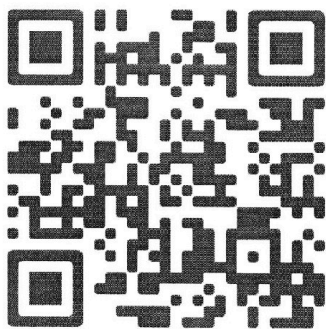
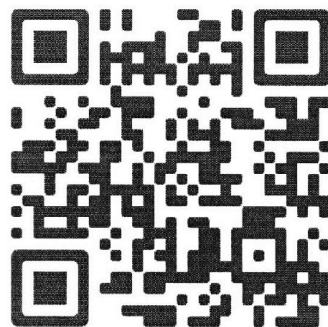




МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
 - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 7,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 4, а y — увеличить на 4. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 12xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$.
б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{7} - \arcsin \frac{y}{4} > -\frac{\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Пётя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 11 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 16$, $BP = 8$, $AC = 22$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 4 \sin \alpha)(y - 4 \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 36. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Найдите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости её основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Число A представимо в виде $n \cdot 1111$, где n — цифра, у которой сдвинуто число A

$$\Rightarrow A = n \cdot 11 \cdot 101$$

↑
третие число

$$\Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101 \Rightarrow A \cdot B \cdot C : 101^2, \text{ т.к. } ABC - \text{палаграм и } 101 - \text{простое}$$

$$C \text{ — простое } \Rightarrow C < 100, n - \text{цифра} \Rightarrow C < 100$$

$$\Rightarrow \text{если } ABC : 101^2, \text{ то } B : 101, \text{ т.к. } 101 - \text{простое}$$

$$B - \text{трёхзначное и } B = k \cdot 101 \text{ для некоторого } k$$

$$\Rightarrow B = \overline{kok}, \text{ одна из цифр } B \text{ равна } 7$$

$$\Rightarrow k=7 \Rightarrow B=707=7 \cdot 101$$

$$ABC : 11, \text{ т.к. } A : 11 \Rightarrow ABC : 11^2, \text{ т.к. } ABC - \text{палаграм и } 11 - \text{простое}$$

$$n - \text{цифра} \Rightarrow C < 10 \Rightarrow A : 11^2; B=707 : 11 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C : 11 \Rightarrow C = q \cdot 11 \text{ для некоторого } q, \text{ причём}$$

$$C - \text{двухзначное} \Rightarrow C = \overline{qq} \Rightarrow \text{т.к. } q \text{ — цифра}$$

$$q=1, C=11=1 \cdot 11$$

$$\Rightarrow A=n \cdot 11 \cdot 101, B=7 \cdot 101, C=11$$

$$\Rightarrow ABC = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 7n; ABC - \text{палаграм и } n > 0, < 10$$

$$\Rightarrow n=7 \Rightarrow A=7 \cdot 11 \cdot 101=7777, B=7 \cdot 101=707,$$

$$C=11. \text{ Тогда } ABC = (7 \cdot 11 \cdot 101)^2$$

$$\text{Ответ: } (7777; 707; 11)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐2
☒3
☐4
☐5
☐6
☐7
☐СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)} \quad | \cdot xy(x-4)(y+4)$$

$$y(x-4)(y+4) + x(x-4)(y+4) + 3(x-4)(y+4) = xy(y+4) + xy(x-4) + 3xy$$

$$+222 \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{3}{xy} = \frac{1}{(x-4)} + \frac{1}{(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y}{xy} + \frac{3}{xy} = \frac{x+y}{(x-4)(y+4)} + \frac{3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\frac{x+y+3}{xy} = \frac{x+y+3}{(x-4)(y+4)}$$

$$\Rightarrow x+y+3 = 0 \quad \text{или} \quad xy = (x-4)(y+4) \quad (x, y, x-4, y+4 \neq 0)$$

$$x+y+3 = 0 \quad \text{или} \quad xy = xy + 4x - 4y - 16$$

$$\Rightarrow x+y+3 = 0 \quad \text{или} \quad x-y=4 \quad (x, y, x-4, y+4 \neq 0)$$

$$\text{По условию } x, y > 0 \Rightarrow x+y > 0 \quad (\text{а также } x, y, y+4 > 0)$$

$$\Rightarrow x-y=4 \quad (x, y > 0, x-4 \neq 0)$$

$$\begin{aligned} x^3 - y^3 - 12xy &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) - 12xy = \\ &= 4x^2 + 4xy + 4y^2 - 12xy = 4(x^2 - 2xy + y^2) = \\ &= 4(x-y)^2 = 64 \quad (\text{подставив } x-y=4) \end{aligned}$$

$$64 \text{ достигается, например, при } y=1, x=5 \quad (k=\frac{9}{5})$$

Ответ: 64



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

N3

$$(\sin \pi y - \sin \pi x) \sin \pi y = (\cos \pi y + \cos \pi x) \cos \pi y$$

$$\sin^2 \pi y - \cos^2 \pi y = \sin \pi x \cdot \sin \pi y + \cos \pi x \cdot \cos \pi y$$

$$\cos(2\pi y) = \cos(\pi x - \pi y)$$

$$\Rightarrow 2\pi y = \pi x - \pi y + 2\pi k_1$$

k_1, k_2 - ~~целые~~

$$2\pi y = -\pi x + \pi y + 2\pi k_2$$

$$\Rightarrow 3y = x + 2k_1 \quad \text{или} \quad y = -\frac{x}{3} + 2k_2 \quad k_1, k_2 - \text{целые}$$

$$y = \frac{x}{3} + \frac{2}{3}k_1$$

$$\Rightarrow \text{две пары точек } (x; \frac{x}{3} + \frac{2}{3}k_1) \text{ и } (x; -\frac{x}{3} + 2k_2),$$

где k_1, k_2 - любые целые числа

a) Ответ: $(x; \frac{x}{3} + \frac{2}{3}k_1), (x; -\frac{x}{3} + 2k_2) \quad (k_1, k_2 - \text{целые})$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☒	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть одноплатных машин всего n , билетов в одну сторону выдано k .

Всего вариантов распределить билеты C_n^k , k билетов - C_n^k . Теперь рассмотрим, сколько вариантов распределить

билеты так, что и Васа, и Тера поедут на концерт.

Можно просто распределить оставшиеся $n-2 \geq 2$ и $k-2$ билетов соответственно между оставшимися одноплатными

машинами $\Rightarrow$ числом вариантов C_{n-2}^2 и C_{k-2}^{k-2}

C_{n-2}^{k-2} соответственно. Все случаи равновероятны $\Rightarrow$ условная вероятность Васа и Тера одновременно поехать на концерт

$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^k}$, полная $\frac{C_{k-2}^{k-2}}{C_n^k}$.

Обозначим их за p и q соответственно.

$$p = \frac{\frac{(n-2)(n-3)}{2!}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}} = \frac{4!}{2!} \cdot \frac{1}{(n-1)n} = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{(n-1)n}$$

$$q = \frac{\frac{(n-2)!}{(k-2)! \cdot (n-k)!}}{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}} = \frac{k!}{(k-2)!} \cdot \frac{1}{(n-1)n} = k \cdot (k-1) \cdot \frac{1}{(n-1)n}$$

$((n-2) - (k-2) = (n-k))$

По условию $q = 11p \Rightarrow \frac{q}{p} = 11$

$$\Rightarrow \frac{k(k-1)}{12} = 11 \Rightarrow k^2 - k = 132 \Rightarrow (k-12)(k+11) = 0$$

$k > 0 \Rightarrow k = 12$, то есть было выдано 12 билетов

Ответ: 12 билетов



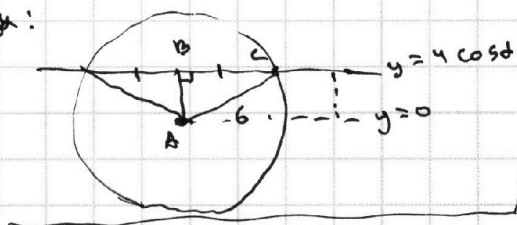
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

4:



N6 (продолжение)

мы покажем, что если суммарно
длины хорд $2a$ и $2b$,
то $a^2 + b^2$ фиксировано $\rightarrow$ т.н.

$a, b \geq 0$, $a+b$ max ~~достигается~~ достигается

- достигается при $a=b$. Если $a=b$, $\sqrt{36 - 16 \cos^2 \delta} = \sqrt{36 - 16 \sin^2 \delta}$

$$\Rightarrow 16 \cos^2 \delta = 16 \sin^2 \delta \Rightarrow \cos^2 \delta = \sin^2 \delta$$

$$\Rightarrow \cos \delta = \pm \sin \delta$$



$$\Rightarrow \delta = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ где } k -$$

- ~~любое~~ любое целое число

$$\Rightarrow a=b = \sqrt{36 - \frac{16}{2}} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow \text{Сумма длин хорд max} = 2(2\sqrt{7}) + 2(2\sqrt{7}) = 8\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow M_{\max} = 8\sqrt{7} + 6\pi \text{ и достигается при всех } \delta = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ где } k - \text{любое целое}$$

$$\text{Ответ: } 8\sqrt{7} + 6\pi; \delta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k - \text{целое.}$$



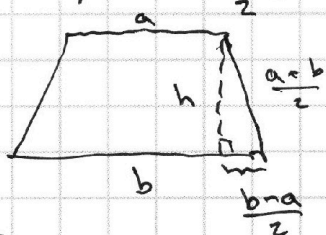
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть у этой правильной усечённой пирамиды ^{N2} основание - правильный n -угольник со стороной b , меньшее основание - правильный n -угольник со стороной a . ~~Решение~~

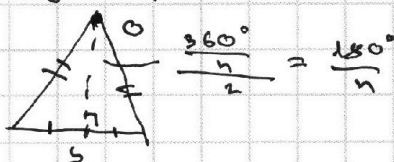
Если спроецировано центр шара Ω на боковую грань, мы получим точку, равноудалённую от рёбер этой грани на ней самой, т.е. центр шара равноудалён от всех рёбер усечённой пирамиды ($\Rightarrow$ все углы равны). Т.е. и сама боковая грань - ρ -окружность (усечённая прав. пирамида), но ~~окружность~~ центр Ω - центр вписанной окружности боковой грани $\Rightarrow$ высота боковой грани - описанная ρ -окружность $\Rightarrow$ ~~высота~~ сумма боковых сторон $a+b \Rightarrow$ высота из них равна $\frac{a+b}{2}$



$$\Rightarrow \text{по теореме Пифагора } h = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{ab}{2} - \left(-\frac{ab}{2}\right)} = \sqrt{ab}$$

Проведём грань, соединяющую центры оснований нашей усечённой пирамиды. ~~Решение~~ Центр сферы, вписанной в усечённую правильную пирамиду, лежит на этой грани и делит отрезок её, заключённый между основаниями, ^{равной} пополам (лежит на всех биссектрисах между основаниями и боковыми сторонами). Центр вписанной сферы - это центр шара ω . Эта грань проходит через центр правильного основания и перпендикулярна им ~~и~~ ω .

Заметим, что расстояние от центра правильного n -угольника до его стороны (сторона длины s) вычислится по формуле $\frac{s}{2} \cdot \cot\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$, т.е. каждая сторона круга рад угла $\frac{360^\circ}{n}$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

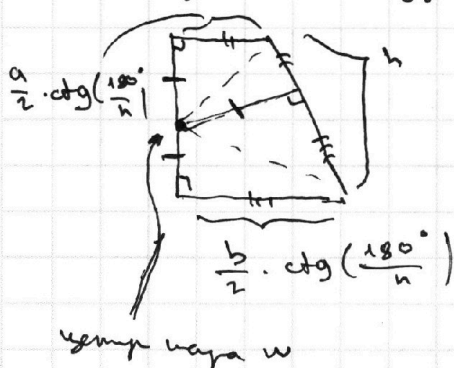
1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☒

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3 (сходственное)

Рассуждаем с помощью картины:



Отрезки, отмеченные 1 чертой равны радиусу круга w

$$\text{Значит, по теореме } h = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) + \frac{b}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

$$\Rightarrow \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

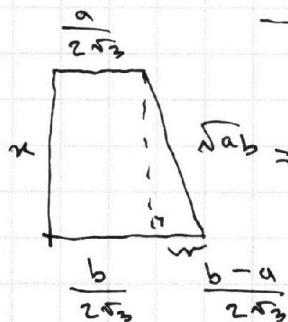
$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, \text{ так как } a \neq b$$

поэтому пер-во $\Rightarrow$ отрезки $a \neq b$
(если $a = b$, основания равны и это не упр.)
выражения

$$\Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) < 1$$

$$n \geq 3 \text{ и при } n \geq 4 \quad 0 < \frac{180^\circ}{n} \leq 45^\circ \Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) \geq 1$$

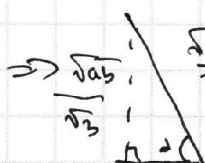
$$\Rightarrow \underline{n=3} \Rightarrow \operatorname{ctg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \operatorname{ctg}(60^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2\sqrt{3}}$$

~~так как~~ $\Rightarrow$ по теореме Пифагора

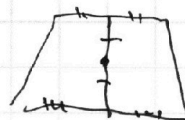
$$h = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}}$$



$$\Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Очевидно, что искомого круга для $n=3$ существует (центр O - пересечение сер. пер-к "серединным высотам" сторон трапеции, соединяющей, соединяющей центры оснований)

$$\text{Ответ: } \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$





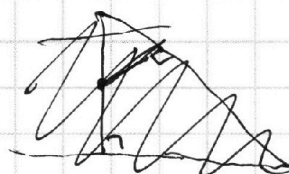
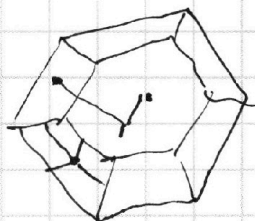
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой** задачи **отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

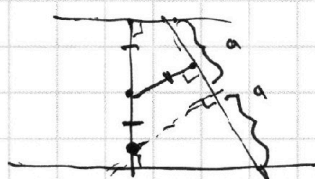
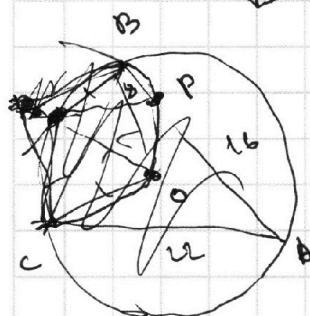
СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

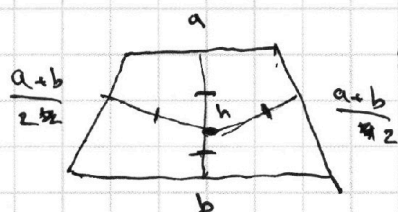
Задача
найти радиус - ~~всего~~ ~~малейший~~ ~~серебряный~~



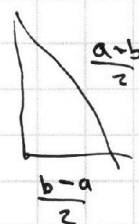
R - радиус
r - радиус
S - площадь треугольника
S - площадь круга
X - сторона треугольника
d - диаметр круга



$$X \cdot \cos \alpha + S = S$$



$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

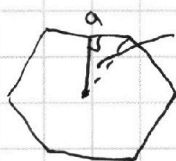


$$S = \frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{ab}$$

$$\sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2}$$

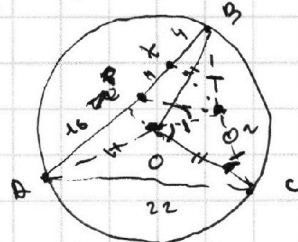
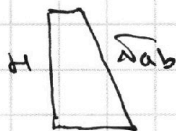
$$\frac{\sqrt{(a+b)^2 - (b-a)^2}}{2} = \sqrt{ab}$$

Путь и линия на окружности
n сторон по a



$$\frac{180^\circ}{n} \Rightarrow \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$$

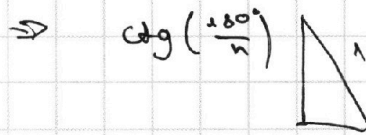
$$\frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$$



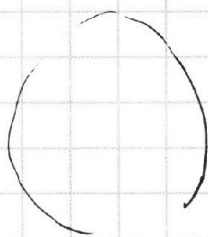
$$ab = \left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{180^\circ}{n} \right)$$

$$H = \sqrt{ab - \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right)^2 \operatorname{ctg}^2 \left(\frac{180^\circ}{n} \right)} \cdot \frac{b}{2} \left(\operatorname{ctg} \left(\frac{180^\circ}{n} \right) \right)$$

$$H = \operatorname{ctg} \left(\frac{180^\circ}{n} \right) \cdot \sqrt{ab}$$



$$\frac{\cos}{\sin}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

