



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☒ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) продолжение

Итак, $B:11$. Тогда, в каком числе нет-меньше 101?

$$\begin{cases} a \leq 9 \\ a \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow a \neq 101; \quad \begin{cases} c \in \mathbb{N} \\ c \leq 99 \\ \text{(однознач.)} \\ \text{(двух.)} \end{cases} \Rightarrow c \neq 101 \Rightarrow B:101.$$

След., $B:1111$ - но $B \leq 999$ - предпр. число $\Rightarrow$ одна из цифр

максимум цифру
не больше 9

Ответ: (6666; 202; 33)



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№1) Т.к. A - четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр, то A можно представить в виде: $A = \overline{aaaa}$, $\begin{cases} a \in \mathbb{N} \\ a \leq 9 \end{cases} \Rightarrow \underline{A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101}$

Тогда, $A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = k^2$, $k \in \mathbb{N}$

След., т.к. 11 и 101 - простые числа, то чтобы получить квадрат некоторого натурального числа, необходимо иметь чётное количество множителей 11 и 101 в этом произведении: хотя бы два.

• Посмотрим, в каком числе может содержаться мн-тель 11:

Ис. $a : 11$, но $a \leq 9$ - противоречие. В a мн-тель 11 содержится не может.
($\Rightarrow a \geq 11$ т.к. $a \in \mathbb{N}$)

ис. $C : 11$: Т.к. C - двузнач. и кратно 11, его можно представить как: $C = \overline{cc}$, $\begin{cases} c \in \mathbb{N} \\ c \leq 9 \end{cases}$.

Т.к. по условию хотя бы одна цифра C равна 3, то $\underline{C = 33}$.

• В каком числе мн-тель 101? $C = 33 \nmid 101$, $a \leq 9 \Rightarrow a \nmid 101$, след.,
~~В~~ $B : 101$. Т.к. B - трёхзначная, то B можно представить как: $B = \overline{b0b}$, $\begin{cases} b \in \mathbb{N} \\ b \leq 9 \end{cases}$

Т.к. по условию хотя бы одна цифра B равна 2, то $\underline{B = 202}$

След., $A \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot 2 \cdot 101 \cdot 3 \cdot 11 = a \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 101^2 = k^2$

След., $a \cdot 2 \cdot 3$ - кв. натур. число, след., в a содержится мн-тель: 2 и 3.

$\Rightarrow \begin{cases} a : 6 \\ a \leq 9 \\ a \in \mathbb{N} \end{cases} \Rightarrow \underline{a = 6} \Rightarrow \underline{A = 6666}$ Также сразу увидишь, что так можно проверить: (6666, 202, 33)



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

12) $x, y > 0$

Условие о невырожденности K :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x-1+y+1+2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{x+y+2}{xy+x-y-1}$$

П.к. $x > 0, y > 0$, то $x+y+2 > 2 > 0$. На $x+y+2$ можно разделить обе части.

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy+x-y-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = xy + x - y - 1 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ x \neq 1 \\ y > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ x, y > 0 \end{cases}$$

Полна, провер. M : $M = (y+1)^3 - y^3 - 3(y+1)y = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$. ~~$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$~~

След., $\forall x, y > 0$ $M = 1$.

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} y = -3x + 1 + 2k \\ y = x - 1 + 2n \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \\ x \in [-5; 5) \\ y \in [-4; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 1 + 2k, (I) \\ y = x - 1 + 2n, (II) \\ x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \\ x \in [-5; 4] \\ y \in [-4; 3] \end{cases}$$

$$(I): \quad \begin{aligned} -5 \leq x \leq 4 & \quad | \cdot (-3) \\ 15 \geq -3x \geq -12 & \quad | + 1 + 2k \\ 3 \geq 16 + 2k \geq \underbrace{-3x + 1 + 2k}_{=y} \geq -11 + 2k \geq -4 \end{aligned}$$

$$\text{След., } 2k + 16 \leq 3 \Rightarrow \underline{k \leq -7}, \quad 2k - 11 \geq -4 \Rightarrow \underline{k \geq 4}$$

$$\begin{cases} k \leq -7 \\ k \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$(II): \quad \begin{aligned} -5 \leq x \leq 4 & \quad | -1 + 2n \\ -4 \leq -6 + 2n \leq \underbrace{x - 1 + 2n}_{=y} \leq 3 + 2n \leq 3 \end{aligned}$$

$$\text{След., } \begin{aligned} 2n - 6 \geq -4 & \quad \Rightarrow \underline{n \geq 1} \\ 2n + 3 \leq 3 & \quad \Rightarrow \underline{n \leq 0} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} n \geq 1 \\ n \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

След., таких пар целых чисел нет. Ответ: 0



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№3

$$1) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y = \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y$$

$x, y \in \mathbb{R}$
дир. нем

$$0 = \cos 2\pi x + \cos(\pi x + \pi y)$$

$$2 \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0. \text{ След. } ;$$

$$\begin{cases} \cos \frac{3\pi x + \pi y}{2} = 0 \\ \cos \frac{\pi x - \pi y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi x + \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ \frac{\pi x - \pi y}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 1 + 2k \\ x - y = 1 + 2n \end{cases}, k, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{След. } \begin{cases} y = -3x + 1 + 2k \\ y = x - 1 + 2n \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (a; -3a + 1 + 2k), a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z};$$

$$(b; b - 1 + 2n), b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}. \text{ По определению арксинуса и арккосинуса:}$$

$$\arcsin \frac{x}{5} \leq \frac{\pi}{2}, \arccos \frac{y}{4} \leq \pi \Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Нер-во выполняется для любых значений арксинуса и арккосинуса, кроме случая интервалов:

$$\text{След. } \begin{cases} \arcsin \frac{x}{5} \neq \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} \neq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq -1 \\ -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 5 \\ y \neq -4 \\ -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-5; 5) \\ y \in (-4; 4] \end{cases}$$

Теперь найдем на это решение y -ные, с учетом, что $x, y \in \mathbb{Z}$:



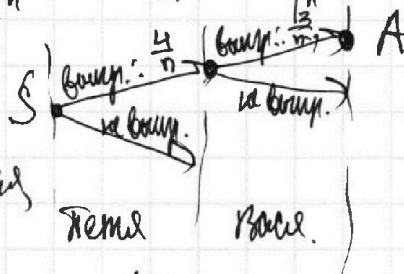
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

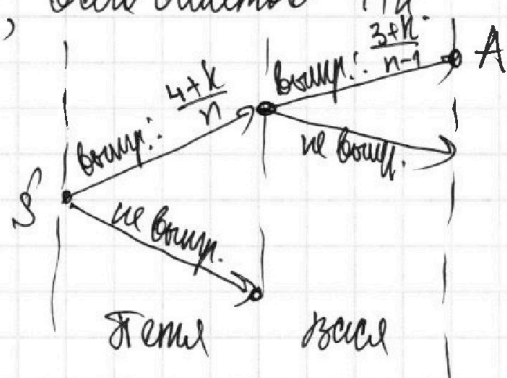
Пусть среди n человек было n человек.
Тогда, $P(\text{и не выиграл}) = \frac{4}{n}$. $P(\text{и выиграл}) = \frac{3}{n-1}$.



След. вероятность интересующей нас события, назовем его A , равна: (см. рис)

По правилу умножения: $P(A) = \frac{4}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{12}{n(n-1)}$

Пусть добавили k билетов. Тогда, всего билетов $4+k$.
Тогда, актуальные вероятности:



Тогда, вероятность нового интересующего нас события A' равна:

$P(A') = \frac{4+k}{n} \cdot \frac{3}{n-1} = \frac{(k+4)(3)}{n(n-1)}$

По условию, $P(A') = 2,5 P(A)$

След. $\frac{(k+4)(3)}{n(n-1)} = \frac{2,5 \cdot 12}{n(n-1)}$

$k^2 + 7k + 12 = 30$

$k^2 + 7k - 18 = 0$

$D = 49 + 4 \cdot 18 = 49 + 72 = 121$

$k_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{2} \Rightarrow \begin{cases} k = -9 \\ k = 2 \end{cases}$

Делать добавили $\Rightarrow k > 0$
принимается упр. задачи

След. добавили 2 билета $\Rightarrow$ всего билетов выдано: $2+4=6$.

Ответ: 6 билетов



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

14) Это т. центр в $\triangle OPA$: $\frac{AP}{\sin \angle POA} = \frac{OA}{\sin \angle OPA} \Rightarrow \frac{15}{2 \sin \beta} = \frac{R}{\cos \alpha}$

След., $\frac{15}{2 \sin \beta} = \frac{9}{2 \sin \beta \cos \alpha} \mid \cdot 2 \sin \beta \Rightarrow \frac{15}{\cos \alpha} = \frac{9}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$\sin \alpha > 0$, т.к. $\triangle ABC$ — остроуг. по уг.

След., $\sin \alpha = \frac{4}{5}$

15) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15}{2} + 5\right) \cdot 9 \cdot \frac{4}{5} = \frac{25 \cdot 9 \cdot 4}{4 \cdot 5} = 45$

16) Заметим, что предположенное решение справедливо для тупоугольного $\triangle BOC$, и для остроугольного $\triangle BOC$, т.к. решение приведено "чёткое", через теорему синусов.

Случай пересечения окружностей прямой (AB) , а не отрезка, исключён из условия задачи.

Ответ: 45



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

15

1) Пусть в $\triangle ABC$: $\angle A = \alpha$
 $\angle B = \beta$

2) $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$ — центр опис. кр. на шкел. BC ($\angle BAC$ — впис., центр. на него же)

3) $AO = BO = CO = R$ — радиусы ш,

След, $\triangle BOC$ — $\triangle$

След, $\angle OBC = \angle OCB = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

4) $\beta = \angle OBP + \frac{\pi}{2} - \alpha \leftarrow \angle B$ в $\triangle ABC$

След, $\angle OBP = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$

5) $\triangle BOA$ — $\triangle$: $BO = OA$, след.:

$\angle OAB = \angle OBA = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2}$

$\angle BOA = \pi - 2\alpha - 2\beta + \pi = 2\pi - 2\alpha - 2\beta$

6) $\alpha = \alpha + \beta - \frac{\pi}{2} + \angle OAC \leftarrow \angle A$ в $\triangle ABC$

$\angle OAC = \frac{\pi}{2} - \beta$

7) $\triangle AOC$ — $\triangle$: $OA = OC$, след.:

$\angle OCA = \angle OAC = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\angle COA = 2\beta$.

8) По усл., B, O, P, C — лежат на ш₂. След, $BCOP$ — вписанный

След, $\angle BPO = \pi - \angle BCO = \pi - \frac{\pi}{2} + \alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha$

9) Из $\triangle BOP$: $\angle BOP = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha - \alpha - \beta + \frac{\pi}{2} = \pi - 2\alpha - \beta$

10) $\angle BOA$: $2\pi - 2\alpha - 2\beta = \pi - 2\alpha - \beta + \angle POA \Rightarrow \angle POA = \pi - \beta$

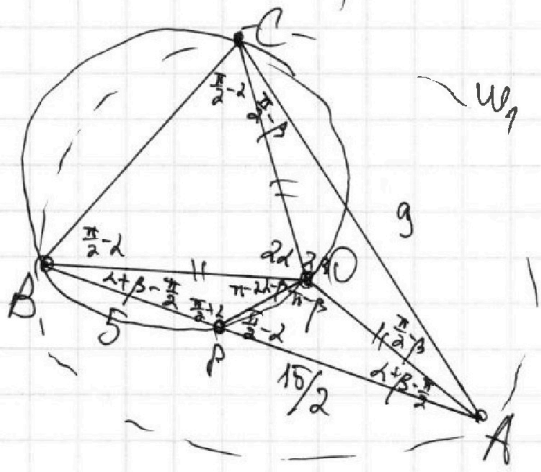
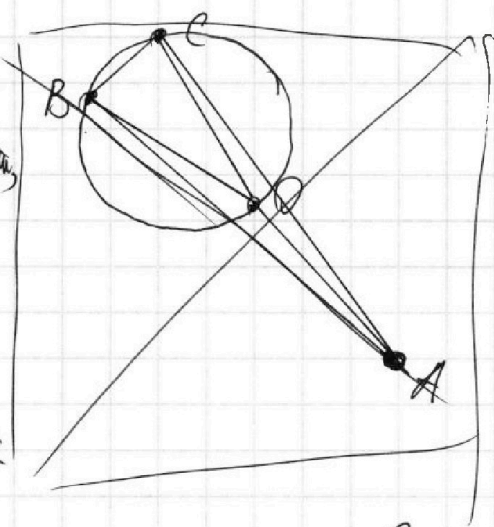
11) $\angle BPA$ — $\triangle$ — $\triangle$ $\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \alpha + \angle OPA = \pi \Rightarrow \angle OPA = \frac{\pi}{2} - \alpha$

12) По т. синусов в ~~$\triangle ABC$~~ $\triangle ABC$: $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$

$\frac{9}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow R = \frac{9}{2 \sin \beta}$

13) По т. синусов в $\triangle OBP$: $\frac{BP}{\sin \angle BOP} = \frac{OB}{\sin \angle BPO}$

$\frac{5}{\sin(\pi - 2\alpha - \beta)} = \frac{R}{\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)} \Rightarrow \frac{5}{\sin(2\alpha + \beta)} = \frac{9}{2 \sin \beta \cos \alpha}$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐2
☐3
☐4
☐5
☐6
☒7
☐СТРАНИЦА
3 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$M'(2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin 2 = 0 \\ \cos 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{18 \sin^2 2 + 7} = \sqrt{25 - 18 \sin^2 2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2 \neq 0 \\ \cos 2 = 0 \end{cases}$$

$$18 \sin^2 2 + 7 = 25 - 18 \sin^2 2$$

 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sin 2 \neq 0 \\ \cos 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2 \neq 0 \\ \cos 2 = 0 \\ 36 \sin^2 2 = 18 \end{cases}$$

 $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sin 2 = 0 \\ \cos 2 = 0 \\ \sin 2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Вспомогательная из этих точек и будет конст. значение ~~М(2)~~. $M(2)$.

• $\sin 2 = 0$: $M(2) = 5\pi + 2(5 + \sqrt{7})$

• $\cos 2 = 0 \Leftrightarrow \sin 2 = \pm 1$: $M(2) = 5\pi + 2(5 + \sqrt{7})$

• $\sin 2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$: $M(2) = 5\pi + 2(\sqrt{25-9} + \sqrt{7+9}) = 5\pi + 2(4+4) = 5\pi + 16$

т.к. $16 > 10 + 2\sqrt{7}$, ~~не конст. зн.~~ $M(2)$ достигается

($\frac{6}{26} > 2\sqrt{7}$
 $\frac{6}{26} > 25 - 18 \sin^2 2$)
при $\sin 2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $5\pi + 16$ при $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin 2)(y - 3\sqrt{2}\cos 2) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \leq 3\sqrt{2}\sin 2 \\ y \geq 3\sqrt{2}\cos 2 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x \geq 3\sqrt{2}\sin 2 \\ y \leq 3\sqrt{2}\cos 2 \end{cases} \quad (2) \\ x^2 + y^2 \leq 25 \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 3\sqrt{2} &\sqrt{2} \\ 18 &< 25 \\ \Downarrow \\ 3\sqrt{2} &< 5 \end{aligned}$$

Напл-ми xOy , (а) задрет кру с центром в $O(0;0)$, радиусом $R=5$ и выхв-кой трапеции. (т.к. нестр-ый знак)

(1) задрет две точки пересечения, уравнений $x = 3\sqrt{2}\sin 2$ и $y = 3\sqrt{2}\cos 2$.

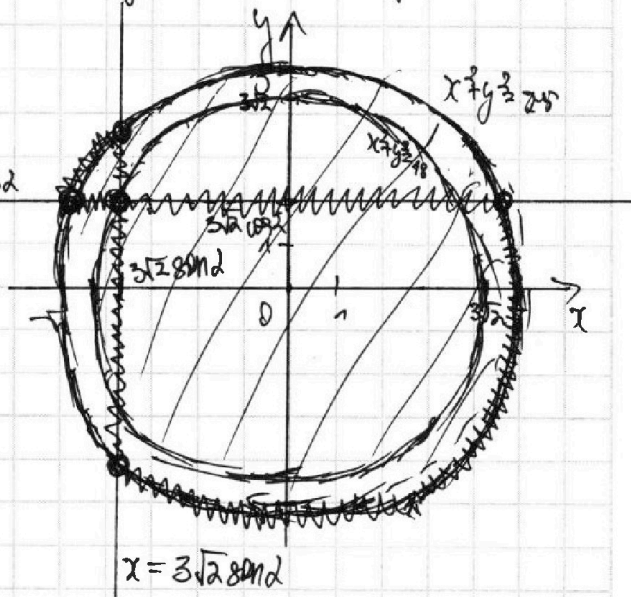
слева-сверху от точки $(3\sqrt{2}\sin 2; 3\sqrt{2}\cos 2)$ и справа-снизу от неё же. (см. рис)

Заметим, что точки пересечения этих прямых образуют окружность с центром в т. $O(0;0)$ и радиусом $r = 3\sqrt{2}$ и вых. трапеции, т.к. $(3\sqrt{2}\sin 2)^2 + (3\sqrt{2}\cos 2)^2 = (3\sqrt{2})^2$ верно по основанию т.т. теореме Пифагора. (x_0, y_0) - координаты т. перес. прямых (1), вых. трапеции.

Фигура $F(2)$ состоит из частей ~~окружности~~ круга (2), лежащих в областях "слева-сверху" и "справа-снизу" от прямых (1), вых. трапеции.

Этого, периметр будет состоять из двух хорд-отрезков из прямых (1) ~~и~~ вых. круга и двух хорд (см. замечание в условии и рис.)

Найдем т. перес. пр. прямых (1) и пр. круга: окружности (2).





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} x = 3\sqrt{2}\sin 2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3\sqrt{2}\sin 2 \\ y = \pm \sqrt{25 - 18\sin^2 2} \end{cases} \quad \text{II) } \begin{cases} y = 3\sqrt{2}\cos 2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{25 - 18\cos^2 2} \\ y = 3\sqrt{2}\cos 2 \end{cases}$$

$$(3\sqrt{2}\sin 2; \sqrt{25 - 18\sin^2 2});$$

$$(3\sqrt{2}\sin 2; -\sqrt{25 - 18\sin^2 2})$$

$$(\sqrt{25 - 18\cos^2 2}; 3\sqrt{2}\cos 2);$$

$$(-\sqrt{25 - 18\cos^2 2}; 3\sqrt{2}\cos 2)$$

След., ^{циркулярная} длина хорд равна: $2(\sqrt{25 - 18\sin^2 2} + \sqrt{25 - 18\cos^2 2})$.

Интерпретация, связанная с геометрией.

Вспомогательная вписанная окружность:

AB, CD - хорды окруж. окруж., $AB \perp CD$.

Найдем $AD + BC$ - длины дуг.

~~AB~~ Пусть α - мера $\widehat{AD}$: 2α , β : 2β

$\angle ABD$ - впис., центр. кр. $\widehat{AD} \Rightarrow \angle ABD = \alpha$.

$\angle BDC$ - впис., центр. кр. $\widehat{BC} \Rightarrow \angle BDC = \beta$

Пусть $AB \cap CD = O$. $\triangle AOB$ - п/г $\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta = 180^\circ = \pi$.

Длина дуги выражается через её радиусную меру: $\widehat{AD} = R \cdot \widehat{AD}$,
R - радиус окруж.

След., $\widehat{AD} + \widehat{BC} = R \cdot 2\alpha + R \cdot 2\beta = \pi R$.

След., в нашей задаче, сумма длин найденных дуг равна πR .

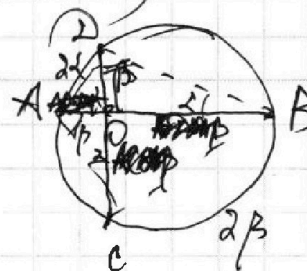
След., периметр $P(2) \neq M = 5\pi + 2(\sqrt{25 - 18\sin^2 2} + \sqrt{25 - 18\cos^2 2})$

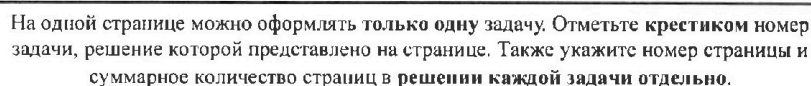
$$M(2) = 5\pi + 2(\sqrt{25 - 18\sin^2 2} + \sqrt{7 + 18\sin^2 2})$$

$$M'(2) = R$$

$$M'(2) = 2\left(\frac{-36\sin 2 \cos 2}{2\sqrt{25 - 18\sin^2 2}} + \frac{36\sin 2 \cos 2}{2\sqrt{7 + 18\sin^2 2}}\right) = 36\sin 2 \cos 2 \left(\frac{1}{\sqrt{25 - 18\sin^2 2}} - \frac{1}{\sqrt{7 + 18\sin^2 2}}\right)$$

$$M''(2) = R$$





СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

1) т.к. ΔABC - правильная, то её основания: правильные треугольники.

2) Пусть z_1, z_2 — радиусы, впис. в верхнее и в нижнее основания OK .
($z_1 < z_2$).

Против стороны верхнего основания — a , нижнего b ($b > a$)

Пусть сторона верхнего основания — a , нижнего b ($b > a$)
 $\Rightarrow S_{\text{полн.}} = b^2 \sqrt{2}$, N — кол-во ребер = кол-во вершин основания
 (след, пирамида n -угольная)

Доковая пов-ть: ЛЮБ трезубчиков с остывшим в.



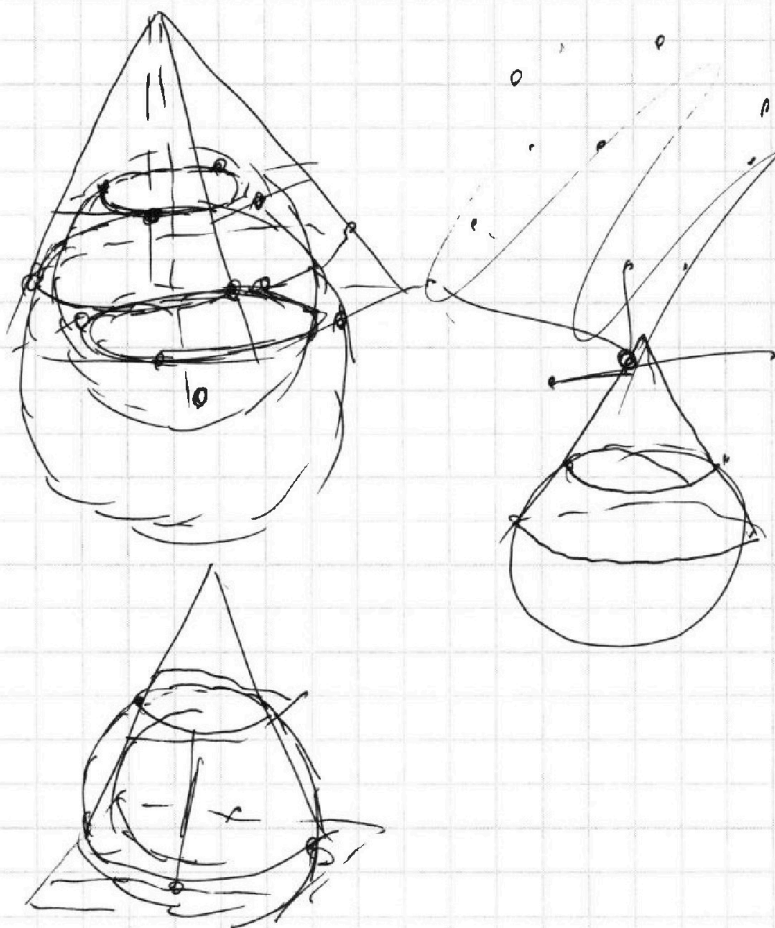
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

17.04.2021





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА

из

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 12

$$f(\alpha) = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha} =$$

$$f'(\alpha) =$$

$$\begin{aligned} 25 - 18 \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha = 0 \\ \cos \alpha = 1 \end{aligned}$$

$$f'(\alpha) = \frac{-36 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} + \frac{-36 \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} = 0$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} + \frac{\cos \alpha}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} = 0$$

$$f(\alpha) = \sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} + \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$$

$$f'(\alpha) = \frac{-36 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} + \frac{36 \sin \alpha \cos \alpha}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} = 0$$

$$36 \sin \alpha \cos \alpha \left(\frac{1}{\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha}} - \frac{1}{\sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= 0 \\ \cos \alpha &= 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{25 - 18 \sin^2 \alpha} = \sqrt{25 - 18 \cos^2 \alpha}$$

$$36 \sin^2 \alpha = 18 \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

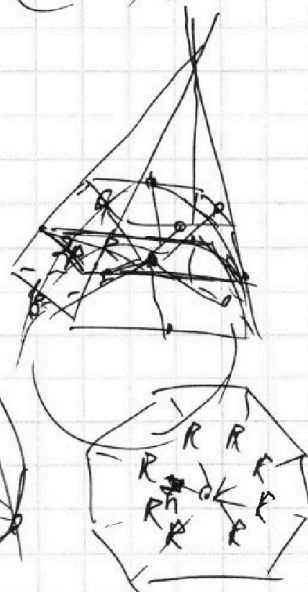
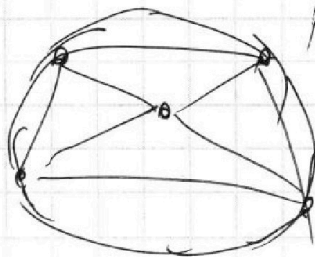
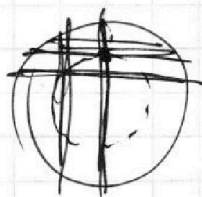
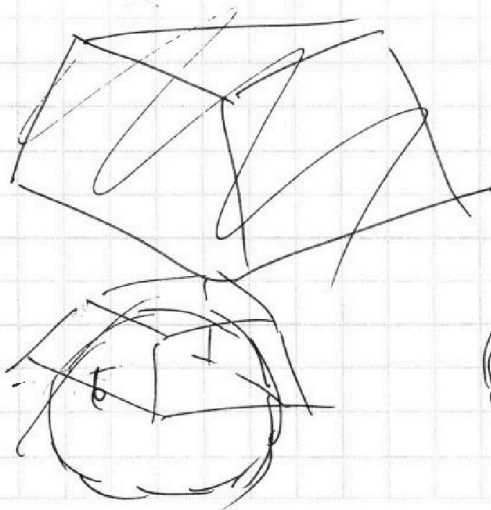
$$AO = AC \sin \alpha$$

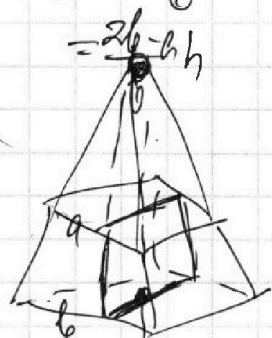
$$OC = AC \cos \alpha$$

$$BO = BD \sin \alpha$$

$$CO = BD \cos \alpha$$

$$L = (AC + BD)(\sin \alpha + \cos \alpha)$$







На одной странице можно оформлять **только одну задачу**. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

150 экз

127

$$y = -3x + 1 + 2k \quad (I)$$

$$y = x - 1 + 2k \quad (II)$$

$\frac{x}{y} \neq$

(I):

~~$\arccos \frac{x}{y} + \arccos \frac{3x}{4} + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$~~

$-5 \leq x \leq 5, -4 \leq y \leq 4$

~~$-5 \leq -3x \leq 15$~~ $| +1+2k$

~~$-16 \leq -3x + 1 + 2k \leq 16$~~ $| +2k$

$16 + 2k \leq 4$

$k \leq -6$

~~$-4 \leq -3x + 1 + 2k$~~ $| +2k$ $2k \geq 10$

$k \geq -1$

$k \geq 5$

$-5 \leq x \leq 4 \quad (3)$

$15 \geq -3x \geq -12 \quad | +1+2k$

$5 \geq 16 + 2k \geq -3x + 1 + 2k \geq -11 + 2k \geq -4$

$2k \leq -11$

$k \leq -5$

$2k \geq 7$

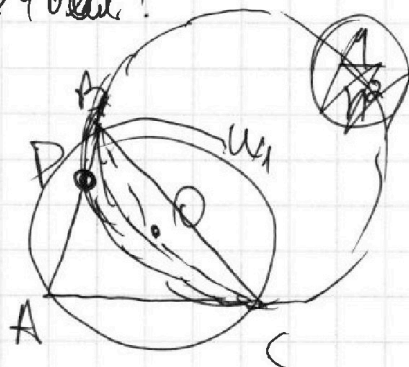
$k \geq 3$

14 экз



4 экз.

24 экз!



$B \sqrt{\frac{4}{n}}$
 $P \sqrt{\frac{3}{n-1}}$
 $\frac{12}{n(n-1)} = P_{14}$

$\frac{4+k}{n}$
 $\frac{3+k}{n-1}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Метр

A - центр. изог. y., B - м. : $\text{см}^2 = 202$, C - физм. : $\text{см}^3 = 33$

A · B · C - кв. нм. числа

11 · 101

A = a · 1111, a ∈ [1; 9]; B = 1111

B = 6 · 11

B = 6 · 101

$$a \cdot 1111 \cdot 101 \cdot B \cdot C = k^2$$

$$\begin{cases} C: 11 \\ C: 101 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C: 11 \\ B: 101 \end{cases}$$



$$\begin{array}{r} 11 \\ 101 \\ \hline 31 \end{array}$$

$$A = a \cdot 1111$$

$$\text{След, } A \cdot B \cdot C = a \cdot 1111 \cdot B \cdot C = a \cdot 11 \cdot 101 \cdot B \cdot C = k^2$$

$$\bullet C = 101k, k \in \mathbb{N}, \text{ но } C \leq 99 \emptyset$$

$$\bullet B = 1111k \emptyset$$

$$\bullet C = 11k, B = 101k$$

$$\text{А2 упр } x, y > 0: \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{x(y+1)}$$

$$M = x^3 - y^3 - 3xy - ? = \frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} \Rightarrow \begin{cases} xy = xy - y + x - 1 \\ x \neq 0, y \neq 0 \\ x \neq 1, y \neq 1 \\ x = y + 1 \end{cases}$$

$$M = x^3 - (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) = y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1$$

$$\text{А3 упр а) } x, y \in \mathbb{R}: \sin(\pi x + \pi y)$$

$$a \cos \frac{x}{5} + a \cos \frac{y}{5} < \frac{3a}{2}$$

$$\begin{aligned} (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x &= (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \\ \sin^2 \pi x + \sin \pi x \sin \pi y &= \cos^2 \pi x + \cos \pi x \cos \pi y \end{aligned}$$

$$\cos 2\pi x \neq \cos(\pi(x+y)) = 0$$

$$2 \cos \frac{2\pi x + \pi x + \pi y}{2} \cos \frac{2\pi x - \pi x - \pi y}{2} = 0$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}(3\pi x + \pi y)\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\pi x - \pi y)\right) = 0$$