



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 6,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 2, а y — увеличить на 2. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 6xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 6 раз меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекла отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = 25$, $BP = 5$, $AC = 35$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha) (y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 169. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади верхнего основания пирамиды к площади её боковой поверхности.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

21

$$A, B, C \in \mathbb{N}$$

$$A = \overline{aaaa} = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101 \quad (a \in \mathbb{N}, a \in [1; 9])$$

$$B = \overline{b_1 b_2 b_3}, \quad C = \overline{c_1 c_2}$$

$$ABC = \underbrace{a \cdot 11 \cdot 101}_{\substack{m \\ p}} \cdot \overline{b_1 b_2 b_3} \cdot \overline{c_1 c_2} = n^2, \text{ значит, } ABC : 101^2, \\ (n \in \mathbb{N}) \quad (n^2 : 101 \Rightarrow n : 101 \Rightarrow n^2 : 101^2)$$

$$a \not\equiv 101, \quad \overline{c_1 c_2} < 100, \text{ т.е. } \overline{c_1 c_2} \not\equiv 101, \quad 11 \not\equiv 101, \text{ значит, } \overline{b_1 b_2 b_3} : 101.$$

$$\text{Поскольку } \overline{b_1 b_2 b_3} = 101 \cdot k, \text{ где } k \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}, \text{ т.е.}$$

$$\overline{b_1 b_2 b_3} = \overline{k0k} = k0k, \text{ т.е. } b_2 = 0, \quad b_1 = b_3 = k.$$

$$\text{Поскольку в записи } B \text{ есть } 6, \quad B = \overline{k0k}, \text{ то } B = 606.$$

$$B = 2 \cdot 3 \cdot 101 \not\equiv 11. \quad ABC = a \cdot 11 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \overline{c_1 c_2} = n^2,$$

$$\text{значит, } ABC : 11^2. \quad a \not\equiv 11, \quad 2 \cdot 3 \not\equiv 11, \quad 101^2 \not\equiv 11, \text{ значит,} \\ (n^2 : 11 \Rightarrow n : 11 \Rightarrow n^2 : 11^2)$$

$$\overline{c_1 c_2} : 11, \text{ по признаку делимости на 11: } c_1 = c_2, \text{ т.е.}$$

$$\overline{c_1 c_2} = 11 \cdot c_1. \quad ABC = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a \cdot c_1 = n^2.$$

$$\text{В записи } C \text{ есть цифра } 3, \quad C = \overline{c_1 c_1}, \text{ значит, } C = 33.$$

$$ABC = 11^2 \cdot 101^2 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot a = n^2. \quad ABC \not\equiv 2^2, \text{ т.е.}$$

$$a : 2. \text{ Получаем: } a \in \{2; 4; 6; 8\}. \text{ При } a = 2: \quad ABC = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \\ \text{— подходит}$$

$$\text{при } a = 4: \quad ABC = 2 \cdot (2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2) \neq n^2 \text{ — не подходит}$$

$$\text{при } a = 6: \quad ABC = 3 \cdot (2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2) \neq n^2 \text{ — не подходит}$$

$$\text{при } a = 8: \quad ABC = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^2 \cdot 101^2 \text{ — не подходит}$$

$$\text{Ответ: } (2222; 606; 33); (8888; 606; 33)$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☒	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 2

$$x, y > 0$$

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy} = \frac{(x-2)(y+2)}{(x-2)(y+2)} = \frac{(x-2)+(y+2)+5}{(x-2)(y+2)} =$$

$$= \frac{x+y+5}{xy-2y+2x-4}$$

$$\frac{x+y+5}{xy} = \frac{x+y+5}{xy-2y+2x-4} \quad | : (x+y+5) \quad (> 0)$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{xy-2y+2x-4}$$

$$\cancel{xy} - 2y + 2x - 4 = \cancel{xy}$$

$$x - y - 2 = 0$$

$$\underline{x = y + 2}$$

$$M = x^3 - y^3 - 6xy = (y+2)^3 - y^3 - 6y(y+2) = y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - y^3 -$$

$$- 6y^2 - 12y = 8$$

$$\text{Ответ: } 8$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☒	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\delta) \quad \underbrace{\arcsin \frac{x}{6}}_{\wedge \frac{\pi}{2}} + \underbrace{\arcsin \frac{y}{2}}_{\wedge \frac{\pi}{2}} < \pi \quad x, y \in \mathbb{Z}$$

~~асс~~ Заметим усл. существования $\arcsin \frac{x}{6}$ и $\arcsin \frac{y}{2}$:

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 & \quad ; \quad -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \\ \cancel{-6 \leq x \leq 6} & \quad \cancel{-2 \leq y \leq 2} \\ \cancel{-6 \leq x \leq 6} & \quad -2 \leq y \leq 2 \\ -6 \leq x \leq 6 & \end{aligned}$$

При таких x и y пер-во выполняется когда $\arcsin \frac{x}{6}$ и $\arcsin \frac{y}{2}$ одновременно не равны $\frac{\pi}{2}$, т.е. ~~$\frac{x}{6} \neq \frac{y}{2}$~~ значения $x=6$ и $y=2$ одновр. не принимаются. Максимально

$$a) : \begin{cases} y = -x - 2n & (1) \\ y = 3x - 2k & (2) \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}$$

Заметим, что в (1) $y \equiv -x \pmod{2}$, в (2) $y \equiv x \pmod{2}$.

т.е. при заданном x y может принимать любые значения (кроме от -2 до 2, если $x \neq 6$). Для каждого x

от $x \in \{-6, -5, \dots, 5\}$: подходят $y \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
(16 вар.) (12 вар.) (5 вар.)

для ~~$x=6$~~ $x=6$: подходят $y \in \{-2, -1, 0, 1\}$
(1 вар.) (4 вар.)

Всего: ~~126~~ $5 + 1 \cdot 4 = 64$ пары (x, y)

Ответ: ~~126~~ 64



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☒

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

~ 3

$$a) (\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x - \cos \pi y) \cos \pi x$$

$$\sin^2 \pi x + \frac{1}{2} (\cos(\pi(x-y)) - \cos(\pi(x+y))) = \cos^2 \pi x - \frac{1}{2} (\cos(\pi(x+y)) + \cos(\pi(x-y)))$$

$$2(\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x) + \cos(\pi(x-y)) - \cos(\pi(x+y)) + \cos(\pi(x+y)) + \cos(\pi(x-y)) = 0$$

$$-2 \cos(2\pi x) + 2 \cos(\pi(x-y)) = 0$$

$$\cos(\pi(x-y)) = \cos(2\pi x)$$

$$\begin{cases} \pi(x-y) = 2\pi x + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ \pi(x-y) = -2\pi x + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y = 2x + 2n \\ x-y = -2x + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x - 2n \\ y = 3x - 2k \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (x; -x-2n); (x; 3x-2k), \quad n, k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$d) P = \arcsin \frac{x}{6} + \arcsin \frac{y}{2} < \pi$$

$$\sin P = \frac{x}{6} \cos(\arcsin \frac{y}{2}) + \frac{y}{2} \cos(\arcsin \frac{x}{6})$$

$$\frac{-\sqrt{3}}{2} \leq \frac{x}{6} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin P = \frac{x}{6} \sqrt{1 - \frac{y^2}{4}} + \frac{y}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{36}} = \frac{x \sqrt{4-y^2}}{12} + \frac{y \sqrt{36-x^2}}{12}$$

Замечем усл. существования $\arcsin \frac{x}{6}$ и $\arcsin \frac{y}{2}$:

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{x}{6} \leq 1 & \quad ; \quad -1 \leq \frac{y}{2} \leq 1 \\ -6 \leq x \leq 6 & \quad -2 \leq y \leq 2 \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☒ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА

4 ИЗ 4

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

нч

Пусть ~~сначала~~ было $n \in \mathbb{N}$ одинадцатиклассников, добавили k билетов.

Вероятность поехать Пете и Вase вместе в начале месяца:

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!}{2 \cdot (n-4)!} = \frac{(n-2)! \cdot 4!}{2 \cdot n!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot n(n-1)} =$$

$$= \frac{12}{n(n-1)}, \text{ где } C_{n-2}^2 - \text{кол-во способов выбрать еще 2-ух человек}$$

C_n^4 - кол-во способов выбрать 4-ёх чел., которые поедут на концерт.

Вероятность поехать Пете и Вase вместе в конце месяца:

$$\frac{C_{n-2}^{2+k}}{C_n^{4+k}} = \frac{(n-2)!}{(2+k)! \cdot (n-4-k)!} = \frac{(n-2)! \cdot (4+k)!}{n! \cdot (2+k)!} =$$

$$= \frac{(3+k)(4+k)}{n(n-1)} = 6 \cdot \frac{12}{n(n-1)}$$

$$(3+k)(4+k) = 72$$

$$k^2 + 7k + 12 = 72$$

$$k^2 + 7k - 60 = 0$$

$$k = -12; 5, \text{ но } k > 0$$

$$k = 5$$

Всего билетов: $4 + k = 9$

Ответ: 9

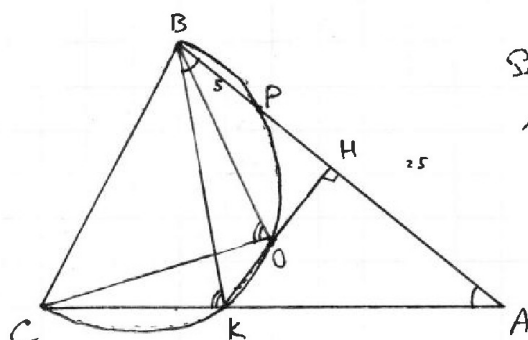
На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№ 5

$AC = 35$

Решение:

1) Д.п.: $AC \cap \omega_1 = K$, тогда

по св.-ву отрезков секущих:

$$AK \cdot AC = AP \cdot AB$$

$$AK = \frac{25 \cdot 30}{35} = \frac{5 \cdot 30}{7} = \frac{30}{7} AC$$

2) Рассмотрим ω_1 : по теор. о впис. угле, $\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC =$

$$= \frac{1}{2} \angle BOC. \quad \angle BKC = \angle BOC = 2\angle A. \quad \angle BKC = \angle KBA + \angle A,$$

как впис. угол-ся на одну дугу по теор. о впис. угле

т.е. $\angle KBA = \angle A \Rightarrow \triangle BKA$ - равнобедренный по признаку.

Д.п.: H - сер. AB , тогда $KH \perp AB$, значит, KH -

- серединный перпендикуляр к AB , т.е. $O \in KH$ как центр описан-

ной окружности $\triangle ABC$. $AH = \frac{AB}{2} = \frac{30}{2} = 15$, $AK = \frac{30}{7} \cdot 35$

$$\cos \angle A = \frac{AH}{AK} = \frac{15}{\frac{30}{7} \cdot 35} = \frac{49}{2 \cdot 35} = \frac{7}{10}.$$

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \sqrt{1 - \frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{51}}{10}$$

($\angle A$ - острый)

$$S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{51}}{10} = \frac{105\sqrt{51}}{2}$$

Ответ: $\frac{105\sqrt{51}}{2}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Пусть $AP = a_1$, $PC = a_2$, $BP = b_1$, $PD = b_2$, тогда найдем максимум суммы $a_1 + a_2 + b_1 + b_2$.

Заметим, что по св-ву пересекающихся хорд $a_1 a_2 = b_1 b_2$.

Запишем степень точки P отн. окружности (2): $a_1 a_2 = \deg P =$

$$= |d^2 - R^2| = |(5\sqrt{2})^2 - 13^2| = |50 - 169| = 119$$

Заметим, что наиб. сумма

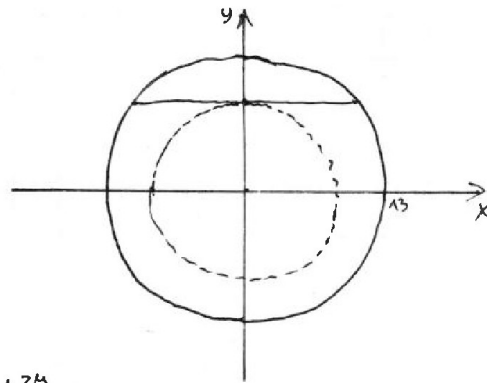
достигнута при $a_1 + a_2$ или $b_1 + b_2 = 13$.

$$\text{и } \alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin \left(\arccos \frac{5}{13} \right) = \frac{12}{13} \cdot 2 = \frac{24}{13}$$

$$26 + \frac{24}{13} =$$

$$\text{Ответ: при } \alpha = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} : 26 + \frac{14}{13} + 13\pi$$





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☒ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 & (1) \\ x^2 + y^2 \leq 169 & (2) \end{cases}$$

Неравенство (2) задаёт

круг с центром $(0; 0)$ и радиусом,

равным 13. Будем рассматривать

$\alpha: 0 \leq \alpha \leq 2\pi$. $(5\sqrt{2} \cos \alpha; 5\sqrt{2} \sin \alpha)$ — точка на окружности с центром $(0; 0)$ и радиусом $5\sqrt{2}$. $P(-5\sqrt{2} \cos \alpha; -5\sqrt{2} \sin \alpha)$ —

про симметричная ей точка относительно $(0; 0)$.

Если через эту точку P провести две прямые, параллельные осям, то $\Phi(\alpha)$ — это совокупность левой верхней и правой нижней частей круга, на которые он разбивается проведенными прямыми. Отметим точки пересечения

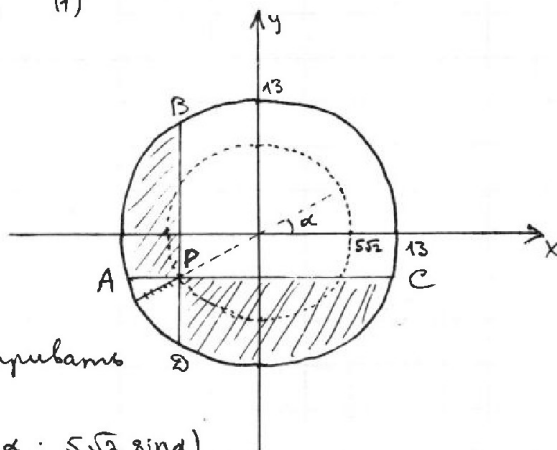
проведённых прямых с окружностью (2). $\angle APB = \frac{\angle AOB + \angle COD}{2} =$ как внутренний угол окружности

$90^\circ = \frac{\angle BOC + \angle AOD}{2}$, то из однородности окружности полу-

чаем: сумма длин дуг AB и CD равна сумме дуг BC и AD ,

т.е. сумма длин дуг AB и CD равна длине полуокружности, т.е.

13π .





На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☒ 3 ☒ 4 ☒ 5 ☒ 6 ☒ 7 ☒

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x + 5\sqrt{2} \cos \alpha)(y + 5\sqrt{2} \sin \alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 169 \end{cases} \quad (1)$$

Рассм. (1):

$$xy + 5\sqrt{2}(x \sin \alpha + y \cos \alpha) + 25 \sin(2\alpha) \leq 0$$

$$a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2 = |d^2 - R^2| = |50 - 169| = 119$$

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \rightarrow \max$$

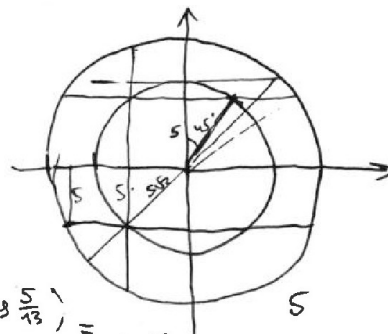
$$\underbrace{a_1 + a_2}_{\text{н}} + \underbrace{b_1 + b_2}_{\text{конст}} \geq \dots$$

$$\geq 2\sqrt{a_1 a_2} + b_1 + b_2, \text{ по б.б. } a_1 = a_2$$

или

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = a_1 + \frac{b_1 b_2}{a_1}$$

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 \leq 2\sqrt{\frac{(a_1 + b_1)^2}{2}} + 2\sqrt{\frac{(a_2 + b_2)^2}{2}}$$

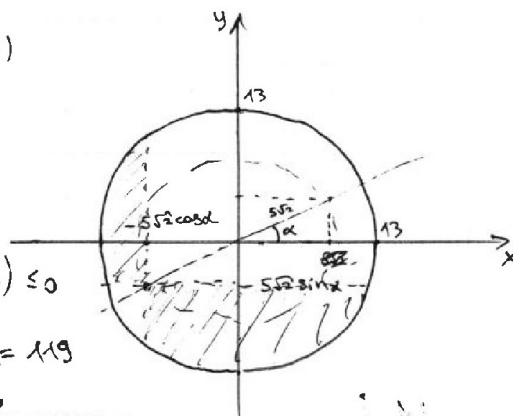


$$\sin(\arccos \frac{5}{13}) = \frac{12}{13}$$

12

cos alpha

$$\frac{12}{13} \cdot 4 = \frac{48}{13} \quad 26 +$$



Значит, у р/б прир $\triangle BKA$ и $\triangle CPA$ $BK = 35 \cdot \frac{50}{49}$; $CP = 25$