



МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел $(A; B; C)$ такие, что:
- A — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
 - B — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 2,
 - C — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 3,
 - произведение $A \cdot B \cdot C$ является квадратом некоторого натурального числа.
2. [3 балла] Положительные числа x и y таковы, что значение выражения $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy}$ не изменяется, если x уменьшить на 1, а y — увеличить на 1. Найдите все возможные значения выражения $M = x^3 - y^3 - 3xy$.
3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел $(x; y)$ такие, что $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$.
- б) Сколько пар целых чисел (x, y) удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася вычислили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 2,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?
5. [5 баллов] Точка O — центр окружности ω_1 , описанной около остроугольного треугольника ABC . Окружность ω_2 , описанная около треугольника BOC , пересекает отрезок AB в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если $AP = \frac{15}{2}$, $BP = 5$, $AC = 9$.
6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура $\Phi(\alpha)$, состоящая из всех точек, координаты $(x; y)$ которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2} \sin \alpha)(y - 3\sqrt{2} \cos \alpha) \leq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 25. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение M периметра (длины границы) фигуры $\Phi(\alpha)$ и укажите все значения α , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар Ω касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар ω касается всех её граней. Пусть сторона верхнего основания меньше, чем сторона нижнего. Найдите отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади её нижнего основания.



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☒ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 1

- 1) A - четырехзначное число из одинаковых цифр
- 2) B - трехзначное число с каждой цифрой 2
- 3) C - двузначное число с цифрой 3
- 4) A·B·C - кв-т некоторого натурального числа

$$A = \overline{aaaa} = 1000a + 100a + 10a + a = 1111a = 101 \cdot 11 \cdot a$$

$$A \cdot B \cdot C = k^2 \Rightarrow B \cdot C : 101 \quad 101 - \text{простое число}$$

$$C - \text{двузначное} \Rightarrow B : 101 \text{ и } B - \text{трехзначное} \Rightarrow$$

$$B = 202 \text{ и } B \text{ содержит } 2 \Rightarrow B = 202$$

$$BC: A \cdot B \cdot C = k^2 \Rightarrow B \cdot C : 11 \quad 202 C : 11$$

$$C : 11 \text{ и } C \text{ содержит } 3 \Rightarrow C = 33$$

$$k^2 = 101 \cdot 11 \cdot a \cdot 202 \cdot 33 = 101^2 \cdot 11^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a$$

$$a \in \mathbb{N} \quad 1 \leq a \leq 9 \Rightarrow a = 6$$

$$ABO: (6666; 202; 33)$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1
☐

2
☒

3
☐

4
☐

5
☐

6
☐

7
☐

СТРАНИЦА
1 ИЗ 31

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 2

$$x, y > 0 \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = k = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

Итак: $M = x^3 - y^3 - 3xy$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{xy} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y+1} + \frac{2}{(x-1)(y+1)}$$

$$\frac{x+y+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{x+y+2}{(x-1)(y+1)}$$

① $x+y+2=0 \quad -\varnothing \quad \text{т.к.} \quad x+y>0$

② $x+y+2 \neq 0$: $\begin{cases} (x-1)(y+1) = xy \\ x \neq 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} xy - y + x - 1 &= xy \\ M &= x^3 - y^3 - 3xy = (y+1)^3 - y^3 - 3y(y+1) = \\ &= y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - y^3 - 3y^2 - 3y = 1 \end{aligned}$$

Ответ: 1



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
13 ИЗ 33

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

№ 3

a) $(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

~~$2 \sin \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = 2 \cos \frac{\pi(x+y)}{2} \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x$~~

① $\sin \frac{\pi(x+y)}{2} = 0$

$\frac{\pi(x+y)}{2} = \pi k \quad k \in \mathbb{Z}$

$x+y = 2k$

$(x; 2k-x)$

② $\sin \frac{\pi(x+y)}{2} \neq 0$

$\cos \frac{\pi(x-y)}{2} \sin \pi x = \cos \pi x$

$\sin \frac{\pi(x+y)}{2} \sin \pi x = \cos \frac{\pi(x-y)}{2} \cos \pi x$

$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$

$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cos \pi x - \sin \pi y \sin \pi x$

$-\cos 2\pi x = \cos \pi(y+x) \quad \cos \pi(2x+1) = \cos \pi(y+x)$

$\pi(2x+1) = \pm \pi(y+x) + 2\pi n \quad n \in \mathbb{Z}$

$2x+1 = \pm(y+x) + 2n$

$\begin{cases} 2x+1 = y+x+2n \\ 2x+1 = -y-x+2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} x = y-1+2n \\ y = -1-3x+2k \end{cases}$

Реш: $(y_0-1+2n; y_0) \quad n \in \mathbb{Z}$

$(x_0; -1-3x_0+2k) \quad k \in \mathbb{Z}$

$x_0, y_0 \in \mathbb{R}$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 ☐ 2 ☐ 3 ☒ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
25 ИЗ 33

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$d) \quad x, y \in \mathbb{Z} \quad \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2} \quad \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$

$\frac{\pi}{2} \quad \pi$

$$\Rightarrow \arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \neq \frac{3\pi}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \arcsin \frac{x}{5} \neq \frac{\pi}{2} \\ \arccos \frac{y}{4} \neq \pi \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{5} \neq 1 \\ \frac{y}{4} \neq -1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq 5 \\ y \neq -4 \end{array} \right.$$

при этом x и y имеют ограничения от $\arcsin$ и $\arccos$

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq \frac{x}{5} \leq 1 \\ -1 \leq \frac{y}{4} \leq 1 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -5 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 4 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y \neq -4 \\ x \neq 5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 5 = 4 - 1 + 2n \\ 2n = 2 \\ n = 1 \end{array}$$

не годятся
оба
(5, 4) при $n=1$

$$① \quad x = y - 1 + 2n \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$-4 - 1 + 2n \leq x \leq 4 - 1 + 2n \quad -5 + 2n \leq x \leq 3 + 2n$$

$$1) \quad n = -5 \quad \Rightarrow \quad x \leq 3 + 2n \leq 3 - 10 = -7 \quad \text{— не реш}$$

$$2) \quad n = -4 \quad x \leq 3 - 8 = -5 \quad x = -5 \quad y = 4$$

$$3) \quad n = -3 \quad -11 \leq x \leq -3 \quad x = \{-5; -4; -3\}$$

$$y = \{2; 3; 4\}$$

$$4) \quad n = -2 \quad -9 \leq x \leq -1 \quad x = \{-5; -4; -3; -2; -1\}$$

Если мы нашли x_0 , то найдем и y_0 так x_0 удовлетворяет с учетом области определения y_0 , причем пары будут разными т.к. при одинаковых x_0 лишь 1

$$4) \quad n = -1 \quad -7 \leq x \leq 1 \quad x = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1\}$$

$$5) \quad n = 0 \quad -5 \leq x \leq 3 \quad x = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

$$6) \quad n = 1 \quad -3 \leq x \leq 5 \quad x = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$7) \quad n = 2 \quad -1 \leq x \leq 7 \quad x = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$8) \quad n = 3 \quad 1 \leq x \leq 9 \quad x = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$9) \quad n = 4 \quad 3 \leq x \leq 11 \quad x = \{3; 4; 5\}$$

$$10) \quad n = 5 \quad 5 \leq x \leq 13 \quad x = 5$$

$$11) \quad n \geq 6 \quad 7 \leq x \quad \text{— не реш}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
3 из **3**

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Полагаю $1+3+5+7+9+7+5+3+1 = 50$, но -1 реш $\underline{49}$

② $y = -1 - 3x + 2k$ $-1 - 15 + 2k \leq y \leq -1 + 15 + 2k$

$-16 + 2k \leq y \leq 14 + 2k$

1) $k = -10$ $y \leq 14 - 20 = -6$ $\rightarrow$ нет реш

2) $k = -9$ $y \leq 14 - 18 = -4$ $y = -4$

3) $k = -8$ $-32 \leq y \leq -2$ $y = -4; -3; -2$

Аналогично с ① реш кон-во реш $\rightarrow$ сначала увелич

$k \in \mathbb{N}$ 1, 3, 5, ...

4) $k = -7$ $-4; -3; -2; -1; 0$

5) $k = -6$ 7 реш

6) $k = -5$ $-26 \leq y \leq 4$ 9 реш

7) $k = -4$ $-24 \leq y \leq 6$ 9 реш

8) $k = -3$ $-22 \leq y \leq 8$ 9 реш

9) $k = -2$ $-20 \leq y \leq 10$ 9 реш

10) $k = -1$ $-18 \leq y \leq 12$ 9 реш

11) $k = 0$ $-16 \leq y \leq 14$ 9 реш

12) $k = 1$ $-14 \leq y \leq 16$ 9 реш

13) $k = 2$ $-12 \leq y \leq 18$ 9 реш

14) $k = 3$ $-10 \leq y \leq 20$ 9 реш

15) $k = 4$ $-8 \leq y \leq 22$ 9 реш

16) $k = 5$ $-6 \leq y \leq 24$ 9 реш

17) $k = 6$ $-4 \leq y \leq 26$ 9 реш

18) $k = 7$ $-2 \leq y \leq 28$ 9 реш

19) $k = 8$ $0 \leq y \leq 30$ 9 реш

20) $k = 9$ $2 \leq y \leq 32$ 9 реш

21) $k = 10$ $4 \leq y \leq 34$ 9 реш

22) $k = 11$ $6 \leq y \leq 36$ 9 реш

23) $k = 12$ $8 \leq y \leq 38$ 9 реш

24) $k = 13$ $10 \leq y \leq 40$ 9 реш

25) $k = 14$ $12 \leq y \leq 42$ 9 реш

26) $k = 15$ $14 \leq y \leq 44$ 9 реш

27) $k = 16$ $16 \leq y \leq 46$ 9 реш

28) $k = 17$ $18 \leq y \leq 48$ 9 реш

29) $k = 18$ $20 \leq y \leq 50$ 9 реш

30) $k = 19$ $22 \leq y \leq 52$ 9 реш

$1 + 3 + 5 + 7 + 12 \cdot 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 50 + 10 \cdot 9 = 50 + 90 = 140$

Но по условию (5; 4) не должно быть такого решения
 $140 - 1 = 139$

$139 + 49 = 188$

ответ: 188



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1 2 3 4 5 6 7
☐ ☐ ☐ ☒ ☐ ☐ ☐

СТРАНИЦА
 1 из 3

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Нач: Билетов 4 $\sqrt{4}$ у-ов n $P(A)$ А и В билет на конкурс
 Кон: $k > 4$ n P_{A_2} $P_{A_2} = 2,5 P_{A_1}$

① показано: Всего способов раздать билеты

$$C_n^4, \text{ способ для } A \Rightarrow C_{n-2}^2 \text{ и } 2$$

$$\text{дальше можно у } A \text{ и } B \Rightarrow P_{A_1} = \frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!}{(n-4)! \cdot 2!} \cdot \frac{(n-4)!}{n!}$$

$$= \frac{12}{(n-1)n}$$

② Аналогично всего C_n^k , из них C_{n-2}^{k-2}

$$P_{A_2} = \frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(n-k)! \cdot (k-2)!} \cdot \frac{(n-k)! \cdot k!}{n!} = \frac{(k-1)k}{(n-1)n}$$

$$\frac{(k-1)k}{(n-1)n} = 2,5 \cdot \frac{12}{(n-1)n} \quad k^2 - k - 30 = 0$$

$$k^2 - k - 15 = 0$$

$$k^2 - k - 30 = 0$$

$$(k-6)(k+5) = 0$$

$$\begin{cases} k=6 \rightarrow \text{нужно } k > 0 \\ k=-5 \rightarrow \text{нужно } k > 0 \end{cases}$$

$$k=6$$

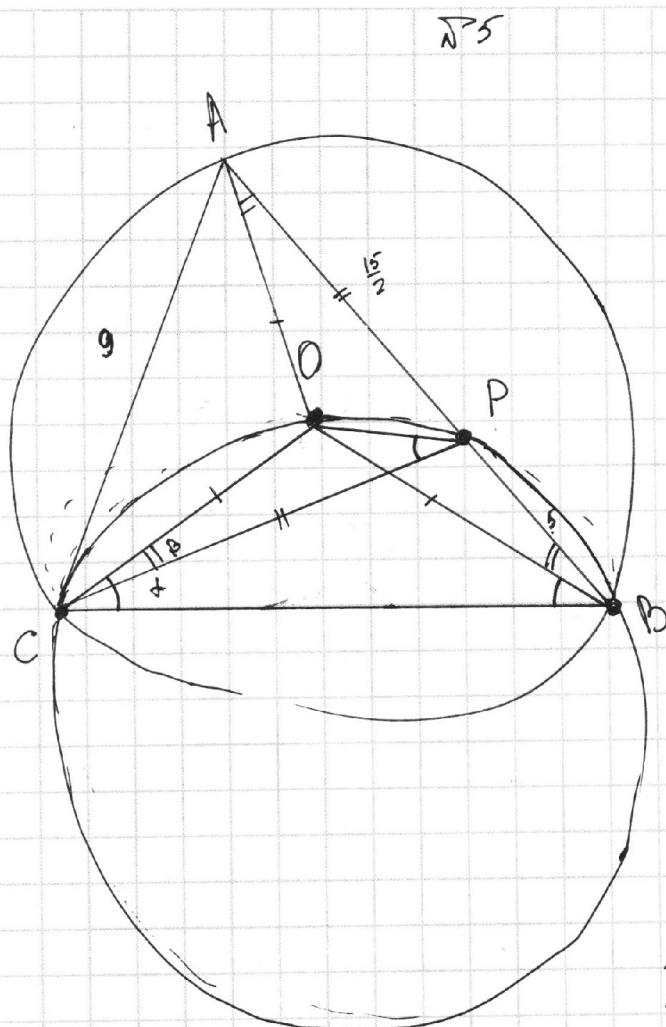
$$\text{Ответ: } 6$$



1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☒ 6 ☐ 7 ☐

СТРАНИЦА
1 из 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



1) $OA = OC = OB$ т.к. $\triangle ABC$ -
впис. $\Rightarrow \triangle OAC$ и $\triangle OAB$
- р/д по опред. $\Rightarrow$
по св. вы $\angle OAC = \angle OCB = \alpha$
 $\angle OAB = \angle OBO = \beta$

2) OPB - впис. $\Rightarrow$
 $\angle OCP = \angle OBA = \beta$
(как опер на одну дугу)
ан-во $\angle CBO = \angle CPO$

3) по св. вы впис. кел-ка
 $\angle COP = 180^\circ - \angle CBP =$
 $= 180^\circ - \alpha - \beta$

4) как опер на одну дугу

$\angle POB = \angle PCB = \angle BCO =$
 $= \angle PCO = \alpha - \beta$

у $\triangle AOB$: $\angle BOA =$
 $= 180^\circ - \angle OAB - \angle OBA =$
 $= 180^\circ - 2\beta$

$\angle AOB = \angle AOP + \angle POB =$
 $= \angle AOP + \alpha - \beta$

$180 - 2\beta = \angle AOP + \alpha - \beta$

$\angle AOP = 180^\circ - \alpha - \beta \Rightarrow \angle AOP = \angle COP$, тогда

по 2 сторонам и углу между ними $\triangle POA \cong \triangle POC$
 $\Rightarrow PC = PA \Rightarrow \triangle APC$ - р/д

д.п. PH - высота в $\triangle APC$, тогда

по св. вы р/д тр-ка $AH = HC = \frac{9}{2}$

тогда в $\triangle APH$: $\cos \angle PAC = \frac{AH}{AP} = \frac{9/2}{15} = \frac{3}{5}$

6) $\angle PAC < 90^\circ \Rightarrow \sin \angle PAC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle PAC} =$

$$= \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{4}{5} = 45$$

$$7) S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin \angle PAC =$$

Отв: 45

На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1
☐

2
☐

3
☐

4
☐

5
☐

6
☒

7
☐

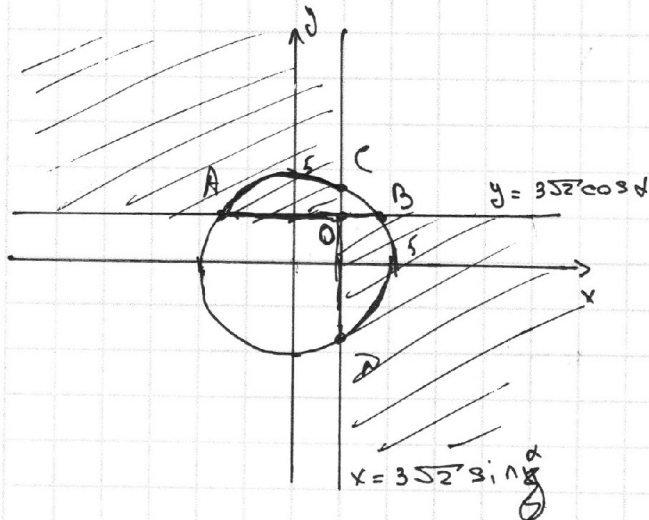
СТРАНИЦА
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



№6

$$\begin{cases} (x - 3\sqrt{2}\sin\alpha)(y - 3\sqrt{2}\cos\alpha) \leq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

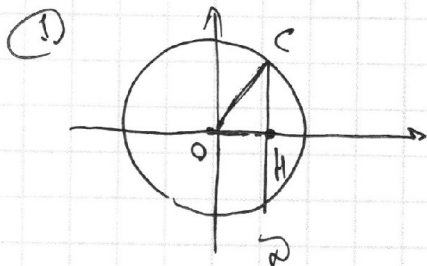


$$\begin{cases} x < 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y > 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x > 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y < 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x = 3\sqrt{2}\sin\alpha \\ y = 3\sqrt{2}\cos\alpha \\ x^2 + y^2 \leq 25 \end{cases}$$

$\Phi(\alpha)$ выглядит примерно так: это есть круг $x^2 + y^2 \leq 25$ отрезав двумя дугами четвертями плоскости, причем точка O лежит внутри круга γ .

$$-5 < -3\sqrt{2} \leq 3\sqrt{2}\sin\alpha \leq 3\sqrt{2} < 5$$

$$-5 < -3\sqrt{2} \leq 3\sqrt{2}\cos\alpha \leq 3\sqrt{2} < 5$$



$$OH = |3\sqrt{2}\sin\alpha| \text{ в осей.}$$

$$CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}$$

$$CN = 2CH = 2\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha}$$

$$AB = 2\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha}$$

$$\beta = \angle CAB = \frac{\nu B\alpha}{2} \quad \alpha = \angle A\alpha C = \frac{\nu AC}{2}$$

$$\text{в } \triangle A\alpha\alpha: 90^\circ = \alpha + \beta = \frac{\nu B\alpha + \nu AC}{2}$$

$$\nu B\alpha + \nu AC = 180^\circ \Rightarrow |\nu B\alpha| + |\nu AC| =$$

$$= \frac{2\pi R}{2} = 5\pi$$

$$\begin{aligned} P(\Phi(\alpha)) &= CN + AB + 5\pi = 2\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} + 2\sqrt{25 - 18\cos^2\alpha} + 5\pi \\ &= 2\sqrt{25 - 18\sin^2\alpha} + 2\sqrt{7 + 18\sin^2\alpha} + 5\pi \end{aligned}$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА
25 из 32

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

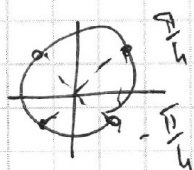
Решение $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \quad 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$

$$\begin{aligned} (P(\Phi_\alpha))' &= (2\sqrt{25-18t})' + (2\sqrt{7+18t})' = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{25-18t}} \cdot (-18) + 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{7+18t}} \cdot 18 = \\ &= 18 \left(\frac{1}{\sqrt{7+18t}} - \frac{1}{\sqrt{25-18t}} \right) = \frac{18(\sqrt{25-18t} - \sqrt{7+18t})}{\sqrt{7+18t}\sqrt{25-18t}} = \\ &= \frac{18((25-18t) - (7+18t))}{\sqrt{7+18t}\sqrt{25-18t}(\sqrt{25-18t} + \sqrt{7+18t})} = \frac{18(18-36t)}{\sqrt{7+18t}\sqrt{25-18t}(\sqrt{25-18t} + \sqrt{7+18t})} = \\ &= \frac{18^2(1-2t)}{\sqrt{7+18t}\sqrt{25-18t}(\sqrt{25-18t} + \sqrt{7+18t})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max P(\Phi_\alpha) &= 2\sqrt{25-18 \cdot \frac{1}{2}} + 2\sqrt{7+18 \cdot \frac{1}{2}} + 5\pi = \\ &= 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 5\pi = 16 + 5\pi \end{aligned}$$

это достигается

при $t = \frac{1}{2} \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} \quad \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$



$$\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $16 + 5\pi$ при $\alpha = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$
 $n \in \mathbb{Z}$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА

___ ИЗ ___

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

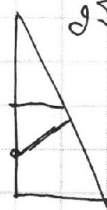
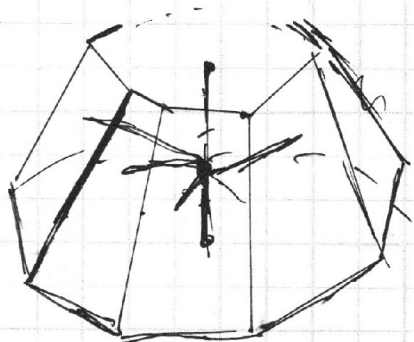
$$(x^x)' = x \cdot x^{x-1}$$

$$V = \frac{1}{3} R (S_{\text{доп}} + S_{\text{м}} + S_{\text{д}})$$

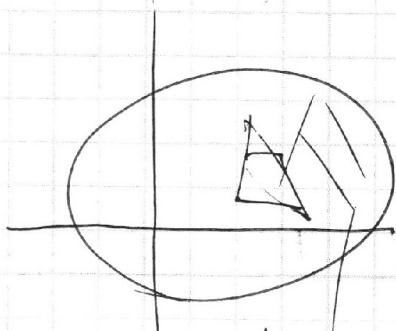
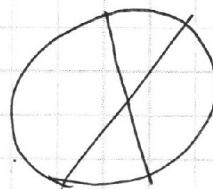
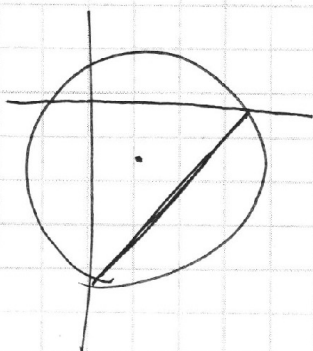
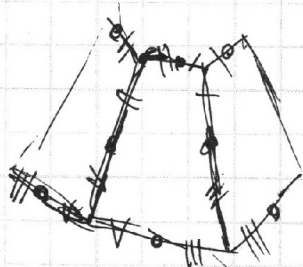
$$V = \frac{1}{3} R (S_{\text{д}} + S_{\text{л}} + S_{\text{н}})$$

$$\frac{1}{d} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{d\sqrt{x}}$$

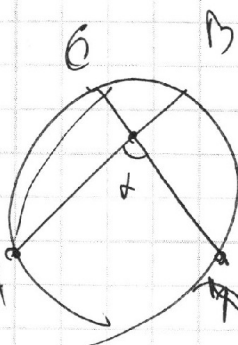
$$d = \sqrt{AD^2 - DB^2}$$



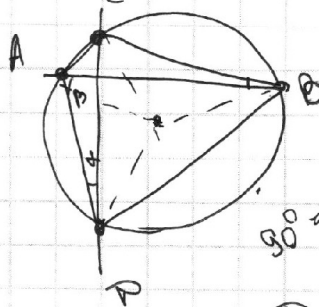
$$\sqrt{a-b} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{10 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 50$$



$$\frac{50}{25} = 2$$

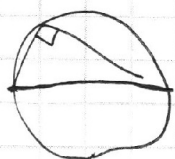


$$\frac{VAE + VBW}{2}$$

$$90^\circ = \alpha + \beta =$$

$$VAE + VBW = 180^\circ$$

$$\frac{1}{d\sqrt{x}}$$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$(y_0 - 1 + 2n, y_0) \quad (x_0, -1 - 3y_0 + 2k) \quad A \quad -1 -$$

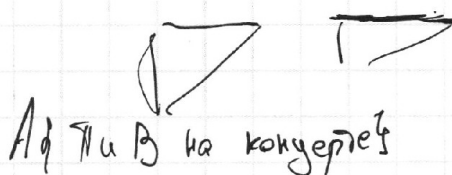
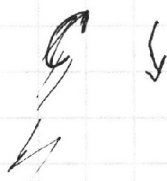
$$y = 25 \quad y = 1 + x - 2n = 1 - 5 + 8 = 4$$

$$1 - 5 + 6 = 2 \quad -4 \quad -24 \leq y \leq 6$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -16 \\ 3 \cdot 2 \cdot 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +140 \\ 50 \\ -180 \\ 2 \\ \hline 188 \end{array}$$



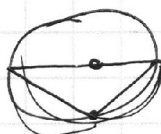
А и В на конусе

$$h \quad 45$$

$$k \quad k > 45$$

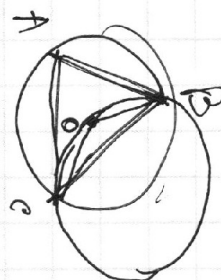
n - классиков

n



PA1

PA2



$$PA_2 = 2,5 PA_1$$

PA1:

Всего раскрас

C_n^4

удачных

C_n^2

1234

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 2 \cdot 3 = 6$$

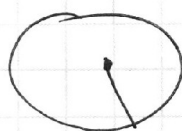
$\frac{1}{6}$

$$\frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot \frac{(n-4)! \cdot 3!}{n!} = \frac{3}{(n-3)(n-2)}$$

$$= \frac{(n-1)n}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{(n-3)(n-2)(n-1)n} = \frac{3}{(n-3)(n-2)}$$

$$\frac{C_{n-2}^2}{C_n^4} = \frac{(n-2)!}{(n-4)!2!} \cdot \frac{(n-4)! \cdot 3!}{n!} = \frac{3}{(n-1)n}$$

$$C \quad 25.3$$



$$\infty = 1 +$$

$$\begin{array}{r} \times 7,5 \\ 20 \\ \hline 150 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2,5 \\ \times 1,5 \\ \hline 3,75 \end{array}$$

$$7,5 = \frac{75}{10} = \frac{15}{2}$$

$$v = \sqrt{20} \quad \text{no error on}$$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи отдельно**.



1	2	3	4	5	6	7
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

СТРАНИЦА
__ ИЗ __

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$\angle AOB = \angle POA + \angle AOP = \alpha - \beta + \angle AOP$
 $\angle AOP = 180^\circ - \alpha - \beta$

$\angle AOB = 180^\circ - \alpha - \beta$
 $\angle AOP = 180^\circ - \alpha - \beta$

$\angle POB = \angle BOP = \alpha - \beta$
 $\angle COP = 180^\circ - \angle BOP = 180^\circ - \alpha + \beta$

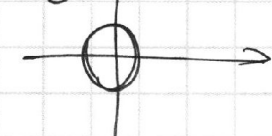
$$\frac{11}{101} \parallel \frac{11}{101}$$

$$\frac{x^{101}}{101}$$

$$\frac{y+x+2}{xy} = \frac{y+1+x-1+2}{(x-1)(y+1)} = \frac{-x+y+2}{xy+x-y-1}$$

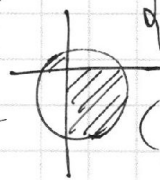
$$xy+x-y-1=xy$$

$$x=y+1$$



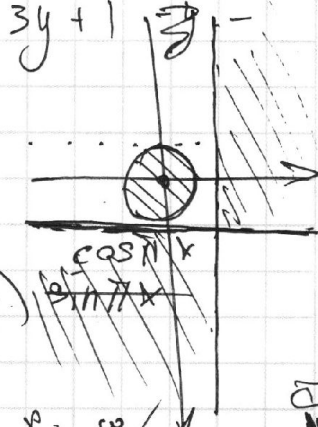
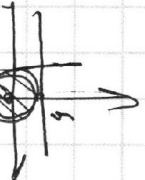
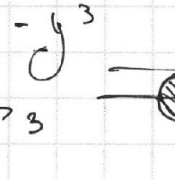
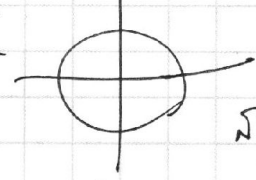
$$3\sqrt{2} < 5$$

$$(x-y)(x^2+y^2)$$



$$(y+1)^3 = y^3 + 3y^2 + 3y + 1$$

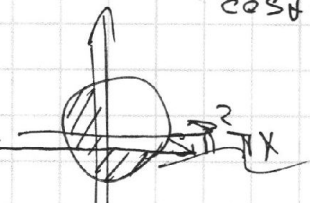
$$\frac{y^2(y+1)}{9.25.4}$$



$$(\sin \pi x + \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

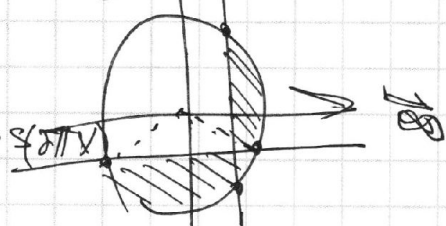


$$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cos \pi x - \sin \pi x \sin \pi y$$



$$-\cos 2\pi x = \cos \pi(y+x)$$

$$\cos(\pi x + \pi) = \cos \pi(y+x)$$



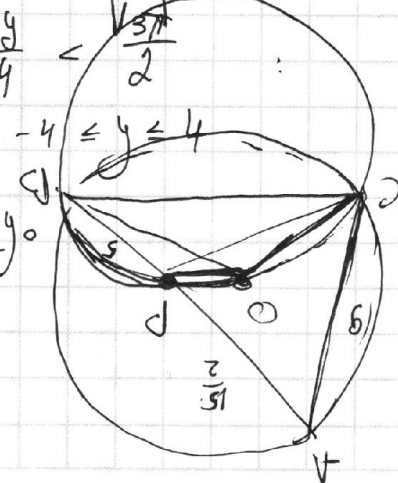
$$3\sqrt{2} \cos \alpha$$

$$x^2 + y^2$$

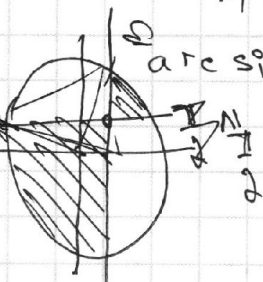
$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} < \frac{3\pi}{2}$$

$$-1 \leq \frac{x}{5} \leq 1$$

$$-5 \leq x \leq 5$$



$$\arcsin \frac{x}{5} + \arccos \frac{y}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$$



correct answer - 6

