



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:

- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
- C — двухзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
- произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.

- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1 прямые линии

Пол. В: 11. Найди, в каком числе есть цифра 101?

$$\begin{cases} a \leq 9 \Rightarrow a/101 \\ a \in \mathbb{N} \end{cases} ; \begin{cases} c \leq 99 \Rightarrow c/101 \Rightarrow B: 101 \\ (один) \\ (две) \end{cases}$$

След., B: 1111. Так $B \leq 999$ - предп. число \Rightarrow одна пятерка чисел

Ответ: (6666; 202; 33)

маленький шагок
не забудь это



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

6

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№1 Длж. A-четн. чил., состоящ. из одинаковых цифр, то A можно представить в виде: $A = \overline{aaaa}$, $a \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$

Прид., $A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = k^2$, $k \in \mathbb{N}$

След., т.к. 11 и 101 - простые чил., то чтобы получить квадрат некоторого натурального чил., необходимо иметь чил. с ко личеством цифр 11 и 101 в этом произведении. Хотя это два.

• Посмотрим, в каком чил. может содержаться мн-чил. 11:

I^{сл.}: $a : 11$, но $a \leq 9$ - противоречие. В а мн-чил. 11 содержит. $(\Rightarrow a \geq 11 \text{ т.к. } a \in \mathbb{N})$ не может

II^{сл.}: $C : 11$: Длж. C-квадр. и чил. 11, его можно представить как: $C = \overline{cc}$, $c \in \mathbb{N}$, $c \leq 9$.

Длж. по условию тоже это одна цифра С равна 3, то $C = 33$.

• В каком чил. мн-чил. 101? $C = 33 / 101$, $a \leq 9 \Rightarrow a / 101$, след. ~~B : 101~~ B : 101. Длж. B-трёхзначн., то B можно представить как: $B = \overline{bab}$, $b \in \mathbb{N}$

Длж. по условию тоже это одна цифра B равна 2, то $b = 2$, $b \leq 3$

След., $A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = a \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = k^2$

След., $a \cdot 2 \cdot 3 - кв. \text{натур. чил.}, \text{след. } B \text{ содержит мн-чили: } 2 \text{ и } 3$.

$\Rightarrow \begin{cases} a : 6 \\ a \leq 9 \\ a \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a = 6 \Rightarrow A = 6666$

Получил чистую цифру.
также чистка:
(6666, 202, 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(N2) $x, y > 0$

Условие о ненулевости X :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy+x-y-1}$$

ДЛЖ. $x > 0, y > 0$, что $x+y+2 > 2 > 0$. Но $x+y+2$ можно разделить на xy .

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy+x-y-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = xy + x - y - 1 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ x, y > 0 \end{cases}$$

Проверка, числ. М: $M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$. ~~Было бы~~

След., $\forall x, y > 0 M=1$.

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = -3x + 1 + 2k \\ y = x - 1 + 2n \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N} \\ x \in [-5; 5] \\ y \in [-4; 4] \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -3x + 1 + 2k, (I) \\ y = x - 1 + 2n, (II) \\ k, n \in \mathbb{Z} \\ x \in [-5, 4] \\ y \in [-4, 3] \end{cases}$$

$$(I): \quad -5 \leq x \leq 4 \mid \cdot (-3)$$

$$15 \geq -3x \geq -12 \quad | +1 + 2k$$

$$3 \geq 16 + 2k \geq \underbrace{-3x + 1 + 2k}_{=y} \geq -11 + 2k \geq -4$$

$$\text{След., } 2k + 16 \leq 3 \Rightarrow \underline{k \leq -7}, \quad 2k - 11 \geq -4 \Rightarrow \underline{k \geq 4}$$

$$\begin{cases} k \leq -7 \\ k \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$(II): \quad -5 \leq x \leq 4 \mid -1 + 2n$$

$$-4 \leq -6 + 2n \leq \underbrace{x - 1 + 2n}_{=y} \leq 3 + 2n \leq 3$$

$$\text{След., } 2n - 6 \geq -4 \quad , \quad 2n + 3 \leq 3$$

$$\begin{cases} n \geq 1 \\ n \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

След., таких пар целых чисел нет. Ответ: 0



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input checked="" type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(13)

$$\begin{aligned} & (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\ & \sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y \end{aligned}$$

$x, y \in \mathbb{R}$
отр. нет

$$0 = \cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y)$$

$$2 \cos \frac{\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0. \text{ След.,:}$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 + 2k, \\ x - y = 1 + 2n, \quad k, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{След., } \begin{cases} y = -3x + 1 + 2k \\ y = x - 1 + 2n \end{cases} \quad \text{Отвем: } (a; -3a+1+2k), \quad a \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ (b; b-1+2n), \quad b \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$5) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}. \text{ Для определения арксинуса и арккосинуса:}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}, \arccos \frac{y}{4} \leq \pi \Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Нер-во выполняется для любых значений арксинуса и арккосинуса, кроме случаев приведено:

$$\text{След., } \begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} \neq \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} \neq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq 1 \\ \pi/2 - 1 < \frac{x}{5} < 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq 4 \\ -5/2 < x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \{-5, 5\} \\ y \in \{-4, 4\} \end{cases}$$

Проверь выполнение на это решения упр-ши, с учётом, что
менять нечт. $x, y \in \mathbb{Z}$:

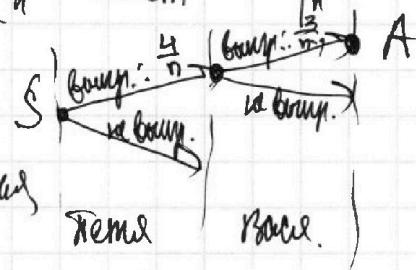
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(M) Две пары одноклассников вело n (было и осталось)

$$\text{Доказа, } P\left(\frac{n}{n} \text{ были вспомогат.}\right) = \frac{4}{n}. \quad P\left(\frac{n}{n} \text{ были вспомогат.} \mid \frac{n}{n} \text{ были вспомогат.}\right) = \\ = \frac{3}{n-1}.$$



След. вероятность интересующего нас события, назовем его A, равна: (см. рис.)

$$\text{по правилу умножения: } P(A) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{12}{n(n-1)}$$

Две пары добавили к бывшим. Доказа, всего бывших $4+k$.

Доказа, аналогичные вероятности:

Доказа, вероятность нового интересующего нас события A равна:

$$P(A') = \frac{4+k}{n}, \frac{3+k}{n-1} = \frac{(k+3)(k+4)}{n(n-1)}.$$

по условию, $P(A') = 2,5 P(A)$

$$\text{След, } \frac{(k+3)(k+4)}{n(n-1)} = \frac{2,5-12}{n(n-1)} \mid \cdot n(n-1) \quad \begin{aligned} &\text{В классе, включая Доказа и} \\ &\text{всех, не менее 5 человек,} \\ &\text{чтобы было возможно бывш.}\end{aligned}$$

$$k^2 + 7k + 12 = 30$$

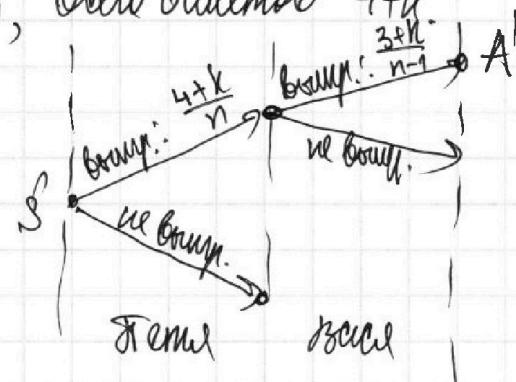
$$k^2 + 7k - 18 = 0$$

$$\Delta = 49 + 4 \cdot 18 = 49 + 72 = 11^2$$

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = -9 \\ k = 2 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\text{бывш. добавили} \Rightarrow k > 0 \\ &\text{проверяется ум. задачи} \end{aligned}$$

След, добавили 2 человека \Rightarrow всего бывших получено: $2+4=6$.

Ответ: 6 человек



~~Бывш. есть, включая Доказа и всех~~
~~В классе, включая Доказа и~~
~~всех, не менее 5 человек,~~
~~чтобы было возможно бывш. бывш.~~
Как было 1, так это и останется
1, не более 100 един. 2,5

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14) Докажите, что $\sin \beta = \frac{15}{28 \sin A}$: $\frac{AP}{\sin \angle PDA} = \frac{OA}{\sin \angle OPA} \Rightarrow \frac{15}{2 \sin \beta} = \frac{R}{\cos \alpha}$

След., $\frac{15}{2 \sin \beta} = \frac{3}{28 \sin \alpha \cos \alpha} \mid : 2 \sin \alpha \cos \alpha$ $\cancel{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \cancel{2 \sin \alpha \cos \alpha}$
 $(\beta \in \partial^0)$
 $(\beta \neq 180^\circ)$

$15 = \frac{3}{\cos \alpha} \Rightarrow (\cos \alpha = \frac{3}{5}) \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \cancel{\cos^2 \alpha}$

$\sin \alpha > 0$, т.к. $\triangle ABC$ - остроугольный.

След., $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

15) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \Rightarrow$
 $\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{25 \cdot 9 \cdot 4}{4 \cdot 5} = 45$.

16) Заметили, что предложенное решение справедливо для тупоугольного $\triangle ABC$, и для остроугольного $\triangle ABC$, т.к. решение приведено "всё-таки" через тупоугольный способ.

Следует пересечься с остроугольным прилей (AB) , а не отрезка, исключив не ул. зигзаги.

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи** отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

15

7) $\text{uzymo } \triangle ABC: \angle A = 2$
 $\angle B = \beta$

2) $\angle BDC = \alpha \angle BAC = \alpha d$ — *условие*,
 огнп. на междн. BC ($\angle BAC$ — *бисс.*
 огнп. на неё не)

3) $AO = BO = CO = R$ - pagrūgint w ,
 Čia $\angle BOC = \pi/2$

$$\text{证} \angle OBC = \angle OCB = \frac{\pi}{2} - d.$$

$$4) \beta = \angle QBP + \frac{\pi}{2} - \alpha < \angle B \Delta ABC$$

$$\text{Cyclic } \angle DBP = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$$

5) $\triangle BOA \sim \triangle O$: $BO = OA$, wog.

$$\angle DAB = \angle OBA = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$$

$$\angle BOA = \pi - 2d - 2\beta + \pi = 2\pi - 2d - 2\beta$$

$$6) \alpha = \beta + \gamma - \frac{\pi}{2} + \angle OAC < \angle ABA$$

$$\angle OAC = \frac{\pi}{2} - \beta$$

7) $\triangle AOC \sim \triangle BOA$: $OA = OC$, wgg.:

$$\angle COA = \angle QAC = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \angle COB = 2\beta.$$

8) NO_x , SO_x , P_x - вредные в W_2 . След., BCOP- блокирующий

$$\text{Công}, \angle BPO = \pi - \angle BCO = \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha$$

$$3) \text{ уг } \Delta BOP: \angle BOP = \pi - \frac{\pi}{\alpha} - \alpha - 2 - \beta + \frac{\pi}{\beta} = \pi - 2\alpha - \beta$$

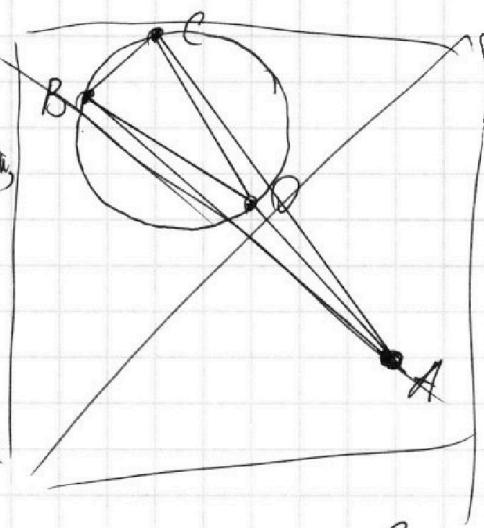
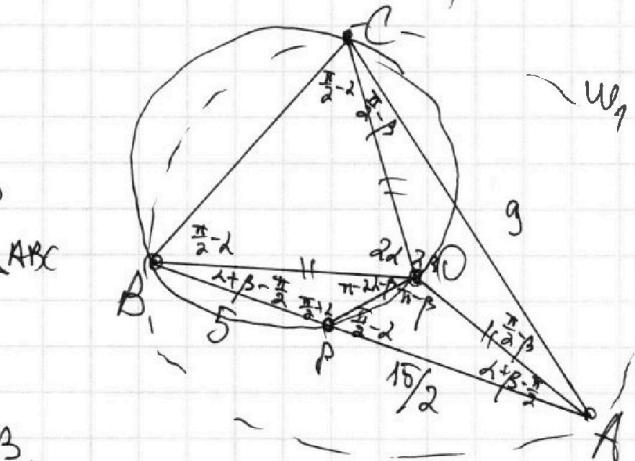
$$(2) \angle BOA: \quad \cancel{\pi - \alpha} - \cancel{\beta} - \cancel{2\beta} = \pi - \alpha - \beta + \angle PDA \quad \Rightarrow \quad \angle PDA = \pi - \beta$$

$$1) \angle BPA - \text{найдем выражение} \Rightarrow \frac{\pi}{2} + d + \angle DPA = \pi \Rightarrow \angle DPA = \frac{\pi}{2} - d$$

$$12) \text{Для м. синусов в } \triangle ABC: \frac{AC}{\sin B} = 2R$$

13) 70 m. ukojib 6 10BP: $\frac{BP}{sen BP} = \frac{DB}{sen DB}$

$$\frac{5}{\sin(\pi - \alpha - \beta)} = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} \Rightarrow \frac{5}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{g}{2\sin(\beta)\cos\alpha}$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решенис которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input checked="" type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|---------------------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
3 ИЗ 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M'(2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 8\sin 2 = 0 \\ \cos 2 = 0 \\ \sqrt{18\sin^2 2 + 7} = \sqrt{25 - 18\sin^2 2} \end{cases}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} 8\sin 2 = 0 \\ \cos 2 = 0 \\ 18\sin^2 2 + 7 = 25 - 18\sin^2 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8\sin 2 = 0 \\ \cos 2 = 0 \\ 36\sin^2 2 = 18 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 8\sin 2 = 0 \\ \cos 2 = 0 \\ \sin 2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

В первом из этих трех случаев будем иметь значение ~~решения~~ $M(2)$.

- $8\sin 2 = 0 : M(2) = 5\pi + 2(5 + \sqrt{7})$
- $\cos 2 = 0 \Rightarrow \sin 2 = \pm 1 : M(2) = 5\pi + 2(5 + \sqrt{7})$
- $\sin 2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} : M(2) = 5\pi + 2(\sqrt{25-9} + \sqrt{7+9}) = 5\pi + 2(4+4) = \underline{\underline{5\pi + 16}}$

М.н. $16 > 10 + 2\sqrt{7}$, ~~следовательно~~ не нашли. зн. $M(2)$ доказывается

($6 > 2\sqrt{7}$)
 $36 > 28$ - верно)
при $\sin 2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} : \Rightarrow 2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $5\pi + 16$ при $2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

(6)

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin d)(y - 3\sqrt{2}\cos d) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin d \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos d \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin d \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos d \end{cases} & (2) \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} &\approx \sqrt{18} \\ 18 &< 25 \\ \downarrow \\ 3\sqrt{2} &< 5 \end{aligned}$$

На пл-ти xOy , (2) задаёт круг с центром в $O(0,0)$, радиусом $R=5$ и включает его центр. (т.к. нестрогий знак)

(1) задаёт две части плоскости, ограниченные прямой $x = 3\sqrt{2}\sin d$ и $y = 3\sqrt{2}\cos d$.

"слева-вверху" от точки $(3\sqrt{2}\sin d; 3\sqrt{2}\cos d)$ и "справа-внизу" от неё же. (см. рис.)

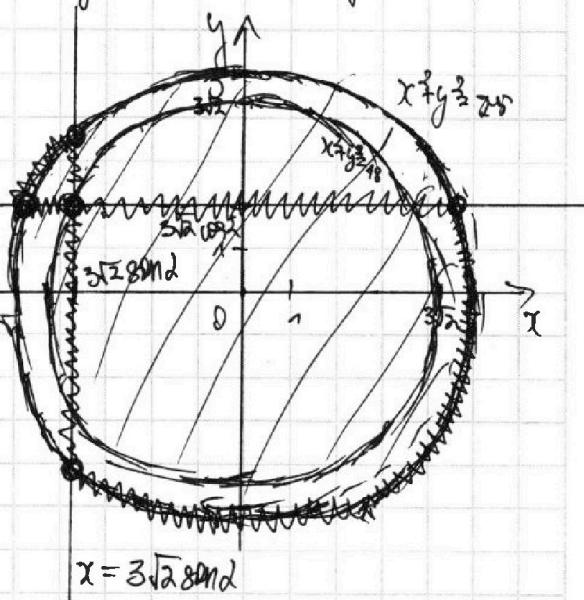
Заметим, что можн. пересечение между этими прямами ~~отсутствует~~ отсутствует с центром в т.к. $(0,0)$ и радиусом $r=3\sqrt{2}$ и вкл. центра, т.к. $(3\sqrt{2}\sin d)^2 + (3\sqrt{2}\cos d)^2 = (3\sqrt{2})^2$ верно по основанию т.к. точка лежит на прямой $x_0, (x_0, y_0)$ — квад. т. перес. не может быть, т.к. прямые изначально в скобках.

Фигура $\Phi(2)$ состоит из частей

~~пересекающихся~~ круга (2), лежащих в "слева-вверху" и "справа-внизу" от прямых (1), вкл. центра.

Это же, перенесён дуги
составлены из двух полукруж-сторонов $y = 3\sqrt{2}\cos d$
прямых (1) ~~и~~ вкл. центра и двух
дуг (см. засечки на рис.)

Найдём т. перес. пр. прямых (1)
и ц. круга: окружности (2).



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\text{I) } \begin{cases} x = 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{2} \sin \alpha \\ y = \pm \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\text{II) } \begin{cases} y = 3\sqrt{2} \cos \alpha \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} \\ y = 3\sqrt{2} \cos \alpha \end{cases}$$

$$(3\sqrt{2} \sin \alpha; \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha});$$

$$(3\sqrt{2} \sin \alpha; -\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha})$$

След., длина хорд равна: $2(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha})$.

Далее, ход решения с доказательством.

• Давайте решим вспомогательную задачу:

AB, CD - хорды окружности, $AB \perp CD$.

Найдем $l_{AD} + l_{BC}$ - длины дуг.

~~Пусть~~ Чр. мера $\widehat{AD} = 2\alpha$, $\widehat{BC} = 2\beta$

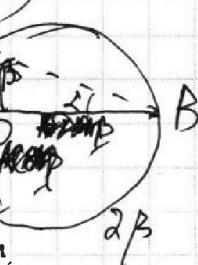
$\angle ABD$ - внеш., остр. на $\widehat{AD} \Rightarrow \angle ABD = \alpha$.

$\angle BDC$ - внеш., остр. на $\widehat{BC} \Rightarrow \angle BDC = \beta$

Пусть $AB \cap CD = O$. $\triangle ODB$ -т/з $\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ = \pi$.

Длина дуги воскружения через её центральную меру: $l_{AD} = R \cdot \widehat{AD}$,

след., $l_{AD} + l_{BC} = R \cdot 2\alpha + R \cdot 2\beta = \underline{\underline{R\pi}}$.



След., в нашей задаче, сумма длии воскруживших дуг равна π .

След., периметр $\Phi(\alpha) \Leftrightarrow M = 5\pi + 2\left(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}\right)$

$$M(\alpha) = 5\pi + 2\left(\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha}\right)$$

$$\Omega(M) = R$$

$$M'(\alpha) = 2\left(\frac{-36 \sin \alpha \cos \alpha}{2\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} + \frac{36 \sin \alpha \cos \alpha}{2\sqrt{7 + 18 \sin^2 \alpha}}\right) = 36 \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{18 \sin^2 \alpha + 7}} - \frac{1}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}}\right)$$

$$\Omega(M') = R$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№7

1) т.к. чр. чир. - правильная, то её основание: правильное много.

~~Это же касается всех ребер, что~~

2) нужно z_1, z_2 - радиусы вты. в верхнее и в нижнее основание отч.
 $(z_1 < z_2)$.

Решение, $S_{\text{нам}} = \pi z_2^2$.

Нужно широка верхнее основание - а, нижнее б ($b > a$)

$\Rightarrow S_{\text{нам.}} = b \pi z_2^2$, N - кол-во ребер = кол-во верхних оснований
(сиг, правильн N -угольник)

Доказать поб-ть: N лг правильное с основанием b .



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1

2

3

4

5

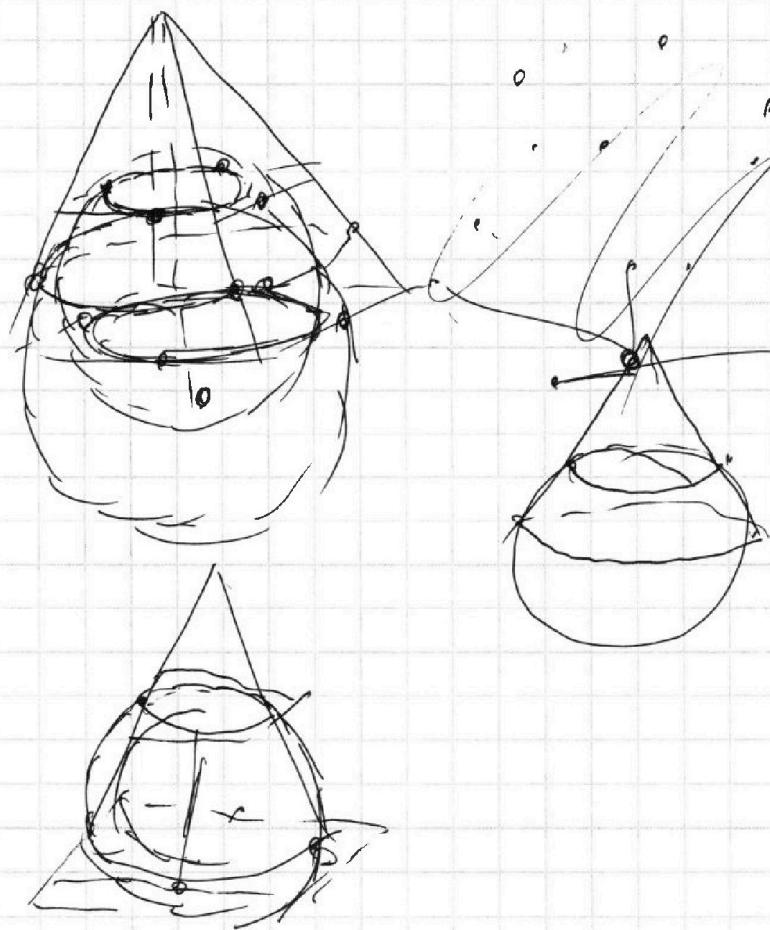
6

7

СТРАНИЦА
_ ИЗ _

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Матан



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- 1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$f(\alpha) = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} =$$

$$f(\alpha) =$$

$$\begin{aligned} & 25 - 18 \sin^2 \alpha \\ & 25 - 18 \cos^2 \alpha \\ & 25 = 25 \end{aligned}$$

$$f'(\alpha) = \frac{-36 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} + \frac{-36 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} \geq 0$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\frac{8 \sin \alpha}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} \geq 0$$

$$f(\alpha) = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$$

$$f'(\alpha) = \frac{-36 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} + \frac{36 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} = 0$$

$$36 \sin^2 \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$$

$$36 \sin^2 \alpha = 18 \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

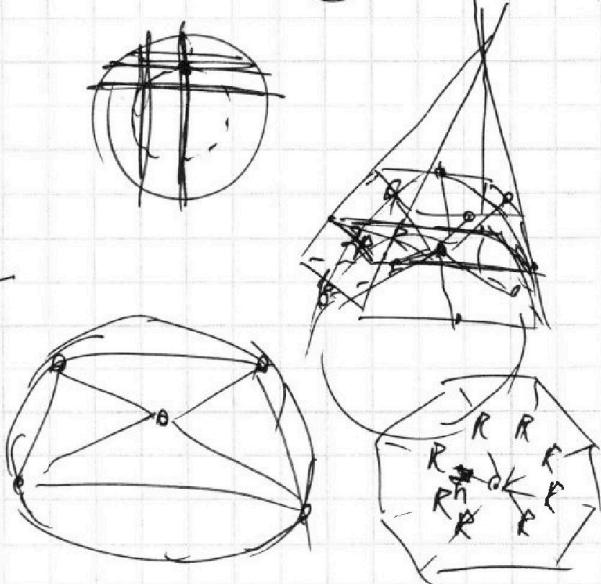
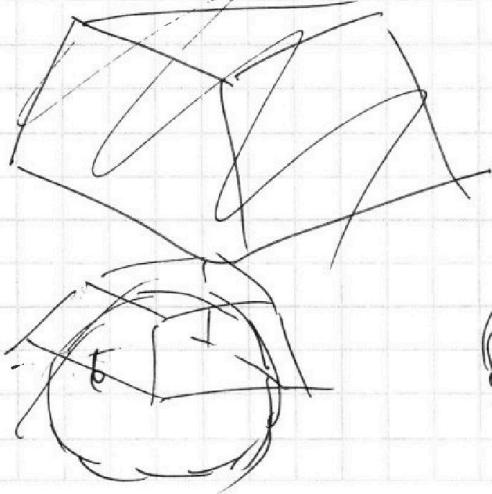
$$AO = AC \sin \alpha$$

$$OC = AC \cos \alpha$$

$$BO = BD \sin \alpha$$

$$OD = BD \cos \alpha$$

$$S = (AC + BD)(\sin \alpha + \cos \alpha)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



- | | | | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|

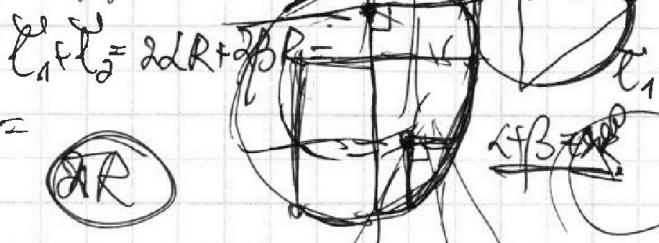
СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ задач.

$$x^2 + y^2 = 25 - \text{уравнение}$$

~~решения~~



№ задач

$\frac{S_{\text{одн}}}{S_{\text{внн}}} =$

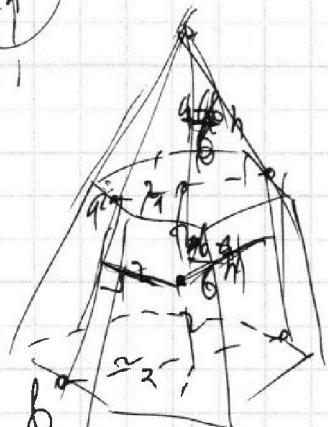
$$h = 2R\alpha$$

$$S_{\text{одн}} = \pi(R_1 + R_2)$$

$$S_{\text{внн}} = \pi R_1^2$$

$$\frac{S_{\text{одн}}}{S_{\text{внн}}} = \frac{\pi(R_1 + R_2)}{\pi R_1^2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1^2}$$

$$\alpha =$$

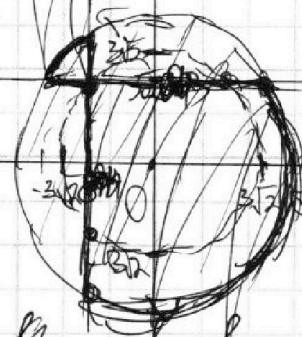


~~№ задач~~



$y \alpha$

$$r = \sqrt{R^2 - h^2}$$



$R^2 - h^2$

$$R^2 - h^2 = 2R$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{R - h}{R}$$

$$l = \frac{\pi R}{2}$$

$w: 2$

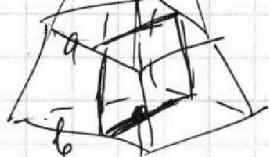
$S: R$

$$\frac{S_{\text{одн}}}{S_{\text{внн}}} = \frac{\pi R_1^2 + \pi R_2^2}{\pi R_1^2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1^2}$$

$$\frac{l}{2} = \frac{R}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right)$$

$J_{\text{одн}} =$

$$1 - \frac{a-b}{B} = \frac{b-a+b}{B} = \frac{2b-bh}{B}$$



$$R^2 + R_2^2 = 2R^2 + 2R_2^2 = 2l^2$$

$$S_{\text{одн}} = \pi R_2^2 = \frac{\pi R_2^2}{a^2}$$

$$l_1 : \frac{6}{6} l, l_2 : \frac{6-a}{6} l, l = \sqrt{h^2 + R_2^2},$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

МК №1

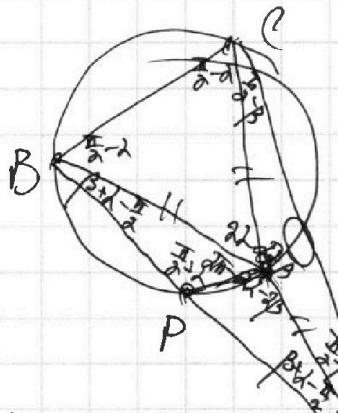
2 задача (1)

$$\frac{R}{\cos \alpha} = \frac{15}{2 \sin \beta}$$

$$\frac{BC}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$BC = 2R \sin \alpha$$

$$\frac{g}{2 \sin \beta} = 2R =$$



$$\angle BOP = \pi - 2\alpha - \beta$$

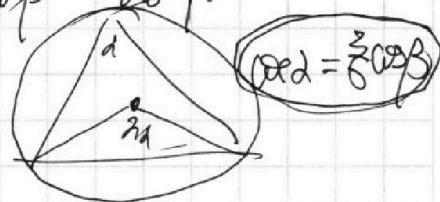
$$\angle POA = \frac{2\pi}{3} - \alpha - \beta - \gamma + 2\alpha + \beta = \pi - \beta$$

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

$$\frac{g}{2 \sin \beta} = R$$

$$\frac{g}{2 \sin \beta} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$$

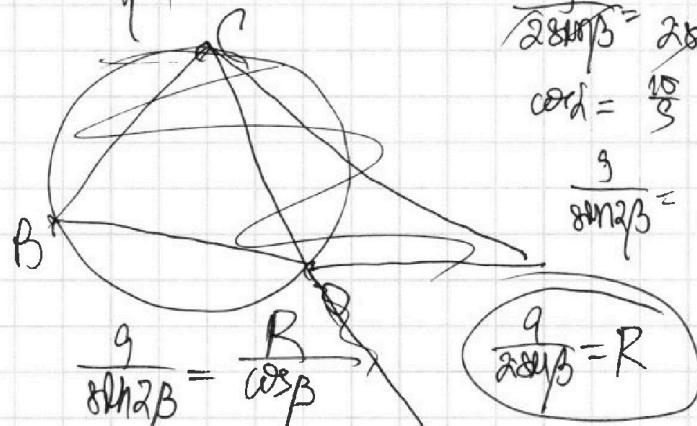


$$\frac{BC}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$\frac{BC}{2 \sin \alpha} = 2R \quad \frac{g}{2 \sin \beta} = \frac{15}{2 \sin \beta \cos \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{10}{3}$$

$$\frac{g}{2 \sin \beta} = \frac{R}{\cos \beta}$$



$$\frac{g}{2 \sin \beta} = \frac{R}{\cos \beta}$$

$$\frac{g}{2 \sin \beta} = R$$

$$\frac{R}{2 \sin(\pi - 2\alpha - \beta)} = \frac{R}{2 \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$$

$$\frac{R}{2 \sin(2\alpha + \beta)} = \frac{R}{2 \sin \beta \cos \alpha}$$

$$\frac{R}{2 \sin(2\alpha + \beta)} = \frac{R}{2 \sin \beta \cos \alpha}$$

$$\frac{15}{2 \sin \beta} = \frac{R}{\cos \alpha}$$

$$\frac{\frac{15}{2}}{2 \sin(\pi - \beta)} = \frac{R}{2 \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{aligned} \text{№50 задача} \\ \begin{cases} y = -3x + 1 + 2k \quad (I) \\ y = x - 1 + 2n \quad (II) \end{cases} \end{aligned}$$

$\frac{x}{f}$

$$(I): \begin{array}{l} \text{найдем } x + \text{ решаем } \begin{array}{l} \text{для } x \\ \text{для } y \end{array} \\ -5 \leq x \leq 5, -4 \leq y \leq 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} -5 \leq x &\leq 5 \\ -3x \leq 15 &|+1+2k \\ -15+2k \leq -3x+1+2k &\leq 16+2k \end{aligned}$$

$$16+2k \leq 4$$

$$k \leq -6$$

$$-4 \leq -2k \quad 2k \geq 10$$

$$k \geq -1$$

$$k \geq 5$$

$$-5 \leq x \leq 4 \quad (3)$$

$$15 \geq -3x \geq -12 |+1+2k$$

$$5 \geq 16+2k \geq 3x+1+2k \geq -11+2n \geq -4$$

$$2k \leq -11 \quad k \leq -5$$

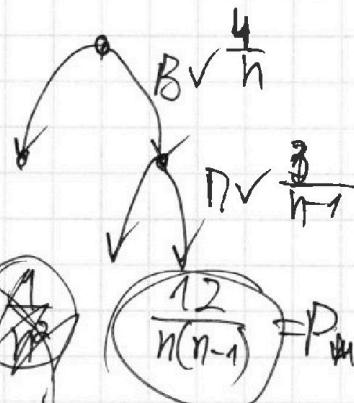
$$2k \geq 7 \quad k \geq 3$$

Мы получим

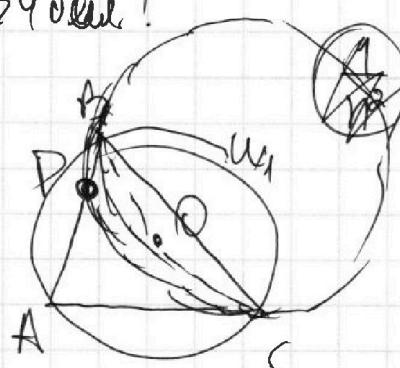


4 дол.

→ 4 дол.



$$\begin{aligned} \frac{4+k}{n} \\ \frac{3+k}{n-1} \end{aligned}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

- | | | | | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> 3 | <input type="checkbox"/> 4 | <input type="checkbox"/> 5 | <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> 7 |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|

СТРАНИЦА
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач **нумеруются отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

№1

$$A - \text{четн. квадр.}, B - \text{кв.} : \text{если } 2^k, C - \text{двоич. если } 3$$

A · B · C - кв. nat. числа

11·101

$$A = a \cdot 1111, a \in [1; 9]; B \text{ четн.}$$

$$a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = k^2$$

$$\begin{cases} C: 11 \\ C: 101 \end{cases}$$

$$B = 6 \cdot 11 \quad B = 6 \cdot 101$$

$$\begin{cases} C: 11 \\ B: 101 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \checkmark \\ \cancel{101} \\ \cancel{31} \end{array}$$

$$A = a \cdot 1111.$$

$$\text{След., } A \cdot B \cdot C = a \cdot 1111 \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = k^2.$$

$$\bullet C = 101k, k \in \mathbb{N}, \text{ но } C \leq 99 \Rightarrow \emptyset$$

$$\cos \lambda + i \sin \lambda = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$\bullet B = 1111k \emptyset$$

$$\bullet C = 11k, B = 101k,$$

$$\text{№2} \text{ Числ. } x, y > 0: \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} + \frac{2}{(x-1)(y-1)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy - ? = \cancel{x+y+2} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y-1)} \Rightarrow \begin{cases} xy = xy - y + x - 1 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

$$M = \cancel{x} (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y$$

$$\text{№3} \text{ Числ. a) } x, y \in \mathbb{R}: \cancel{\sin(\pi x + \pi y)}$$

$$\cos \frac{x}{2} + \cos \frac{-y}{2} < \frac{3\pi}{2}$$

$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$8 \sin^2 \pi x + 8 \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$$\cos 2\pi x \neq \cos(\pi(x+y)) = 0$$

$$2 \cos \frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2} \cos \frac{2\pi x - \pi x - \pi y}{2} = 0$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}(3\pi x + \pi y)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\pi x - \pi y)\right) = 0$$