МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A;B;C)$ такие, что:
   - A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
   - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
   - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
   - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.

2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x;y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y)\sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y)\cos \pi x$.

   б) Сколько пар целых чисел (x,y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству
   $$\arcsin\frac{x}{6} + \arcsin\frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1, описанной около остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_2, описанная около треугольника BOC, пересекает отрезок AB в точке P. Найдите площадь треугольника ABC, если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x;y)$ которых удовлетворяют системе неравенств
   $$\begin{cases} \left(x + 5\sqrt{2}\cos\alpha\right)\left(y + 5\sqrt{2}\sin\alpha\right) \leqslant 0, \\ x^2 + y^2 \leqslant 169. \end{cases}$$
   Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α, при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 [x] 2 [ ] 3 [ ] 4 [ ] 5 [ ] 6 [ ] 7 [ ]

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№1

$A, B, C \in \mathbb{N}$

$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101 \qquad (a \in \mathbb{N},\ a \in [1; 9])$

$B = \overline{b_1 b_2 b_3}$, $C = \overline{c_1 c_2}$

$ABC = a \cdot \underset{P}{11} \cdot \underset{P}{101} \cdot \overline{b_1 b_2 b_3} \cdot \overline{c_1 c_2} = \underset{(n \in \mathbb{N})}{n^2}$, значит, $ABC \vdots 101^2$, $(n^2 \vdots 101 \Rightarrow n \vdots 101 \Rightarrow n^2 \vdots 101^2)$

$a \not\vdots\, 101$, $\overline{c_1 c_2} < 100$, т.е. $\overline{c_1 c_2} \not\vdots\, 101$, $11 \not\vdots\, 101$, значит, $\overline{b_1 b_2 b_3} \vdots 101$.

Тогда $\overline{b_1 b_2 b_3} = 101 \cdot k$, где $k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$, т.е.

$\overline{b_1 b_2 b_3} = \cancel{k0k} = \overline{k0k}$ т.е. $b_2 = 0$, $b_1 = b_3 = k$.

Поскольку в записи B есть 6, $B = \overline{k0k}$, то $B = 606$.

$B = 2 \cdot 3 \cdot 101 \not\vdots\, 11$. $ABC = a \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \overline{c_1 c_2} = n^2$,

значит, $ABC \vdots 11^2$. $a \not\vdots\, 11$, $2 \cdot 3 \not\vdots\, 11$, $101^2 \not\vdots\, 11$, значит,
$(n^2 \vdots 11 \Rightarrow n \vdots 11 \Rightarrow n^2 \vdots 11^2)$

$\overline{c_1 c_2} \vdots 11$, по признаку делимости на 11: $c_1 = c_2$, т.е.

$\overline{c_1 c_2} = 11 \cdot c_1$. $ABC = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot c_1 = n^2$.

В записи C есть цифра 3, $C = \overline{c_1 c_1}$, значит, $C = 33$.

$ABC = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot a = n^2$. ~~ABC~~ $ABC \vdots 2^2$, т.е.

$a \vdots 2$. Получаем: $a \in \{2; 4; 6; 8\}$. При $a = 2$: $ABC = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2$ – подходит

при $a = 4$: $ABC = 2 \cdot (2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2) \neq n^2$ – не подходит

при $a = 6$: $ABC = 3 \cdot (2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2) \neq n^2$ – не подходит

при $a = 8$: $ABC = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2$ – подходит

Ответ: (2222; 606; 33); (8888; 606; 33)

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№2

$x, y > 0$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy} = \cancel{(x-2)(y+2)} \quad \frac{(x-2)+(y+2)+5}{(x-2)(y+2)} =$$

$$= \frac{x+y+5}{xy-2y+2x-4}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy-2y+2x-4} \qquad | : (x+y+5) \quad (>0)$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy-2y+2x-4}$$

$$\cancel{xy} - 2y + 2x - 4 = \cancel{xy}$$

$$x - y - 2 = 0$$

$$\underline{x = y + 2}$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (y+2)^3 - y^3 - 6y(y+2) = \cancel{y^3} + \cancel{6y^2} + \cancel{12y} + 8 - \cancel{y^3} -$$

$$- \cancel{6y^2} - \cancel{12y} = 8$$

Ответ: 8

б) $\underbrace{\arcsin\frac{x}{6}}_{\leq\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\arcsin\frac{y}{2}}_{\leq\frac{\pi}{2}} < \pi$ $\qquad x, y \in \mathbb{Z}$

Запишем усл. существования $\arcsin\frac{x}{6}$ и $\arcsin\frac{y}{2}$:

$-1 \leq \frac{x}{6} \leq 1$; $\quad -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1$

$-2 \leq y \leq 2$

$-6 \leq x \leq 6$

При таких x и y нер-во выполняется когда $\arcsin\frac{x}{6}$ и $\arcsin\frac{y}{2}$ одновременно не равны $\frac{\pi}{2}$, т.е. значения $x = 6$ и $y = 2$ одновр. не принимаются. Также из

а): $\left[\begin{array}{l} y = -x-2n \quad (1) \\ y = 3x-2k \quad (2) \end{array}\right.$, $n, k \in \mathbb{Z}$

Заметим, что в (1) $y \equiv -x \pmod 2$, во (2) $y \equiv x \pmod 2$, т.е. при заданном x y может принимать любые значения (от -2 до 2, если $x \neq 6$). Для каждого

от $\underset{(12\text{ вар.})}{x \in \{-6; -5; \ldots; 5\}}$: подходят $\underset{(5\text{ вар.})}{y \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}}$,

для $\underset{(1\text{ вар.})}{x = 6}$: подходят $\underset{(4\text{ вар.})}{y \in \{-2; -1; 0; 1\}}$

Всего: $12 \cdot 5 + 1 \cdot 4 = 64$ пары $(x; y)$

Ответ: 64

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№ 3

а) $(\sin \pi x + \sin \pi y)\sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y)\cos \pi x$

$$\sin^2 \pi x + \frac{1}{2}\left(\cos(\pi(x-y)) - \cos(\pi(x+y))\right) = \cos^2 \pi x - \frac{1}{2}\left(\cos(\pi(x+y)) + \cos(\pi(x-y))\right)$$

$$2(\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x) + \cos(\pi(x-y)) - \cos(\pi(x+y)) + \cos(\pi(x+y)) + \cos(\pi(x-y)) = 0$$

$$-2\cos(2\pi x) + 2\cos(\pi(x-y)) = 0$$

$$\cos(\pi(x-y)) = \cos(2\pi x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ \pi(x-y) = -2\pi x + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x-y = 2x + 2n \\ x-y = -2x + 2k \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y = -x - 2n \\ y = 3x - 2k \end{array}\right.$$

Ответ: $(x; -x-2n)$; $(x; 3x-2k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$

б) ~~$P = \arcsin\frac{x}{6} + \arcsin\frac{y}{2} < \pi$~~

~~$\sin P = \frac{x}{6}\cos(\arcsin$~~

~~$\sin P = \frac{x}{6}\cos(\arcsin\frac{y}{2}) + \frac{y}{2}\cos(\arcsin\frac{x}{6}) = \frac{x}{6}\sqrt{1-\frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{36}} =$~~

~~$= \frac{x\sqrt{4-y^2} + y\sqrt{36-x^2}}{12}$.~~

~~Запишем усл. существования $\arcsin\frac{x}{6}$ и $\arcsin\frac{y}{2}$:~~

~~$-1 \le \frac{x}{6} \le 1$; $-1 \le \frac{y}{2} \le 1$~~

~~$-6 \le x \le 6$ $-2 \le y \le 2$.~~

~~$-\frac{\pi}{2} \le \frac{x}{6} \le \frac{\pi}{2}$~~

~~$-3\pi \le x \le 3\pi$~~

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№4

Пусть ~~всего~~ было $n \in \mathbb{N}$ одиннадцатиклассников, добавили k билетов.

вероятность попасть Пете и Васе вместе в начале месяца:

$$\frac{C_{n-2}^{2}}{C_n^4} = \frac{\frac{(n-2)!}{2\cdot(n-4)!}}{\frac{n!}{4!\cdot(n-4)!}} = \frac{(n-2)!\cdot 4!}{2\cdot n!} = \frac{2\cdot3\cdot4}{2\cdot n(n-1)} =$$

$$= \frac{12}{n(n-1)}$$, где C_{n-2}^2 – кол-во способов выбрать ещё 2-ух человек

C_n^4 – кол-во способов выбрать 4-ёх чел., которые поедут на концерт.

вероятность попасть Пете и Васе вместе в конце месяца:

$$\frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{4+k}} = \frac{\frac{(n-2)!}{(2+k)!\cdot(n-4-k)!}}{\frac{n!}{(4+k)!\cdot(n-4-k)!}} = \frac{(n-2)!\cdot(4+k)!}{n!\cdot(2+k)!} =$$

$$= \frac{(3+k)(4+k)}{n(n-1)} = 6\cdot\frac{12}{n(n-1)}$$

$(3+k)(4+k) = 72$

$k^2+7k+12=72$

$k^2+7k-60=0$

$k=-12;\ 5$, но $k>0$

$k=5$

Всего билетов: $4+k=9$

Ответ: 9

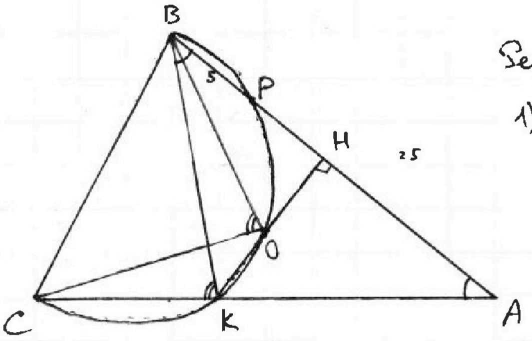
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☒	☐	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5



$AC = 35$

Решение:

1) Д.п.: $AC \cap \omega_1 = K$, тогда по св-ву отрезков секущих:

$$AK \cdot AC = AP \cdot AB$$

$$AK = \frac{25 \cdot 30}{35} = \frac{5 \cdot 30}{7} = \frac{30}{49} AC$$

2) Рассмотрим ω_1: по теор. о впис. угле, $\angle A = \frac{1}{2} \cup BC = \frac{1}{2} \angle BOC$. $\underbrace{\angle BKC = \angle BOC}_{\text{как впис. опир-ся на одну дугу}} = 2\angle A$. $\underbrace{\angle BKC = \angle KBA + \angle A}_{\text{по теор. о внеш. угле}}$, т.е. $\angle KBA = \angle A \Rightarrow \triangle BKA$ – равнобедренный по признаку.

Д.п.: H – сер. AB, тогда $\underbrace{KH \perp AB}_{\text{по св-ву равноб. треуг.}}$, значит, KH – серединный перпендикуляр к AB, т.е. $O \in KH$ как центр описанной окружности $\triangle ABC$. $AH = \frac{AB}{2} = \frac{30}{2} = 15$, $AK = \frac{30}{49} \cdot 35$

$$\cos \angle A = \frac{AH}{AK} = \frac{15}{\frac{30}{49} \cdot 35} = \frac{49}{2 \cdot 35} = \frac{7}{10}.$$

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

($\angle A$ – острый)

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

Ответ: $\frac{105\sqrt{51}}{2}$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА 2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

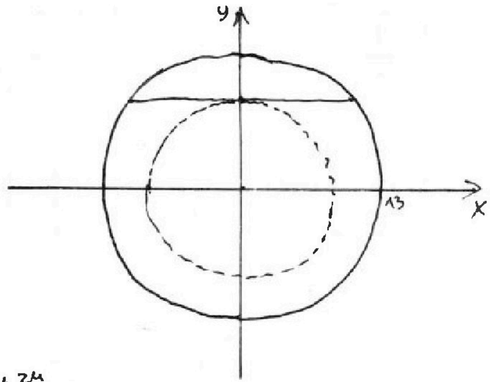
Пусть $AP = a_1$, $PC = a_2$, $BP = b_1$, $PD = b_2$, тогда найдём максимум суммы $a_1 + a_2 + b_1 + b_2$.

Заметим, что по св-ву пересекающихся хорд $a_1 a_2 = b_1 b_2$.

Запишем степень точки P отн. окружности (2): $a_1 a_2 = \deg P =$

$= |d^2 - R^2| = |(5\sqrt{2})^2 - 13^2| = |50 - 169| = 119$

Заметим, что наиб. сумма достиг. при $a_1 + a_2$ или $b_1 + b_2 = 13$ и $\alpha = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$



$2 \cdot \sin\left(\arccos \frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13} \cdot 2 = \frac{24}{13}$

$\cancel{26 + \frac{24}{13} =}$

Ответ: при $a = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$: $26 + \frac{14}{13} + 13\pi$

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно.**

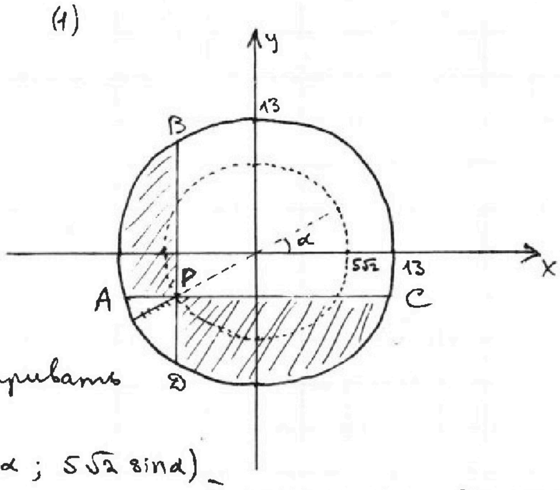
1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☒	☐

СТРАНИЦА 1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha)\le 0 & (1)\\ x^2+y^2\le 169 & (2)\end{cases}$$



Неравенство (2) задаёт круг с центром $(0;0)$ и радиусом, равным 13. Будем рассматривать α: $0\le\alpha\le 2\pi$. $(5\sqrt{2}\cos\alpha;\ 5\sqrt{2}\sin\alpha)$ – точка на окружности с центром $(0;0)$ и радиусом $5\sqrt{2}$. $P(-5\sqrt{2}\cos\alpha;\ -5\sqrt{2}\sin\alpha)$ (*) – ~~про~~ симметричная ей точка относительно $(0;0)$.

Если через эту точку (*) провести две прямые, параллельные осям, то $\Phi(\alpha)$ – это совокупность левой верхней и правой нижней частей круга, на которые он разбивается проведенными прямыми. Отметим точки пересечения проведенных прямых с окружностью (2). $\angle APB = \frac{\smile AB+\smile CD}{2} =$ как внутренний угол окружности $90^\circ = \frac{\smile BC+\smile AD}{2}$, то из однородности окружности получаем: ~~$\smile AB$~~ сумма длин дуг AB и CD равна сумме дуг BC и AD, т.е. сумма длин дуг AB и CD равна длине полуокружности, т.е. 13π.

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

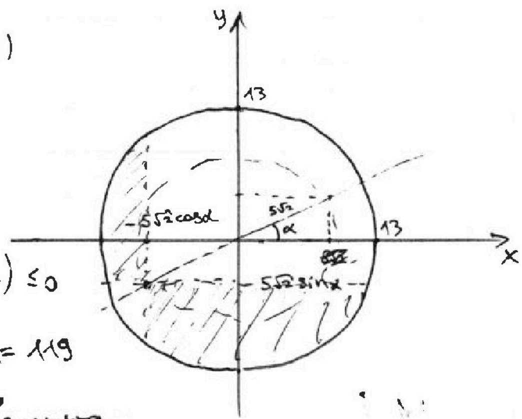
1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№6

$$\begin{cases} (x+5\sqrt{2}\cos\alpha)(y+5\sqrt{2}\sin\alpha) \le 0 & (1) \\ x^2+y^2 \le 169 \end{cases}$$



Рассм. (1):

$$xy + 5\sqrt{2}(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + 25\sin(2\alpha) \le 0$$

$$|50-169| = 119$$

$$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2 = |d^2 - R^2|$$

сумма дуг равна $\frac{1}{2}$ длины окр-ти

$x > -5\sqrt{2}\cos\alpha$

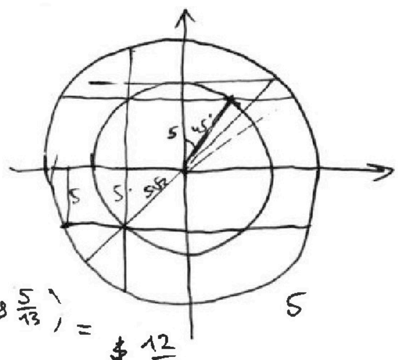
$y < -5\sqrt{2}\sin\alpha$

$$a_1+a_2+b_1+b_2 \to \max$$

$$\underbrace{a_1+a_2}_{\wedge} + \underbrace{b_1+b_2}_{\text{const}} \ge \cancel{2\sqrt{a_1a_2}} \ge 2\sqrt{a_1a_2} + b_1+b_2 \text{, рав-во дост при } a_1 = a_2$$

$$\cancel{a_1+a_2+b_1+b_2 = a_1 + \frac{b_1b_2}{a_1}}$$

$$a_1+a_2+b_1+b_2 \le \cancel{2\sqrt{\frac{(a_1+b_1)^2}{2}} + 2\sqrt{\frac{(a_2+b_2)^2}{2}}}$$



$$\sin\left(\arccos\frac{5}{13}\right) = \frac{12}{13}$$

5

12

$$\frac{12}{13}\cdot 4 = \frac{48}{13}$$

26 +

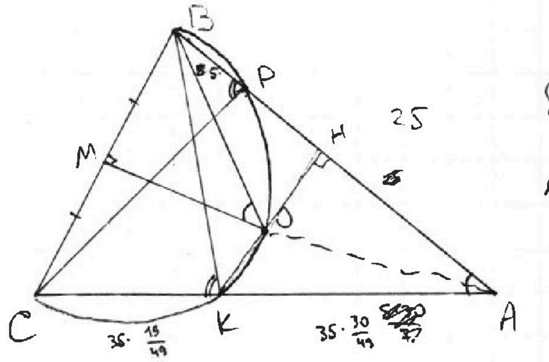
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1	2	3	4	5	6	7
☒	☒	☒	☒	☒	☒	☒

СТРАНИЦА __ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. **Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно.** Порча QR-кода недопустима!

№5



$AC = 35$

Решение:

1) Доп. построение: $AC \cap \omega_2 = K$,

тогда по св-ву отр. секущих:

$\cancel{AK \cdot 35} = AK \cdot AC = AP \cdot AB$

$AK \cdot 35 = 25 \cdot 30$

$AK = \frac{5 \cdot 30}{7} = AC \cdot \frac{30}{49}$

2) Доп. построение: M - сер. BC.

O - центр опис. окр. $\triangle ABC$ => O лежит на серединном перпендикуляре к BC, т.е. $OM \perp BC$. Рассмотрим ω_1: по теор. ~~об~~ о вписанном угле: $\angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC = \frac{1}{2}\angle BOC$. $OM \perp BC$, M - сер. BC => $\triangle BOC$ - равнобедренный по признаку, т.е. $\angle BOC = 2\angle BOM$, отсюда $\angle BOM = \angle BAC$ — правильно.

~~Пусть R - радиус ω_1, тогда по обобщ. т. синусов: $2R = \frac{BC}{\sin\angle BAC}$~~

$\angle BKC = \angle BOC = 2\angle BAC$, т.е. $\angle KBA = \angle KAB$ (по св-ву внеш. угла $2\angle BAC = \angle KBA + \angle BAC$)

(как впис. опир-ся на одну дугу)

Значит, из р/б треуг $\triangle BKA$ и $\triangle CPA$ $BK = 35 \cdot \frac{30}{49}$; $CP = 25$

$K - O - H \perp AB$

$\cancel{25 \cdot 5} = 35 \cdot$

из $\triangle KHA$ $\cos\angle A = \frac{\frac{30}{2}}{35 \cdot \frac{30}{49}} = \frac{15}{35 \cdot \frac{30}{49}} = \frac{49}{35 \cdot 2} = \frac{7}{10}$