ: 12 билетов}}$

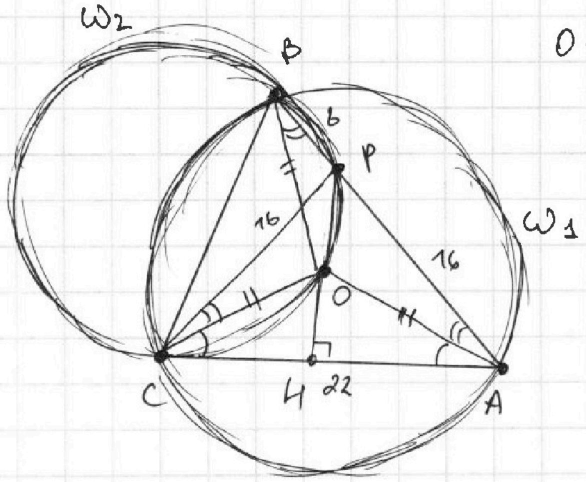
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 5



O – центр ω_1, описанной около ABC

$\Rightarrow OB = OA = OC$

$\Rightarrow \angle OCA = OAC$ т.к. $\triangle COA$ – равнобедр.

$\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA$ т.к.

$\triangle BOA$ – равнобедр.

OCBP – вписанный $\Rightarrow$

$\angle PBO = \angle PCO$.

$\Rightarrow \angle OCP = \angle OAP$

$\Rightarrow \angle CAP = \angle PCA \Rightarrow$

$\triangle PCA$ – равнобедренный $\Rightarrow$

$PC = AP = 16$.

O – центр ~~вп~~ описанной $\Rightarrow$

O лежит на серпере к AC.

$CP = PA \Rightarrow P$ лежит на серединном перпенд. к AC

$\Rightarrow$ PO – серпер. к AC

Пусть PO пересекает AC в т. H.

$\Rightarrow$ т.к. серпер, H – середина AC, $\angle AHP = 90$

$\Rightarrow AH = 11$. ($AC/2$)

$$\cos\angle A = \frac{AH}{AP} = \frac{11}{16}$$

$$\sin\angle A = \sqrt{1 - \frac{121}{256}} = \frac{\sqrt{135}}{16}$$

$$S_{\triangle ABC} = AC \cdot AB \cdot \frac{1}{2}\sin\angle A =$$

$$= 22 \cdot (8+16) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{135}}{16} = \frac{22 \cdot 24 \cdot \sqrt{135}}{16 \cdot 2} =$$

$$= \frac{33}{2}\sqrt{135}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \frac{33}{2}\sqrt{135}}$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

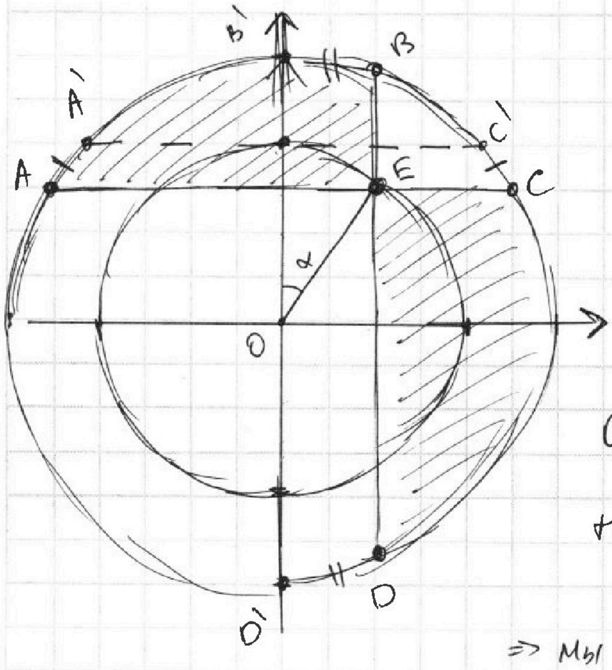
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6.

$x^2+y^2 \leq 36$ – это круг с центром в $(0;0)$ и радиусом 6.

Прямые $x=-4\sin\alpha$ и $y=4\sin\alpha$ образуют две хорды, одна параллельна оси Ox, другая – Oy. Сама же точка $(-4\sin\alpha; 4\cos\alpha)$ лежит на окружности радиуса 4.

Периметром M является сумма двух хорд и двух дуг, лежащих в левой-верхней и правой-нижней четвертях.



Назовем хорды AC и BD

Теперь возьмем $\alpha = 0$, отметим для неё A', B', C', D'.

Заметим, что т.к. $A'C' \parallel AC \parallel Ox$; $B'D' \parallel BD \parallel Oy \Rightarrow$

$\smile AA' = \smile CC'$; $\smile BB' = \smile DD'$

$\Rightarrow \smile AB + \smile CD = \smile A'B' + \smile C'D'$

Очевидно, что $\smile A'B' + \smile C'D'$ – половина полной длины окружности, т.к. $\smile A'B' = \smile B'C'$, $\smile A'D' = \smile C'D'$ из симметрии

$\Rightarrow \smile AB + \smile CD = const = \pi \cdot 6.$

$\Rightarrow$ Мы максимизируем $AC+BD$.

Пусть O – точка $(0;0)$, $E = AC \cap BD$.

$OE = 4$, $\angle EOB' = \alpha$. $AO = 6$.

$\Rightarrow AE = 4\sin\alpha + \sqrt{36-16\cos^2\alpha}$

$EC = \sqrt{36-16\cos^2\alpha} - 4\sin\alpha.$

$AC = 2\sqrt{36-16\cos^2\alpha}$

Аналогично $BD = 2\sqrt{36-16\sin^2\alpha} =$

$= 2\sqrt{36-16+16\cos^2\alpha}$

$AC+BD = 2\left(\sqrt{36-16\cos^2\alpha} + \sqrt{20+16\cos^2\alpha}\right) = 2a.$

$a \to max.$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6. Продолжение.

$$a^2 = 36-16\cos^2\alpha + 20+16\cos^2\alpha + 2\sqrt{36-16\cos^2\alpha}\sqrt{20+16\cos^2\alpha}$$

$$a^2 = 52 + 2\sqrt{36-16\cos^2\alpha}\sqrt{20+16\cos^2\alpha}$$

$$a^2 = 52 + 8\sqrt{9-4\cos^2\alpha}\sqrt{5+4\cos^2\alpha}$$

$$\sqrt{9-4\cos^2\alpha}\sqrt{5+4\cos^2\alpha} \to max.$$

$$-16\cos^4\alpha + 16\cos^2\alpha + 45 \to max.$$

это парабола ветвями вниз $\Rightarrow$

max в вершине

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}. \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow max \text{ при } \alpha = \pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k, k \in Z.$$

$$M = 6\cdot\pi + 2\left(\sqrt{36-8} + \sqrt{20+8}\right) = 6\pi + 4\sqrt{28} =$$
$$= 6\pi + 8\sqrt{7}.$$

Ответ: $M = 6\pi + 8\sqrt{7}$

$\alpha = \pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k, k \in Z.$

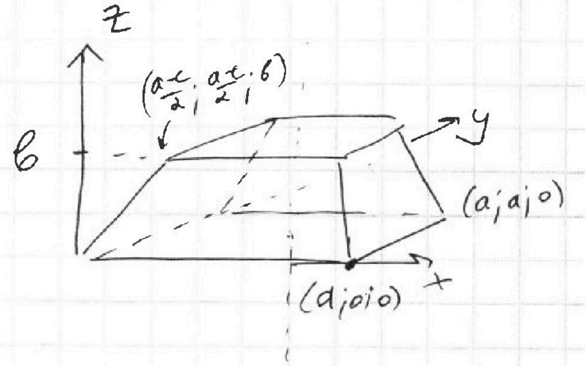
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц **в решении каждой задачи отдельно.**

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 7

Если шар ω касается всех граней, то он лежит в координатном центре пирамиды: в центре оснований в силу симметрии, и в центре по высоте т.к. касается верхнего и нижнего основания



Введем координатную ось: x и y направим вдоль двух перпендикулярных ребер большего основания, ось z — перпендикулярно этому же основанию. Пусть длина ~~...~~ большего основания — a, меньшего — c, высота — h.

Пусть центр ω — O_2. Тогда координаты т. O_2: $(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{b}{2})$.

Центр Ω — ~~O_2~~ O_1.

Т. O_1 равноудалена от ребер, т. O_2 — от граней $\Rightarrow$ точка O_1 и O_2 лежат на одной и той же оси симметрии, проходящей через центры оснований вдоль оси Z.

~~Заметим, что если мы увеличим ω до момента касания с ребрами, мы получим Ω, т.к. пирамида правильная $\Rightarrow$ O_1 и O_2 совпадают.~~

Посчитаем ~~т.~~ R_Ω^2:

$$R_\Omega^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (h+b)^2$$

где h — расстояние от ~~т.~~ O_2 до нижнего основания.

Выделим сечение — равнобокую трапецию с коорд. $(0;0;0)$; $(\frac{a-c}{2}; \frac{a-c}{2}; b)$, $(a;a;0)$, $(\frac{a+c}{2}; \frac{a+c}{2}; b)$

У нас есть окружность, которая касается всех ее ребер $\Rightarrow$ она вписанная

Её основания из т. Пифагора $a\sqrt{2}$ и $c\sqrt{2}$ $\Rightarrow$

~~$a\sqrt{2}+c$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

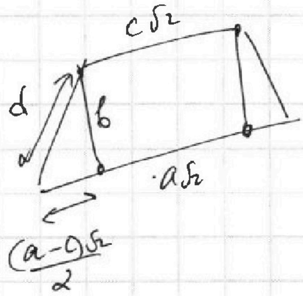
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№7. Продолжение

Её ребра из т. Пифагора: для $\triangle$ из точек $(0;0;0)$; $\left(\frac{a-c}{2}; \frac{a-c}{2}; b\right)$ и перпендикуляра из последней точки на основание



$$d^2 = \left(\frac{(a-c)\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \cancel{\frac{(a-c)^2}{2}} + b^2 = \frac{(a-c)^2}{2} + b^2.$$

Т.к. трапеция описанная:

$$c\sqrt{2} + a\sqrt{2} = 2d = 2\sqrt{\frac{(a-c)^2}{2} + b^2}$$

Это аналогично тому, что

$$d = \frac{(a-c)\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{Угол } ~~осн~~$$

у основания трапеции $= 45°$.

Заметим, что это и есть угол наклона б-новой грани.

$\boxed{\text{Ответ: } 45°}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

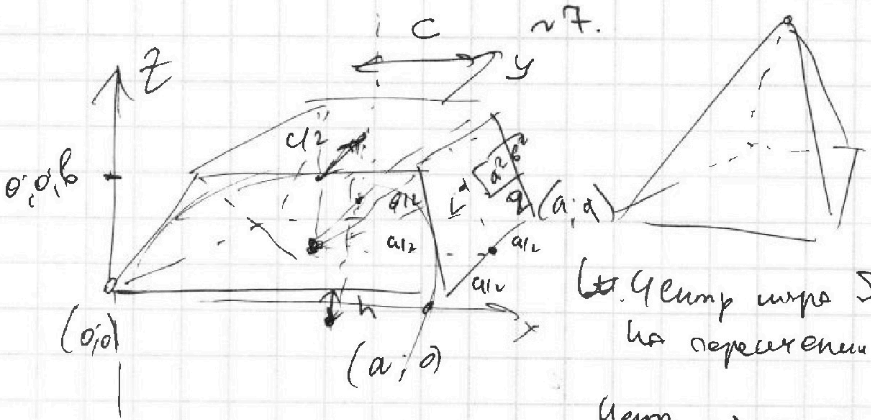
СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6. Черновик

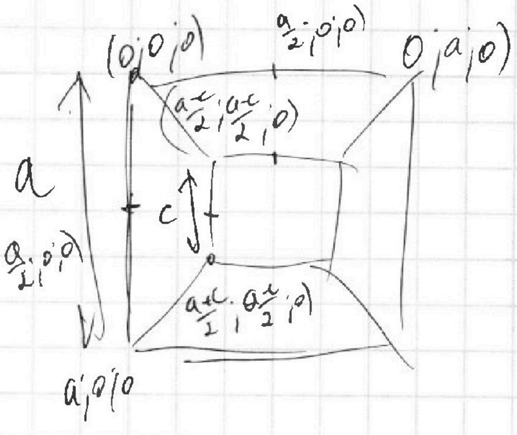
• Сумма дуг постоянна, так как при движении т. E мы симметрично изменяем одну дугу и другую уже убавляем с одной стороны и вычитаем с другой

№7.



Центр шара Ω на пересечении диагоналей.

Центр ω на пересечении биссектр. телесных углов.



По Xoy у O_1 и O_2 — O_1 — центр Ω, O_2 — центр ω.

шара. $\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

ω окажется в середине высоты.

$$R\omega = \frac{b}{2}$$

$$O_2: \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right).$$

$$R_\Omega^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (h+b)^2.$$

$$O_1 \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-h\right)$$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

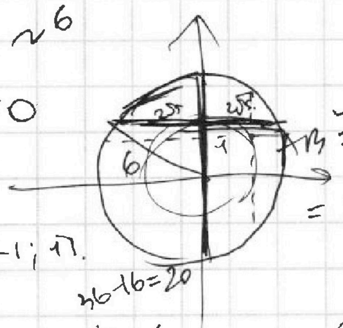
Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

Черновик

№6

$$\begin{cases}(x+4\sin\alpha)(y-4\cos\alpha)\le 0\\ x^2+y^2\le 36\end{cases}$$

$4\sin\alpha,\ 4\cos\alpha \in [-1;+1]$



$\pi\cdot 16+4\sqrt{5}+12=$

$AB^2=AE^2+EB^2=12(\pi+1)+4\sqrt5$

$=(a+\sqrt{16+a^2})^2+(\sqrt{36-a^2}-\sqrt{16-a^2})^2$

$36-16=20$

$\smile AB \sim AB$

$(a+\sqrt{26})^2+$

$2\sqrt{26}$

$x^2+y^2\le 36$ — круг $R=6$

$y=4\cos\alpha$ — прямая

$x=-4\sin\alpha$ — прямая.

$y\le 4\cos\alpha$, $x\ge -4\sin\alpha$

$y\ge 4\cos\alpha$, $x\le -4\sin\alpha$

$\sqrt{16+a^2}+\sqrt{36-a^2}\to\max$

$(AC+BD)^2=16+a^2+36-a^2+2\sqrt{16+a^2}\sqrt{36-a^2}$

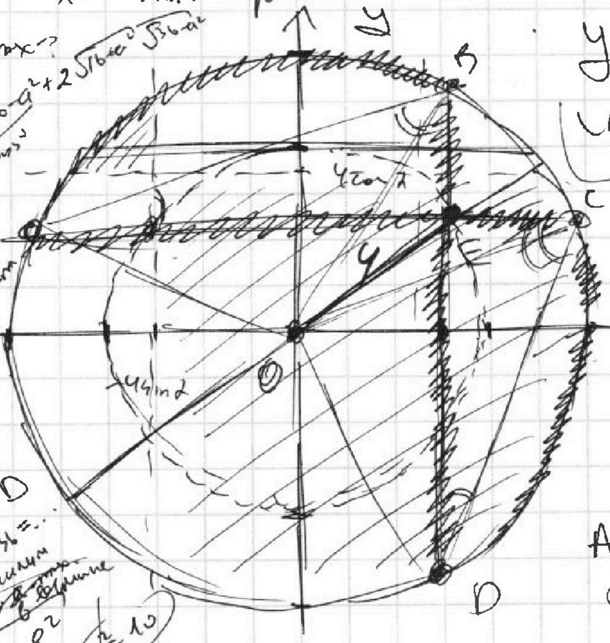
$\max\to 2\sqrt{(16+a^2)(36-a^2)}\to\max$

$(16+a^2)(36-a^2)$

$16\cdot 36+20a^2-a^4$

$a^2=10$

$\angle ABE \sim \triangle CED$



$\smile AB+\smile CD=$ const $=\pi\cdot 6$

Точка $(-4\sin\alpha;4\cos\alpha)$ лежит во окружности кругa 4.

$A=(-\sqrt{36-b^2};b)$

$C=(\sqrt{36-b^2};b)$

~~$AB\cdot CD$~~ $=$

$-a^4+20a^2+16\cdot 36$ максимум при a^2 в вершине

$AC=2\sqrt{36-b^2}$ $a^2=10$

$BD=2\sqrt{36-a^2}$

$\smile AB=6\cdot\angle AOB$

$\smile CD=6\angle COD$

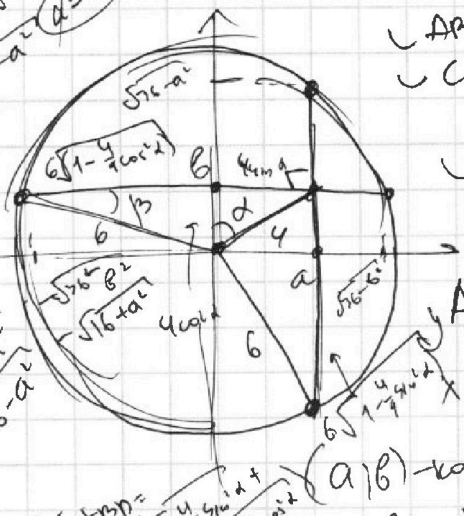
$6\sin\beta=4\cos\alpha$

$\sin\beta=\frac{2}{3}\cos\alpha$

$\smile AB+\smile CD=6(\angle AOB+\angle COD)$

$\cos\beta=\sqrt{1-\frac{4}{9}\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$



$E=(a;\sqrt{16-a^2})$

$AC=2\sqrt{36-16+a^2}=2\sqrt{16+a^2}$

$BD=2\sqrt{36-a^2}$

$y_A=y_E=y_C$

$x_B=x_E=x_D$

$(a;b)$ — коорд. т. E.

$B=(a;\sqrt{36-a^2})$ $D=(a;-\sqrt{36-a^2})$

$AC+BD=12\left(\sqrt{1-\frac{4}{9}\sin^2\alpha}+\sqrt{1-\frac{4}{9}\cos^2\alpha}\right)$

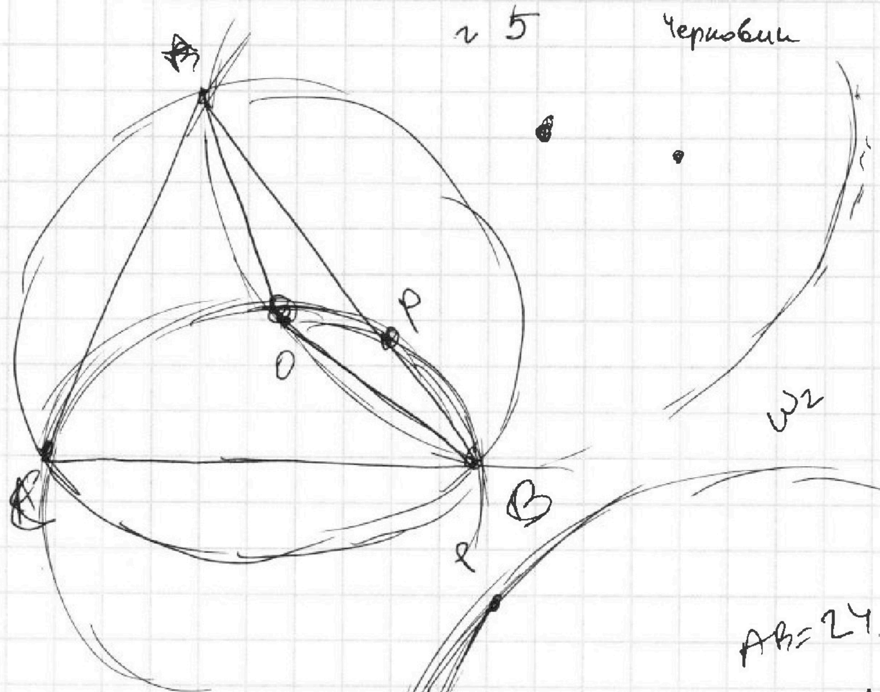
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

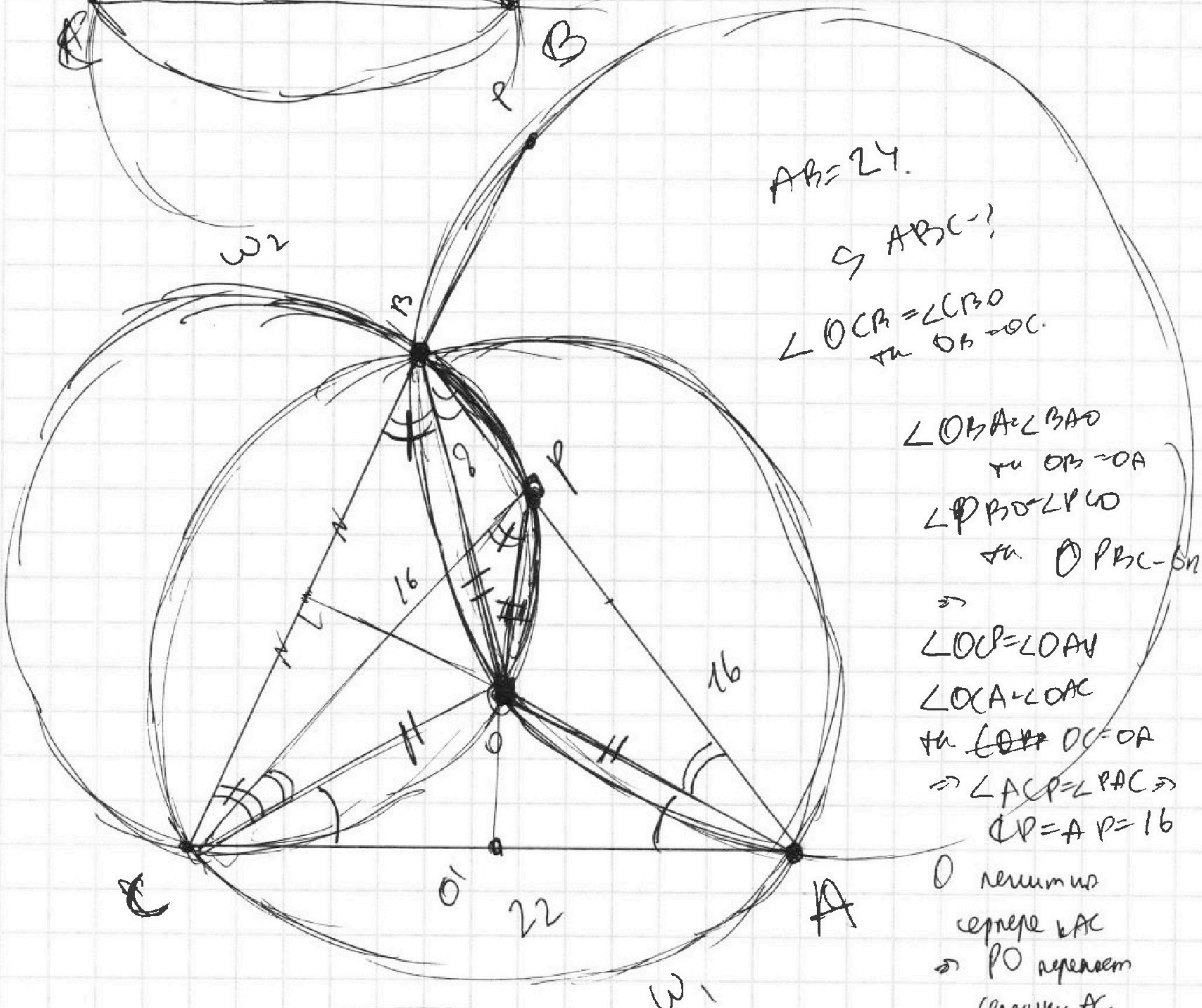
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 5 Черновик





AB=24.

S ABC-?

∠OCB=∠CBO т.к. OB=OC.

∠OBA=∠BAO т.к. OB=OA

∠PBO=∠PCO т.к. OPBC-впис

⇒

∠OCP=∠OAP

∠OCA=∠OAC

т.к. ~~COA~~ OC=OA

⇒ ∠ACP=∠PAC ⇒ CP=AP=16

O лежит на серпере к AC

⇒ PO пересечёт середину AC.

O'A=11.

PA=16

$\cos\angle A = \frac{11}{16}$.

$S=22\cdot 24\cdot\frac{\sqrt{135}}{16}\cdot\frac{1}{2}$

$16^2=\cancel{296}\ 256-121=135$

$\times 16,\ 16,\ 96,\ 16$

$\sin\angle A=\frac{\sqrt{135}}{16}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7 СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4 Черновик

>4 вып. напоминать. стало 4 вып.

Кол-во случайным образом выбрать 4ех из n 11-класс. $= C_n^4$.

Стало C_n^{4+x}

~~Верно~~ Вероятн
кол-во вариантов, когда Петя и Вася получат напоминание C_{n-2}^2

$$C_n^{4+x} = 11 \cdot C_n^4$$

$$\frac{n!}{(4+x)!(n-4-x)!} = \frac{11\cdot n!}{4!\cdot(n-4)!}$$

$$4!(n-4)! = 11\cdot(4+x)!\cdot(n-4-x)!$$

$$(n-4)(n-5)\cdot(n-4-x) = 11\cdot 5\cdot 6\ldots(4+x)$$

C_{n-2}^2 - кол-во вар., где П и В ода гонам

C_n^4 - всего вар. Стало:

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{4!(n-4)!}{n!} = 4\cdot3\cdot(n-4)(n-3)$$

$$\frac{C_n^{2+x}}{C_n^{4+x}} = \frac{n!}{(2+x)!(n-2-x)!}\cdot\frac{(4+x)!\cdot(n-4-x)!}{n!}$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!}{2!\cdot(n-4)!}\cdot\frac{4!(n-4)!}{n!} = \frac{12}{n(n-1)} = (n-4-x)(n-3-x)(4+x)(3+x)$$

$x=8$

$x+4=12$

$$11\cdot 12(n-4)(n-3) = \cancel{11}(n-4-x)(n-3-x)(4+x)(3+x)$$

$$121(n^2-7n+12) = (12+7x+x^2)(n^2-7n-2xn+12+7x+x^2)$$

$$121(n^2-7n+12) = (12+7x+x^2)(n^2-7n+12) + (12+7x+x^2)(x^2+7x-2xn)$$

$$\frac{C_{n-2}^{2+x}}{C_n^{4+x}} = \frac{(n-2)!}{(2+x)!(n-4-x)!}\cdot\frac{(4+x)!(n-4-x)!}{n!} = \frac{(4+x)(3+x)}{n(n-1)}$$

$n>4$ очевидно.

$23-7=16$

$23+7=30$

$\boxed{(x+15)(x-6)}$

$(x-15)(x+8)$

$(x-10)(x+12)$

$x^2+7x-120=0$

$$(4+x)(3+x) = 12\cdot11$$

$$12+7x+x^2 = 12\cdot11$$

$D = 49+480 = 529 = 23^2$

$x = \frac{-7\pm23}{2}$

$23\cdot23=69$, 460, 529

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1. Черновик

A четырехзнач из одинаковых $\overline{aaaa} \vdots 1111 = 101 \cdot 11$

B – трехзначное, хотя в одна из цифр 7

C – двузначное, хотя бы одна из цифр 1.

$A \cdot B \cdot C$ – квадрат натурального

$A = a \cdot 101 \cdot 11 \Rightarrow B$ или $C \vdots 11$, $\vdots 101$.

~~1) Пусть C ⋮ 11. Тогда C = 11.~~

$C \leq 99 \Rightarrow B \vdots 101$.

$B = 707$ т.к. $= 707 \cdot 7$

$101 \cdot 10 > 999$

и появилась цифра 7.

Заметим, что тогда $B \vdots$ ~~101~~ 11

$\Rightarrow C \vdots 11 \Rightarrow C = 11$ т.к. иначе нет 1.

$\Rightarrow A = 7777$ т.к. иначе делитель 7 в 1 степени

Ответ: 7777; 707; 11

№2

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{y+4} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$M = x^3 - y^3 - 12xy$ – ? $x \neq 0, y \neq 0; x \neq 4; y \neq -4$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{y+4+x-4+3}{(x-4)(y+4)} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

либо $x+y+3=0$, либо $y = -x-3$.

$(x-4)(y+4) = xy$.

$xy - 4y + 4x - 16 = xy$

$x - y - 4 = 0$.

$y = x - 4$

$M = x^3 + (x+3)^3 + 12x(x+3) =$

$= x^3 + (x+3)(x^2+6x+9+12x) =$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= x^3 + x^3 + 9x^2 + 9x + 81 +$

$+ 12x^2 + 36x = 2x^3 + 21x^2 + 63x + 81$. неподх $x=0$; $x=4$; $x=-3$; $x=1$

$M \neq 81$ $M \neq$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2 Черновик

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{3}{xy}=\frac{x+y+3}{xy}=\frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$

1) $x+y+3=0.$ $y=-x-3$

$M=2x^3+21x^2+63x+81$

$21\cdot16=320+16$

$21\cdot9=189$

$63\cdot3=189$

$x\neq0,\ x\neq4;\ x=1;\ x\neq-3 \Rightarrow$

$M\neq81$ $M\neq2\cdot64+21\cdot16+63\cdot4+81=$

$=128+336+252+81=$

$=588+128+81=716+81=797$

$x,y>0.$ $\Rightarrow M>0$

$M\neq2+21+63+81=23+144=167$

$M\neq-54+189-189+81=27$

$y=-x-3\Rightarrow$ это всего одна точка $16\cdot3=48\Rightarrow$ это не может

2) $(x-4)(y+4)=xy$ $4x-4y-16=0$ $y=x-4$

$M=x^3-(x-4)^3-12x(x-4)=$

$=x^3-(x^3-12x^2+48x-64)-12x^2+48x=$

$=64$

Ответ: 64

$\frac{x}{7}\cdot\sqrt{1-\frac{y^2}{16}}+\sqrt{1-\frac{x^2}{49}}\cdot\frac{y}{4}>0$

$\arccos\frac{x}{7}-\arcsin\frac{y}{4}>-\frac{\pi}{2}$

$\cos(\arccos\frac{x}{7}-\arcsin\frac{y}{4})>0$ от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$

№3

а)

$(\sin\pi y-\sin\pi x)\sin\pi y=(\cos\pi y+\cos\pi x)\cos\pi y$

можно искать x,y от 0 до 2.

$\sin(s+t)-\sin(s-t)=$

$=\sin s\cos t+\sin t\cos s-\sin s\cos t+\cos s\sin t=$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$

$=2\sin t\cos s.$

$\sin\pi y-\sin\pi x=2\sin\frac{\pi(y-x)}{2}\cdot\sin\frac{\pi(y+x)}{2}$

$\sin\pi y\sin\pi y-\sin\pi x\sin\pi y=\cos\pi y\cos\pi y+\cos\pi x\cos\pi y$

$\sin\pi y^2-\cos^2\pi y=\sin\pi x\sin\pi y+\cos\pi x\cos\pi y$

$\cos(2\pi y)=\cos(\pi y-\pi x)$

$\left[\begin{array}{l}2\pi y=\pi y-\pi x+2\pi k\\2\pi y=\pi x-\pi y+2\pi k\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}2y=y-x+2k\\2y=x-y+2k\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}y=2k-x\\3y=x+2k\end{array}\right.$