

$$(x-3)(y+3)(x+1)(y+1) = xy(x-2)(y+4)$$



МОСКОВСКИЙ  
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"  
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2



1. [3 балла] Найдите все тройки натуральных чисел  $(A; B; C)$  такие, что:

- $A$  — четырёхзначное число, составленное из одинаковых цифр,
- $B$  — трёхзначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 1,
- $C$  — двузначное число, хотя бы одна из цифр которого равна 5,
- произведение  $A \cdot B \cdot C$  является квадратом некоторого натурального числа.

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right) \left(\frac{1}{y} + 1\right) = \left(\frac{1}{x-3} + 1\right) \left(\frac{1}{y+3} + 1\right)$$

2. [3 балла] Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что значение выражения  $K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$  не изменяется, если  $x$  уменьшить на 3, а  $y$  — увеличить на 3. Найдите все возможные значения выражения  $M = x^3 - y^3 - 9xy$ .

3. [5 баллов] а) Найдите все пары действительных чисел  $(x; y)$  такие, что  $(\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x$ .

б) Сколько пар целых чисел  $(x, y)$  удовлетворяют одновременно этому уравнению и неравенству

$$\arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi?$$

4. [4 балла] В начале месяца было выделено 4 билета на праздничный концерт, которые планировалось случайным образом распределить между одиннадцатиклассниками. В конце месяца выяснилось, что будет выделено больше 4 билетов. Одиннадцатиклассники Петя и Вася выяснили, что вероятность им обоим вместе попасть на концерт в начале месяца была в 3,5 раза меньше, чем оказалась в конце месяца. Сколько всего было выделено билетов на концерт в конце месяца, если количество одиннадцатиклассников не изменилось?

5. [5 баллов] Точка  $O$  — центр окружности  $\omega_1$ , описанной около остроугольного треугольника  $ABC$ . Окружность  $\omega_2$ , описанная около треугольника  $BOC$ , пересекает отрезок  $AB$  в точке  $P$ . Найдите площадь треугольника  $ABC$ , если  $AP = \frac{16}{5}$ ,  $BP = 2$ ,  $AC = 4$ .

6. [6 баллов] На координатной плоскости изображена фигура  $\Phi(\alpha)$ , состоящая из всех точек, координаты  $(x; y)$  которых удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 2 \cos \alpha)(y - 2 \sin \alpha) \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 9. \end{cases}$$

Найдите максимальное значение  $M$  периметра (длины границы) фигуры  $\Phi(\alpha)$  и укажите все значения  $\alpha$ , при которых оно достигается.

7. [6 баллов] Шар  $\Omega$  касается всех рёбер правильной усечённой пирамиды, а шар  $\omega$  касается всех её граней. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости её основания.

На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

↓ ИЗ ↓

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$K = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} \quad \text{и} \quad K = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} + \frac{1}{(x-3)(y+3)} \Leftrightarrow \frac{x+y+1}{xy} = \frac{x+y+1}{(x-3)(y+3)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ xy=(x-3)(y+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ 3x-3y-9=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+1=0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$$

I случай:  $x+y+1=0 \Rightarrow M = x^3 - y^3 - 9xy = (x+y+1)$

т.к.  $x > 0, y > 0$ , то  $x+y+1 > 1 > 0 \Rightarrow x-y-3=0 \Rightarrow x=y+3$

~~$M = (x-y-3)$   $\Rightarrow x=y+3 \Rightarrow y+3$~~

~~$M = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y =$~~

$$M = x^3 - y^3 - 9xy = (y+3)^3 - y^3 - 9(y+3)y = y^3 + 9y^2 + 27y + 27 - y^3 - 9y - 27y = 27$$

Ответ: 27.



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении **каждой задачи отдельно**.

1    2    3    4    5    6    7  
                 

СТРАНИЦА  
2 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

чётных из  $[-9; 9] - 1$  (пара  $(4; -9)$ ) т.е.

$$5 \cdot 10 + 4 \cdot 9 - 1 = 85 \text{ решений} \quad \text{Ответ: } 85.$$



На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

Вероятность того, что если было выдано  $k$  билетов на  $n$  классных, то Петя и Вова получат билеты — это кол-во способов выбрать  $k-2$  билета из  $n-2$  старшеклассников (т.е. способов раздать все билеты, кроме тех, которые будут выданы Петю и Вове), поделённое на кол-во способов раздать  $k$  билетов среди  $n$  старшеклассников т.е.

$$\frac{C_{n-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} =$$

$$= \frac{(n-2)!}{n!} \cdot \frac{k!}{(k-2)!} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

⇒ если изначально было 4 билета, а стало  $m$  и количество старшеклассников не  $n$  а было, так и осталось  $s$

$$\Rightarrow \frac{4 \cdot 3}{s(s-1)} = \frac{m(m-1)}{s(s-1)} \Leftrightarrow 42 = m(m-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 7 \\ m = -6 \end{cases}$$

— не подходит по ул. задачи ⇒ было ~~раздано~~ выдано 7 билетов

Ответ: 7 билетов.

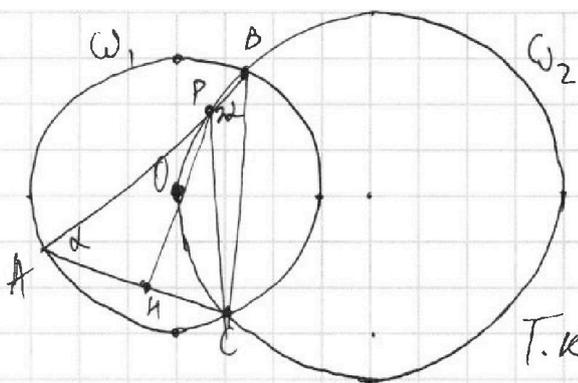


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!



По св-ву внутр. и центрального углов  
 $\omega_1: \angle BOC = \sphericalangle BOC = 2 \angle BAC$   
 Пусть  $\angle BAC = \alpha \Rightarrow \angle BOC = 2\alpha$

Т.к.  $\angle BOC$  и  $\angle BPC$  опираются на

одну дугу в окружности  $\omega_2$ , то  $\angle BPC = \angle BOC = 2\alpha$  (по св-ву внутр. углов, опирающихся на одну дугу)  $\Rightarrow \angle APC = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - 2\alpha$  (как внутр. к  $\angle CPB$ )  $\Rightarrow$  по сумме углов в  $\Delta$

$\angle PCA = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - \angle CAP - \angle APC = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) - \alpha = \alpha$   $\Rightarrow$  по признаку т.к.  $\angle PAC = \angle PCA = \alpha$ , то  $\Delta APC$  - р/бед.

$\Rightarrow AP = PC = \frac{16}{5} = 3,2$ . Пусть  $PH$  - высота в  $\Delta APC \Rightarrow$  по св-ву р/бед  $\Delta PH$  - медиана  $\Rightarrow AH = \frac{AC}{2} = 2$ . По т.

Пифагора в  $\Delta AHP$  (т.к. по построению  $\angle AHP = 90^\circ$ )  $\Rightarrow AP^2 = AH^2 + PH^2$   
 $(PH > 0) \Rightarrow PH = \sqrt{AP^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2 - 2^2} = \frac{1}{5} \sqrt{16^2 - 10^2} = \frac{2}{5} \sqrt{8^2 - 5^2} = \frac{2\sqrt{39}}{5}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{PH}{AP} = \frac{\frac{2\sqrt{39}}{5}}{\frac{16}{5}} = \frac{2\sqrt{39}}{8}$   $\Rightarrow S_{APC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC =$   
 $= \frac{1}{2} (AP + PB) \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} (3,2 + 2) \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{39}}{4} = 1,3\sqrt{39}$

Ответ:  $1,3\sqrt{39}$ .



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в **решении каждой задачи** отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА

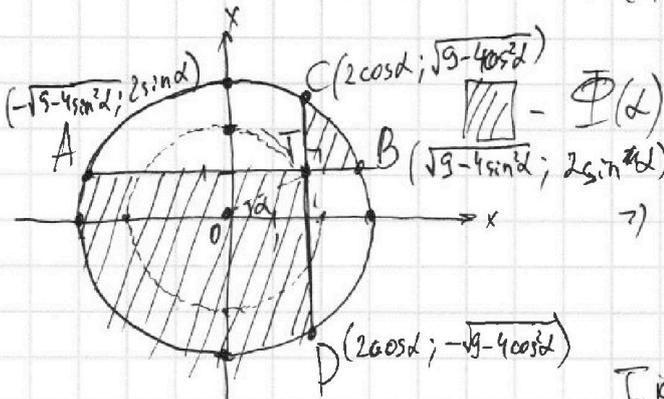
1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

$\Rightarrow \Phi(\alpha)$  будет

выглядеть как часть  $\omega$ , где  $\begin{cases} x \geq 2\cos\alpha \\ y \geq 2\sin\alpha \\ x \leq 2\cos\alpha \\ y \leq 2\sin\alpha \end{cases}$  т.е. черная часть  $\omega$  или часть  $\omega$  от  $(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$



$T(2\cos\alpha; 2\sin\alpha)$

$$\Rightarrow CD = 2\sqrt{9-4\cos^2\alpha}$$

$$AB = 2\sqrt{9-4\sin^2\alpha}$$

т.к.  $AB \perp CD$ , то  $\angle CTB = 90^\circ$

$$\Rightarrow \underbrace{\cup CB + \cup AD}_{2} + \underbrace{\cup BC + \cup AD}_{2} = \angle CTB \Rightarrow \cup BC + \cup AD = 180^\circ$$

$\Rightarrow$  пусть  $l_{BC}$ ,  $l_{AD}$  - длина дуги BC;  $l_{AD}$  - длина дуги AD  $\Rightarrow \frac{l_{BC}}{R} + \frac{l_{AD}}{R} = \cup BC + \cup AD = \pi$  (по определению радиана  $R = \text{радиус окружности}$  т.е.  $R=3$ )

$\Rightarrow l_{BC} + l_{AD} = 3\pi \Rightarrow$  пусть периметр  $\Phi(\alpha) = M$ , тогда

$$M = l_{BC} + l_{AD} + AB + CD = 2(\sqrt{9-4\cos^2\alpha} + \sqrt{9-4\sin^2\alpha}) + 3\pi \rightarrow \max$$

Пусть  $a = \sqrt{9-4\cos^2\alpha}$ ;  $b = \sqrt{9-4\sin^2\alpha} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 5 \\ a + b \rightarrow \max \end{cases} \Rightarrow$  Пусть  $b = ka$

~~$$\begin{cases} \sqrt{k^2+1}|a| = \sqrt{5} \\ (k+1)a \rightarrow \max \end{cases} \Rightarrow \text{пусть } C = a+b \rightarrow \max \text{ при } a^2 + b^2 = 5$$~~

$\Rightarrow$  при  $a+b = C$   $a^2 + b^2 \rightarrow \min$  (т.к.  $a^2 + b^2$  ~~ограничено~~ и  $a+b$  - ~~ограничено~~)

$$\Rightarrow (C^2 - a^2) + a^2 \rightarrow \min \text{ при } a = \frac{C}{2} \Rightarrow b = \frac{C}{2} = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a^2 = 2b^2 \text{ тогда } a = b = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad 9 - 4\sin^2\alpha = 9 - 4\cos^2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \sin\alpha \\ \cos\alpha = -\sin\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \text{ тогда } M_{\max} = 3\pi + \sqrt{10}$$

Ответ:  $3\pi + \sqrt{10}$ ;  $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$



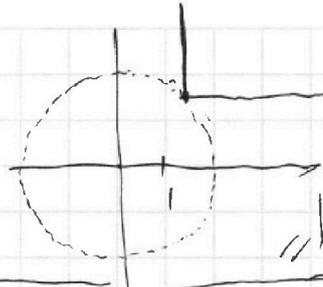
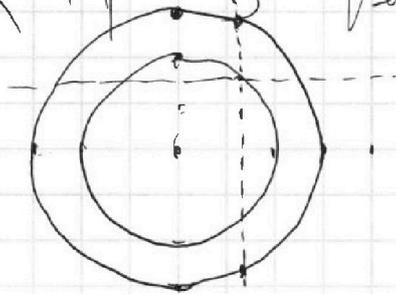
На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте **крестиком** номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи **отдельно**.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
ИЗ

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются **отдельно**. Порча QR-кода недопустима!

6. 
$$\begin{cases} (x-2\cos\alpha)(y-2\sin\alpha) \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 9 \end{cases}$$

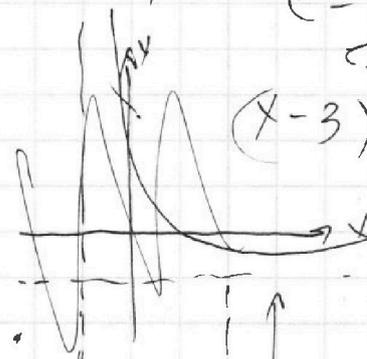


$$2 \left( \sqrt{9 - 4\cos^2\alpha} + \sqrt{9 - 4\sin^2\alpha} \right) + \frac{1}{2} \text{ВММ} 3\pi \rightarrow \max$$

~~АА~~ 
$$\frac{x+y+1}{xy} = \frac{x^2+y^2+1}{(x+3)(y+3)} = \frac{a^2+b^2+1}{(a+3)(b+3)}$$

$a+b \rightarrow \max$   
 $a=b \Rightarrow$   
 $\cos\alpha = \sin\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$

АА



$(x-3)(y+3) = xy \Leftrightarrow$   
 $xy + 3x - 3y + 9 = xy$

$3x - 3y + 9 = 0$

$x - y + 3 = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = \text{const.}$

n

один

к

чисел

$$\frac{(x+3)(x^2+y^2+1)}{(x+3)(y+3)} = \frac{y}{(x^2+3xy+y^2)x}$$

$$\frac{C_{n-k-2}^{k-2}}{C_n^k} = \frac{(n-k-2)!}{(k-2)! (n-k)!} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2 x}$$

$$= \frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = 3,5 \cdot \frac{4 \cdot 3}{n(n-1)}$$

$k(k-1) = 14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k = 7$

$k = -6$  не подходит

$(x-1)(y-1) \leq x^2 + y^2$





На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.



СТРАНИЦА

1 ИЗ 1

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$A = \overline{aaaa} \Rightarrow A = a \cdot 1111 = a \cdot 11 \cdot 101$  (11, 101 - простые)  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  т.к.  $A \cdot B \cdot C$  - квадрат, то хотя бы один из чисел  $B$  или  $C$  : 11 и ~~на~~ хотя бы один делится на 101,  $0 < C < 101 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow B : 101 \Rightarrow B = \overline{b0b} = b \cdot 101 \Rightarrow$  т.к.  $0 < b < 10$  хотя бы 1 единица  
 $\Rightarrow B = 101$ ;  $C : 11 \Rightarrow C = 11 \cdot c = \overline{cc}$  и т.к.  $C$  имеет  
 $\ast$  в разряде  $\Rightarrow c = 5 \Rightarrow C = 55 \Rightarrow A \cdot B \cdot C = a \cdot 101^2 \cdot 11^2 \cdot 5$  - ~~квадрат~~  
рат  $\Rightarrow a : 5$  и т.к.  $a$  - цифра, то  $a = 5$   
Ответ:  $(5555; 101; 55)$



На одной странице можно оформлять **только одну** задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
1 ИЗ 2

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

$$a) (\sin \pi x - \sin \pi y) \sin \pi x = (\cos \pi x + \cos \pi y) \cos \pi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 \pi x - \cos^2 \pi x = \cos \pi y \cos \pi x + \sin \pi y \sin \pi x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\cos 2\pi x = \cos \pi(x-y) \Leftrightarrow \cos \pi(x-y) + \cos 2\pi x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos \frac{\pi(x-y+2x)}{2} \cos \frac{\pi(x-y-2x)}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi(3x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi(x-y)}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y = 2n+1, n \in \mathbb{Z} \\ x+y = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x-2n-1, n \in \mathbb{Z} \\ y = 2k+1-x, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:  $3x-2n-1$   $(x, 3x-2n-1)$ ;  $(x, 2k+1-x)$ , где  $x \in \mathbb{R}$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$

$$b) \begin{cases} 0 \leq \arccos \frac{x}{4} \leq \pi \\ 0 \leq \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \leq 2\pi \\ \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} < 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arccos \frac{x}{4} + \arccos \frac{y}{9} \neq 2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} \arccos \frac{x}{4} \neq \pi \\ \arccos \frac{y}{9} \neq \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{4} \neq -1 \\ \frac{y}{9} \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

~~Уравнение не будет~~ второе неравенство не будет выполняться только если  $\begin{cases} \arccos \frac{x}{4} = \pi \\ \arccos \frac{y}{9} = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -9 \end{cases} \Rightarrow$  т.к. не удовлетворяющая условию пара ~~решения~~, а решение ~~было~~.

первое неравенство  $\Rightarrow$  решение будет бесконечное множество

$$D(x) \cap D(\arccos(\frac{x}{4})) = [-4; 4] \quad D(\arccos(\frac{y}{9})) = [-9; 9] \Rightarrow \text{все пары, которые}$$

попадают под оба условия  $(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7), (1, 9)$  и  $0$ ; Заметим, что все эти пары решения ~~не~~ уравнения из а) — это пары целых чисел прямой четверти, кроме все такие пары попадают  $\rightarrow$  на прямых решения уравнения из а) — ~~5~~ кол-во точек из  $[-4; 4] \times$  кол-во из  $[-9; 9] +$  кол-во из  $[-4; 4] \cdot$  кол-во

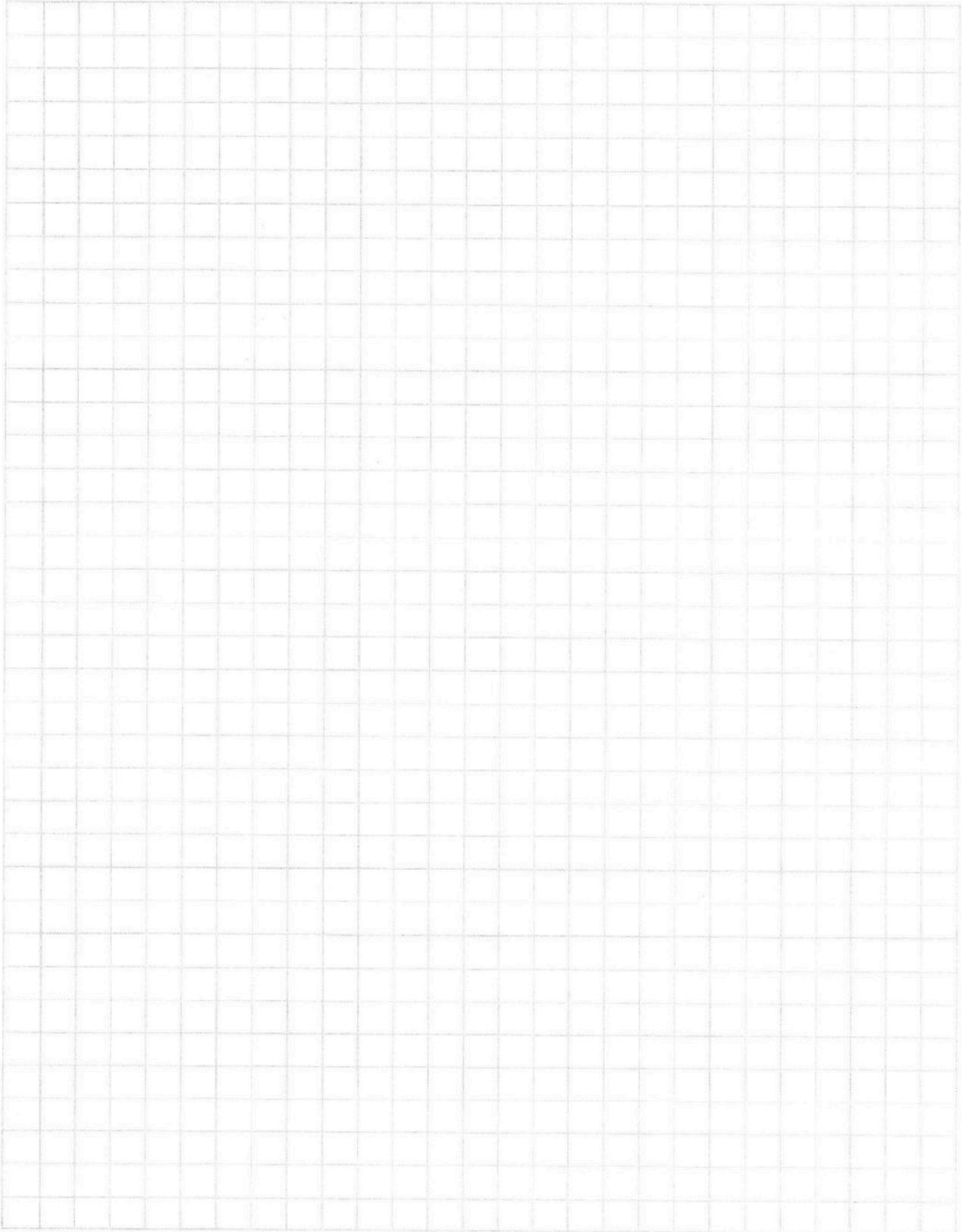


На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

|                          |                          |                          |                          |                          |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1                        | 2                        | 3                        | 4                        | 5                        | 6                        | 7                        |
| <input type="checkbox"/> |

СТРАНИЦА  
\_\_ ИЗ \_\_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!







На одной странице можно оформлять только одну задачу. Отметьте крестиком номер задачи, решение которой представлено на странице. Также укажите номер страницы и суммарное количество страниц в решении каждой задачи отдельно.

1  2  3  4  5  6  7

СТРАНИЦА  
\_ ИЗ \_

Если отмечено более одной задачи или не отмечено ни одной задачи, страница считается черновиком и не проверяется. Страницы по каждой из задач нумеруются отдельно. Порча QR-кода недопустима!

11-101a

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$

$\frac{1}{x} = t, \frac{1}{y} = u$

$t + u + ut = 1$

$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{\frac{1}{t}-3} = -\frac{t}{3t-1}$

$\frac{1}{y+3} = \frac{1}{\frac{1}{u}+3} = \frac{u}{3u+1}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} + 1 =$

$(\frac{1}{x} + 1)(\frac{1}{y} + 1) = \frac{(x+1)(y+1)}{xy}$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^3 - y^3 = 9xy$

$x^3 - y^3 - 9xy = 0$

$(x+1)(y+1) = \frac{x^2 + xy + y^2}{xy}$

$\frac{1}{x-3} + \frac{1}{y+3} = 1$

$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{\frac{1}{t}-3} = -\frac{t}{3t-1}$

$\frac{1}{y+3} = \frac{1}{\frac{1}{u}+3} = \frac{u}{3u+1}$

$-\frac{t}{3t-1} + \frac{u}{3u+1} = 1$

$\frac{-t(3u+1) + u(3t-1)}{(3t-1)(3u+1)} = 1$

$\frac{-3tu - t + 3tu - u}{(3t-1)(3u+1)} = 1$

$\frac{-t-u}{(3t-1)(3u+1)} = 1$

$-t-u = (3t-1)(3u+1)$

$-t-u = 9tu + 3t + 3u - 1$

$9tu + 3t + 3u - 1 = -t-u$

$9tu + 4t + 4u - 1 = 0$

$9tu + 4t + 4u = 1$

$t(9u+4) + 4u = 1$

$t = \frac{1-4u}{9u+4}$

$\frac{1}{y} = \frac{1-4u}{9u+4}$

$y = \frac{9u+4}{1-4u}$

$\frac{1}{x} = \frac{1-4u}{9u+4}$

$x = \frac{9u+4}{1-4u}$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$

$\frac{1-4u}{9u+4} + \frac{1-4u}{9u+4} + \frac{(1-4u)^2}{(9u+4)^2} = 1$

$\frac{2(1-4u)}{9u+4} + \frac{(1-4u)^2}{(9u+4)^2} = 1$

$\frac{2(1-4u)(9u+4) + (1-4u)^2}{(9u+4)^2} = 1$

$\frac{2(9u+4) + (1-4u)}{9u+4} = 1$

$\frac{18u+8+1-4u}{9u+4} = 1$

$\frac{14u+9}{9u+4} = 1$

$14u+9 = 9u+4$

$5u = -5$

$u = -1$

$\frac{1}{y} = \frac{1-4(-1)}{9(-1)+4} = \frac{5}{-5} = -1$

$y = -1$

$\frac{1}{x} = \frac{1-4(-1)}{9(-1)+4} = \frac{5}{-5} = -1$

$x = -1$

$x = -1, y = -1$

$x^3 - y^3 = 9xy$

$(-1)^3 - (-1)^3 = 9(-1)(-1)$

$-1 + 1 = 9$

$0 = 9$

$\sin^2 \pi x - \cos^2 \pi y = \frac{1}{2} \cos \pi(x-y)$

$\sin \pi x = \sin(\pi x + \frac{\pi}{2}) = \sin(\pi y + \frac{\pi}{2}) = \sin(\pi(x+y))$

$\sin \pi x = \sin(\pi(x+y))$

$\sin \pi x = \sin(\pi x + \pi y)$

$\sin \pi x = \sin \pi x \cos \pi y + \cos \pi x \sin \pi y$

$0 = \cos \pi x \sin \pi y$

$\cos \pi x = 0$  or  $\sin \pi y = 0$

$x = \frac{1}{2} + k$  or  $y = n$

$x = \frac{1}{2}, y = 0$

$x = \frac{3}{2}, y = 0$

$x = \frac{5}{2}, y = 0$

$x = \frac{7}{2}, y = 0$

$x = \frac{9}{2}, y = 0$

$x = \frac{11}{2}, y = 0$

$x = \frac{13}{2}, y = 0$

$x = \frac{15}{2}, y = 0$

$x = \frac{17}{2}, y = 0$

$x = \frac{19}{2}, y = 0$

$x = \frac{21}{2}, y = 0$

$x = \frac{23}{2}, y = 0$

$x = \frac{25}{2}, y = 0$

$x = \frac{27}{2}, y = 0$

$x = \frac{29}{2}, y = 0$

$x = \frac{31}{2}, y = 0$

$x = \frac{33}{2}, y = 0$

$x = \frac{35}{2}, y = 0$

$x = \frac{37}{2}, y = 0$

$x = \frac{39}{2}, y = 0$

$x = \frac{41}{2}, y = 0$

$x = \frac{43}{2}, y = 0$

$x = \frac{45}{2}, y = 0$

$x = \frac{47}{2}, y = 0$

$x = \frac{49}{2}, y = 0$

$x = \frac{51}{2}, y = 0$

$x = \frac{53}{2}, y = 0$

$x = \frac{55}{2}, y = 0$

$x = \frac{57}{2}, y = 0$

$x = \frac{59}{2}, y = 0$

$x = \frac{61}{2}, y = 0$

$x = \frac{63}{2}, y = 0$

$x = \frac{65}{2}, y = 0$

$x = \frac{67}{2}, y = 0$

$x = \frac{69}{2}, y = 0$

$x = \frac{71}{2}, y = 0$

$x = \frac{73}{2}, y = 0$

$x = \frac{75}{2}, y = 0$

$x = \frac{77}{2}, y = 0$

$x = \frac{79}{2}, y = 0$

$x = \frac{81}{2}, y = 0$

$x = \frac{83}{2}, y = 0$

$x = \frac{85}{2}, y = 0$

$x = \frac{87}{2}, y = 0$

$x = \frac{89}{2}, y = 0$

$x = \frac{91}{2}, y = 0$

$x = \frac{93}{2}, y = 0$

$x = \frac{95}{2}, y = 0$

$x = \frac{97}{2}, y = 0$

$x = \frac{99}{2}, y = 0$

$x = \frac{101}{2}, y = 0$

$x = \frac{103}{2}, y = 0$

$x = \frac{105}{2}, y = 0$

$x = \frac{107}{2}, y = 0$

$x = \frac{109}{2}, y = 0$

$x = \frac{111}{2}, y = 0$

$x = \frac{113}{2}, y = 0$

$x = \frac{115}{2}, y = 0$

$x = \frac{117}{2}, y = 0$

$x = \frac{119}{2}, y = 0$

$x = \frac{121}{2}, y = 0$

$x = \frac{123}{2}, y = 0$

$x = \frac{125}{2}, y = 0$

$x = \frac{127}{2}, y = 0$

$x = \frac{129}{2}, y = 0$

$x = \frac{131}{2}, y = 0$

$x = \frac{133}{2}, y = 0$

$x = \frac{135}{2}, y = 0$

$x = \frac{137}{2}, y = 0$

$x = \frac{139}{2}, y = 0$

$x = \frac{141}{2}, y = 0$

$x = \frac{143}{2}, y = 0$

$x = \frac{145}{2}, y = 0$

$x = \frac{147}{2}, y = 0$

$x = \frac{149}{2}, y = 0$

$x = \frac{151}{2}, y = 0$

$x = \frac{153}{2}, y = 0$

$x = \frac{155}{2}, y = 0$

$x = \frac{157}{2}, y = 0$

$x = \frac{159}{2}, y = 0$

$x = \frac{161}{2}, y = 0$

$x = \frac{163}{2}, y = 0$

$x = \frac{165}{2}, y = 0$

$x = \frac{167}{2}, y = 0$

$x = \frac{169}{2}, y = 0$

$x = \frac{171}{2}, y = 0$

$x = \frac{173}{2}, y = 0$

$x = \frac{175}{2}, y = 0$

$x = \frac{177}{2}, y = 0$

$x = \frac{179}{2}, y = 0$

$x = \frac{181}{2}, y = 0$

$x = \frac{183}{2}, y = 0$

$x = \frac{185}{2}, y = 0$

$x = \frac{187}{2}, y = 0$

$x = \frac{189}{2}, y = 0$

$x = \frac{191}{2}, y = 0$

$x = \frac{193}{2}, y = 0$

$x = \frac{195}{2}, y = 0$

$x = \frac{197}{2}, y = 0$

$x = \frac{199}{2}, y = 0$

$x = \frac{201}{2}, y = 0$

$x = \frac{203}{2}, y = 0$

$x = \frac{205}{2}, y = 0$

$x = \frac{207}{2}, y = 0$

$x = \frac{209}{2}, y = 0$

$x = \frac{211}{2}, y = 0$

$x = \frac{213}{2}, y = 0$

$x = \frac{215}{2}, y = 0$

$x = \frac{217}{2}, y = 0$

$x = \frac{219}{2}, y = 0$

$x = \frac{221}{2}, y = 0$

$x = \frac{223}{2}, y = 0$

$x = \frac{225}{2}, y = 0$

$x = \frac{227}{2}, y = 0$

$x = \frac{229}{2}, y = 0$

$x = \frac{231}{2}, y = 0$

$x = \frac{233}{2}, y = 0$

$x = \frac{235}{2}, y = 0$

$x = \frac{237}{2}, y = 0$

$x = \frac{239}{2}, y = 0$

$x = \frac{241}{2}, y = 0$

$x = \frac{243}{2}, y = 0$

$x = \frac{245}{2}, y = 0$

$x = \frac{247}{2}, y = 0$

$x = \frac{249}{2}, y = 0$

$x = \frac{251}{2}, y = 0$

$x = \frac{253}{2}, y = 0$

$x = \frac{255}{2}, y = 0$

$x = \frac{257}{2}, y = 0$

$x = \frac{259}{2}, y = 0$

$x = \frac{261}{2}, y = 0$

$x = \frac{263}{2}, y = 0$

$x = \frac{265}{2}, y = 0$

$x = \frac{267}{2}, y = 0$

$x = \frac{269}{2}, y = 0$

$x = \frac{271}{2}, y = 0$

$x = \frac{273}{2}, y = 0$

$x = \frac{275}{2}, y = 0$

$x = \frac{277}{2}, y = 0$

$x = \frac{279}{2}, y = 0$

$x = \frac{281}{2}, y = 0$

$x = \frac{283}{2}, y = 0$

$x = \frac{285}{2}, y = 0$

$x = \frac{287}{2}, y = 0$

$x = \frac{289}{2}, y = 0$

$x = \frac{291}{2}, y = 0$

$x = \frac{293}{2}, y = 0$

$x = \frac{295}{2}, y = 0$

$x = \frac{297}{2}, y = 0$

$x = \frac{299}{2}, y = 0$

$x = \frac{301}{2}, y = 0$

$x = \frac{303}{2}, y = 0$

$x = \frac{305}{2}, y = 0$

$x = \frac{307}{2}, y = 0$

$x = \frac{309}{2}, y = 0$

$x = \frac{311}{2}, y = 0$

$x = \frac{313}{2}, y = 0$

$x = \frac{315}{2}, y = 0$

$x = \frac{317}{2}, y = 0$

$x = \frac{319}{2}, y = 0$

$x = \frac{321}{2}, y = 0$

$x = \frac{323}{2}, y = 0$

$x = \frac{325}{2}, y = 0$

$x = \frac{327}{2}, y = 0$

$x = \frac{329}{2}, y = 0$

$x = \frac{331}{2}, y = 0$

$x = \frac{333}{2}, y = 0$

$x = \frac{335}{2}, y = 0$

$x = \frac{337}{2}, y = 0$

$x = \frac{339}{2}, y = 0$

$x = \frac{341}{2}, y = 0$

$x = \frac{343}{2}, y = 0$

$x = \frac{345}{2}, y = 0$

$x = \frac{347}{2}, y = 0$

$x = \frac{349}{2}, y = 0$

$x = \frac{351}{2}, y = 0$

$x = \frac{353}{2}, y = 0$

$x = \frac{355}{2}, y = 0$

$x = \frac{357}{2}, y = 0$

$x = \frac{359}{2}, y = 0$

$x = \frac{361}{2}, y = 0$

$x = \frac{363}{2}, y = 0$

$x = \frac{365}{2}, y = 0$

$x = \frac{367}{2}, y = 0$

$x = \frac{369}{2}, y = 0$

$x = \frac{371}{2}, y = 0$

$x = \frac{373}{2}, y = 0$

$x = \frac{375}{2}, y = 0$

$x = \frac{377}{2}, y = 0$

$x = \frac{379}{2}, y = 0$

$x = \frac{381}{2}, y = 0$

$x = \frac{383}{2}, y = 0$

$x = \frac{385}{2}, y = 0$

$x = \frac{387}{2}, y = 0$

$x = \frac{389}{2}, y = 0$

$x = \frac{391}{2}, y = 0$

$x = \frac{393}{2}, y = 0$

$x = \frac{395}{2}, y = 0$

$x = \frac{397}{2}, y = 0$

$x = \frac{399}{2}, y = 0$

$x = \frac{401}{2}, y = 0$

$x = \frac{403}{2}, y = 0$

$x = \frac{405}{2}, y = 0$

$x = \frac{407}{2}, y = 0$

$x = \frac{409}{2}, y = 0$

$x = \frac{411}{2}, y = 0$

$x = \frac{413}{2}, y = 0$

$x = \frac{415}{2}, y = 0$

$x = \frac{417}{2}, y = 0$

$x = \frac{419}{2}, y = 0$

$x = \frac{421}{2}, y = 0$

$x = \frac{423}{2}, y = 0$

$x = \frac{425}{2}, y = 0$

$x = \frac{427}{2}, y = 0$

$x = \frac{429}{2}, y = 0$

$x = \frac{431}{2}, y = 0$

$x = \frac{433}{2}, y = 0$

$x = \frac{435}{2}, y = 0$

$x = \frac{437}{2}, y = 0$

$x = \frac{439}{2}, y = 0$

$x = \frac{441}{2}, y = 0$

$x = \frac{443}{2}, y = 0$

$x = \frac{445}{2}, y = 0$

$x = \frac{447}{2}, y = 0$

$x = \frac{449}{2}, y = 0$

$x = \frac{451}{2}, y = 0$

$x = \frac{453}{2}, y = 0$

$x = \frac{455}{2}, y = 0$

$x = \frac{457}{2}, y = 0$

$x = \frac{459}{2}, y = 0$

$x = \frac{461}{2}, y = 0$

$x = \frac{463}{2}, y = 0$

$x = \frac{465}{2}, y = 0$

$x = \frac{467}{2}, y = 0$

$x = \frac{469}{2}, y = 0$

$x = \frac{471}{2}, y = 0$

$x = \frac{473}{2}, y = 0$

$x = \frac{475}{2}, y = 0$

$x = \frac{477}{2}, y = 0$

$x = \frac{479}{2}, y = 0$

$x = \frac{481}{2}, y = 0$

$x = \frac{483}{2}, y = 0$

$x = \frac{485}{2}, y = 0$

$x = \frac{487}{2}, y = 0$

$x = \frac{489}{2}, y = 0$

$x = \frac{491}{2}, y = 0$

$x = \frac{493}{2}, y = 0$

$x = \frac{495}{2}, y = 0$

$x = \frac{497}{2}, y = 0$

$x = \frac{499}{2}, y = 0$

$x = \frac{501}{2}, y = 0$

$x = \frac{503}{2}, y = 0$

$x = \frac{505}{2}, y = 0$

$x = \frac{507}{2}, y = 0$

$x = \frac{509}{2}, y = 0$

$x = \frac{511}{2}, y = 0$

$x = \frac{513}{2}, y = 0$

$x = \frac{515}{2}, y = 0$

$x = \frac{517}{2}, y = 0$

$x = \frac{519}{2}, y = 0$

$x = \frac{521}{2}, y = 0$

$x = \frac{523}{2}, y = 0$

$x = \frac{525}{2}, y = 0$

$x = \frac{527}{2}, y = 0$

$x = \frac{529}{2}, y = 0$

$x = \frac{531}{2}, y = 0$

$x = \frac{533}{2}, y = 0$

$x = \frac{535}{2}, y = 0$

$x = \frac{537}{2}, y = 0$

$x = \frac{539}{2}, y = 0$

$x = \frac{541}{2}, y = 0$

$x = \frac{543}{2}, y = 0$

$x = \frac{545}{2}, y = 0$

$x = \frac{547}{2}, y = 0$

$x = \frac{549}{2}, y = 0$

$x = \frac{551}{2}, y = 0$

$x = \frac{553}{2}, y = 0$

$x = \frac{555}{2}, y = 0$

$x = \frac{557}{2}, y = 0$

$x = \frac{559}{2}, y = 0$

$x = \frac{561}{2}, y = 0$

$x = \frac{563}{2}, y = 0$

$x = \frac{565}{2}, y = 0$

$x = \frac{567}{2}, y = 0$

$x = \frac{569}{2}, y = 0$

$x = \frac{571}{2}, y = 0$

$x = \frac{573}{2}, y = 0$

$x = \frac{575}{2}, y = 0$

$x = \frac{577}{2}, y = 0$

$x = \frac{579}{2}, y = 0$

$x = \frac{581}{2}, y = 0$

$x = \frac{583}{2}, y = 0$

$x = \frac{585}{2}, y = 0$

$x = \frac{587}{2}, y = 0$

$x = \frac{589}{2}, y = 0$

$x = \frac{591}{2}, y = 0$

$x = \frac{593}{2}, y = 0$

$x = \frac{595}{2}, y = 0$

$x = \frac{597}{2}, y = 0$

$x = \frac{599}{2}, y = 0$

$x = \frac{601}{2}, y = 0$

$x = \frac{603}{2}, y = 0$

$x = \frac{605}{2}, y = 0$

$x = \frac{607}{2}, y = 0$

$x = \frac{609}{2}, y = 0$

$x = \frac{611}{2}, y = 0$

$x = \frac{613}{2}, y = 0$

$x = \frac{615}{2}, y = 0$

$x = \frac{617}{2}, y = 0$

$x = \frac{619}{2}, y = 0$

$x = \frac{621}{2}, y = 0$

$x = \frac{623}{2}, y = 0$

$x = \frac{625}{2}, y = 0$

$x = \frac{627}{2}, y = 0$

$x = \frac{629}{2}, y = 0$

$x = \frac{631}{2}, y = 0$

$x = \frac{633}{2}, y = 0$

$x = \frac{635}{2}, y = 0$

$x = \frac{637}{2}, y = 0$

$x = \frac{639}{2}, y = 0$

$x = \frac{641}{2}, y = 0$

$x = \frac{643}{2}, y = 0$

$x = \frac{645}{2}, y = 0$

$x = \frac{647}{2}, y = 0$

$x = \frac{649}{2}, y = 0$

$x = \frac{651}{2}, y = 0$

$x = \frac{653}{2}, y = 0$

$x = \frac{655}{2}, y = 0$

$x = \frac{657}{2}, y = 0$

$x = \frac{659}{2}, y = 0$

$x = \frac{661}{2}, y = 0$

$x = \frac{663}{2}, y = 0$

$x = \frac{665}{2}, y = 0$

$x = \frac{667}{2}, y = 0$

$x = \frac{669}{2}, y = 0$

$x = \frac{671}{2}, y = 0$

$x = \frac{673}{2}, y = 0$

$x = \frac{675}{2}, y = 0$

$x = \frac{677}{2}, y = 0$

$x = \frac{679}{2}, y = 0$

$x = \frac{681}{2}, y = 0$

$x = \frac{683}{2}, y = 0$

$x = \frac{685}{2}, y = 0$

$x = \frac{687}{2}, y = 0$

$x = \frac{689}{2}, y = 0$

$x = \frac{691}{2}, y = 0$

$x = \frac{693}{2}, y = 0$

$x = \frac{695}{2}, y = 0$

$x = \frac{697}{2}, y = 0$

$x = \frac{699}{2}, y = 0$

$x = \frac{701}{2}, y = 0$

$x = \frac{703}{2}, y = 0$

$x = \frac{705}{2}, y = 0$

$x = \frac{707}{2}, y = 0$

$x = \frac{709}{2}, y = 0$

$x = \frac{711}{2}, y = 0$

$x = \frac{713}{2}, y = 0$

$x = \frac{715}{2}, y = 0$

$x = \frac{717}{2}, y = 0$

$x = \frac{719}{2}, y = 0$

$x = \frac{721}{2}, y = 0$

$x = \frac{723}{2}, y = 0$

$x = \frac{725}{2}, y = 0$

$x = \frac{727}{2}, y = 0$

$x = \frac{729}{2}, y = 0$

$x = \frac{731}{2}, y = 0$

$x = \frac{733}{2}, y = 0$

$x = \frac{735}{2}, y = 0$

$x = \frac{737}{2}, y = 0$

$x = \frac{739}{2}, y = 0$

$x = \frac{741}{2}, y = 0$

$x = \frac{743}{2}, y = 0$

$x = \frac{745}{2}, y = 0$

$x = \frac{747}{2}, y = 0$

$x = \frac{749}{2}, y = 0$

$x = \frac{751}{2}, y = 0$

$x = \frac{753}{2}, y = 0$

$x = \frac{755}{2}, y = 0$

$x = \frac{757}{2}, y = 0$

$x = \frac{759}{2}, y = 0$

$x = \frac{761}{2}, y = 0$

$x = \frac{763}{2}, y = 0$

$x = \frac{765}{2}, y = 0$

$x = \frac{767}{2}, y = 0$

$x = \frac{769}{2}, y = 0$

$x = \frac{771}{2}, y = 0$

$x = \frac{773}{2}, y = 0$

$x = \frac{775}{2}, y = 0$

$x = \frac{777}{2}, y = 0$

$x = \frac{779}{2}, y = 0$

$x = \frac{781}{2}, y = 0$

$x = \frac{783}{2}, y = 0$

$x = \frac{785}{2}, y = 0$

$x = \frac{787}{2}, y = 0$

$x = \frac{789}{2}, y = 0$

$x = \frac{791}{2}, y = 0$

$x = \frac{793}{2}, y = 0$

$x = \frac{795}{2}, y = 0$

$x = \frac{797}{2}, y = 0$

$x = \frac{799}{2}, y = 0$

$x = \frac{801}{2}, y = 0$

$x = \frac{803}{2}, y = 0$

$x = \frac{805}{2}, y = 0$

$x = \frac{807}{2}, y = 0$

$x = \frac{809}{2}, y = 0$

$x = \frac{811}{2}, y = 0$

$x = \frac{813}{2}, y = 0$

$x = \frac{815}{2}, y = 0$

$x = \frac{817}{2}, y = 0$

$x = \frac{819}{2}, y = 0$

$x = \frac{821}{2}, y = 0$

$x = \frac{823}{2}, y = 0$

$x = \frac{825}{2}, y = 0$

$x = \frac{827}{2}, y = 0$

$x = \frac{829}{2}, y = 0$

$x = \frac{831}{2}, y = 0$

$x = \frac{833}{2}, y = 0$

$x = \frac{835}{2}, y = 0$

$x = \frac{837}{2}, y = 0$

$x = \frac{839}{2}, y = 0$

$x = \frac{841}{2}, y = 0$

$x = \frac{843}{2}, y = 0$

$x = \frac{845}{2}, y = 0$

$x = \frac{847}{2}, y = 0$

$x = \frac{849}{2}, y = 0$

$x = \frac{851}{2}, y = 0$

$x = \frac{853}{2}, y = 0$

$x = \frac{855}{2}, y = 0$

$x = \frac{857}{2}, y = 0$

$x = \frac{859}{2}, y = 0$

$x = \frac{861}{2}, y = 0$

$x =$